

# Раздел 7

## Линейный анализ устойчивости

# Теория устойчивости

- Запишем уравнение равновесия конструкции, к которой приложена система постоянных сил, в следующем виде:

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

- Рассмотрим эффект дифференциальной (геометрической) жесткости. Дифференциальная жесткость  $[K_d]$  появляется в результате учета членов высокого порядка в зависимостях деформация-перемещение. Эти зависимости подразумевают, что перемещения в конструкции не зависят от интенсивности нагрузки.

# Теория устойчивости (продолжение)

- Пусть  $\lambda$  произвольный скалярный множитель для другой "интенсивности" нагрузки.

$$([K] + \lambda[K_D])\{u^*\} = \{\lambda P\}$$

- При нагружении конструкции данной силой с различной интенсивностью, могут быть найдены несколько положений неустойчивого равновесия. Эти положения равновесия являются решениями задачи на собственные значения.

$$([K] + \lambda[K_D])\{\delta u^*\} = 0$$

# Решение задачи на собственные значения

$$[ K - \lambda K_d ] \{ \varphi \} = 0 \quad (1)$$

- Решение нетривиально (отлично от нуля) только для определенных значений  $\lambda = \lambda_i$  для  $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- которые делают матрицу  $[ K - \lambda K_d ]$  сингулярной.

# Решение задачи на собственные значения (продолжение)

- Каждому собственному значению  $\lambda_i$ , соответствует единственный собственный вектор  $\{ \varphi_i \}$ .
- $\{ \varphi_i \}$  может быть масштабирован с помощью любого скалярного множителя и по прежнему оставаться решением уравнения (1).
- Компоненты вектора  $\{ \varphi_i \}$  - вещественные числа..

# Последовательности решений для задач устойчивости

**SOL 105 Линейная устойчивость**

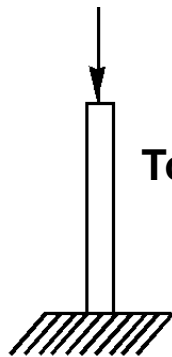
**SOL 106 Нелинейная устойчивость**

## Ограничения для SOL 105

- Требования к конструкции до потери устойчивости:
  - Перемещения должны быть малы.
  - Напряжения должны быть в упругой области (и линейно зависеть от деформаций).

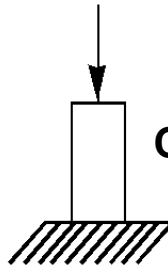
# Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

**Пример:** Три класса колонн (под центральной нагрузкой, материал без дефектов)



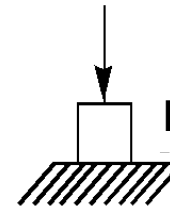
Тонкая

Теряет форму из-за потери устойчивости. Прогиб, при потере устойчивости мал и критическая нагрузка не достигает предела текучести материала. Это колонна Эйлера.



Средняя

Причина потери формы – комбинация текучести и потери устойчивости. Прогиб при потере устойчивости мал, но некоторые напряжения превышают предел упругости материала.



Короткая

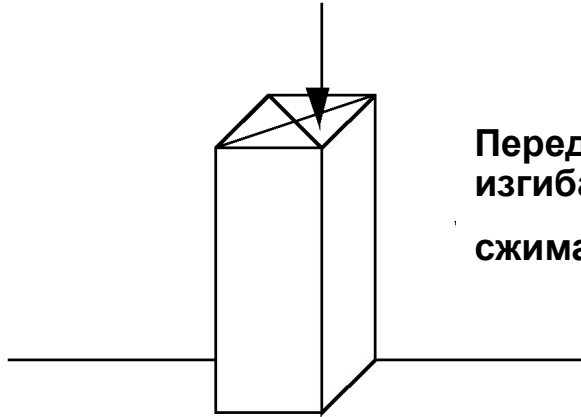
Причина потери формы – текучесть (также, как при тестовом сжатии образца)

# Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

**Примечание:** SOL 105 может применяться для конструкций с небольшими дефектами материала или с очень малым эксцентриситетом нагрузки (например, когда нагрузка направлена не строго в центр и приводит к небольшому изгибу). Здесь инженеру надо исходить из здравого смысла. Те же соображения применимы при анализе пластин.

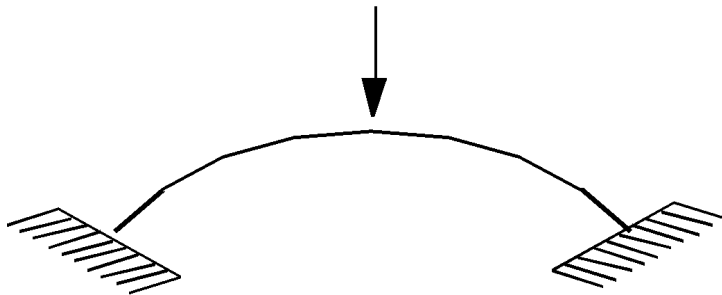
# Примеры нелинейного анализа устойчивости

## Колонна под нагрузкой с большим эксцентриситетом



Перед потерей устойчивости возникают большие изгибающие напряжения, такие же как и сжимающие осевые напряжения.

## Прощелкивание тонкой оболочки (подобно дну бака)



Перед потерей устойчивости возникают большие прогибы, и возможно не упругое поведение конструкции.

# Правила для анализа устойчивости SOL 105

(Для справки необходимо смотреть раздел 13, MSC/NASTRAN Linear Statics Users Guide)

- Секция CASE CONTROL должна содержать не менее двух SUBCASE.
- Запросы на вывод, которые относятся только к решению статической задачи должны быть помещены в первом SUBCASE.
- METHOD должен появиться в отдельном SUBCASE для выбора записей EIGB или EIGRL из секции BULK DATA для решения задач устойчивости.
- Если имеется несколько статических решений, тогда используйте команду STATSUB для выбора варианта одного из статических решений для дальнейшего решения задачи устойчивости.

# Правила для анализа устойчивости SOL 105 (продолжение)

- Если необходимо, могут использоваться различные условия в SPC узлах в SUBCASE статического решения и SUBCASE решения задачи устойчивости.
- Запросы на вывод могут быть помещены в любом выбранном SUBCASE.
- Запросы на вывод, действующие одновременно и в статическом расчете и в анализе устойчивости могут быть помещены выше уровня SUBCASE.

# Записи для линейного анализа устойчивости

## Секция EXECUTIVE CONTROL

SOL 105

## Секция CASE CONTROL

|                           |                                                                                                                                    |
|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| SUBCASE 1<br>LOAD = M     | Определяет условия статического нагружения<br>(LOAD, TEMP, DEFORM)                                                                 |
| SUBCASE 2                 | Выбирает метод нахождения собственных значений                                                                                     |
| METHOD = N<br>STATSUB = i | Выбирает SUBCASE статического решения чтобы использовать его для решения задачи устойчивости (по умолчанию берется первый SUBCASE) |

# Записи для линейного анализа устойчивости (продолжение)

Секция CASE CONTROL должна содержать не менее двух SUBCASE.

## Секция BULK DATA

Определение условий статического нагружения

**EIGB**      Данные для нахождения собственного значения  
или

**EIGRL**      Данные для нахождения собственного значения по  
методу Ланцоша.

# Запись EIGRL

## EIGRL Рекомендуемая запись для расчета устойчивости

Определяет данные, необходимые для проведения решения задачи на собственные значения и анализа устойчивости методом Ланцоша.

| 1     | 2   | 3   | 4   | 5  | 6      | 7      | 8       | 9    | 10 |
|-------|-----|-----|-----|----|--------|--------|---------|------|----|
| EIGRL | SID | V1  | V2  | ND | MSGLVL | MAXSET | SHFSCCL | NORM |    |
| EIGRL | 1   | 0.1 | 3.2 | 10 |        |        |         |      |    |

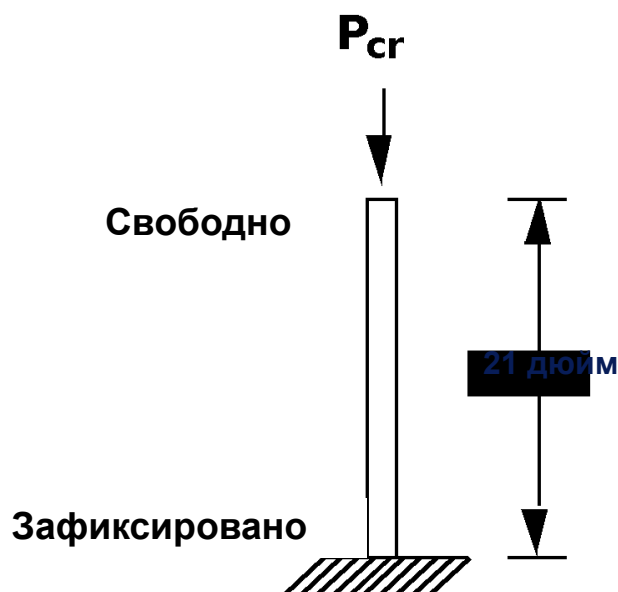
# Запись EIGRL (продолжение)

| <u>Поле</u> | <u>Содержание</u>                                                                                     |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| SID         | Идентификатор набора (уникальное целое число > 0)                                                     |
| V1, V2      | Анализ вибрации: диапазон интересующих частот<br>Анализ устойчивости: диапазон интересующих $\lambda$ |
| ND          | Число необходимых корней (целое > 0 или оставлять чистым)                                             |
| MSGLVL      | Уровень диагностики (целое, от 0 до 3 или оставлять чистым)                                           |
| MAXSET      | Число векторов в блоке (целое, от 1 до 15 или оставлять чистым)                                       |

# Пример - простая колонна Эйлера

## Задача

Найти критическую нагрузку и соответствующую ей первую форму потери устойчивости цилиндрического стержня.



Круглое сечение

Диаметр = 0.25 дюйма

$E$  = 30.E+6 фунтов/дюйм<sup>2</sup>

$I$  = 1.917E-4 дюйм<sup>4</sup>

Площадь = 4.909E-2 дюйм<sup>2</sup>

# Пример - простая колонна Эйлера (продолжение)

## Теоретическое решение

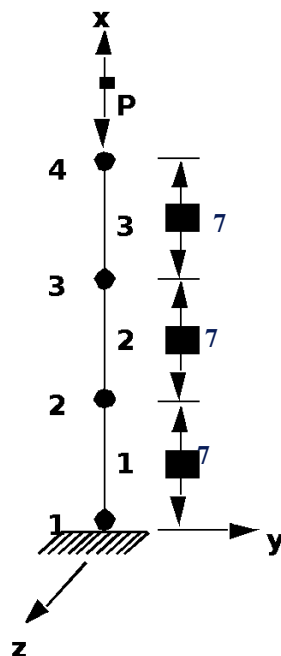
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} = 32,18 \text{ фунта}$$

где  $L_{eff}$  = эффективная длина колонны

=  $2L$  для свободно опертой колонны

# Пример - простая колонна Эйлера (продолжение)

## Модель MSC.Nastran



## Решение MSC.Nastran

Значение силы в записи FORCE

$$P_{cr} = \square 32.18 \times 1.0 = \square 32.18 \text{ фунта}$$

Собственное значение

# Пример - простая колонна Эйлера – входной файл

```
sol 105
cend
$
title = buckling of fixed-free beam
disp = all
$
echo = punch
spc = 10
subcase 1
  label = static subcase
  load = 5
subcase 2
  label = buckling subcase
  method = 100
$
begin bulk
$
CBEAM      1      1      1      2      0.      0.      1.
CBEAM      2      1      2      3      0.      0.      1.
CBEAM      3      1      3      4      0.      0.      1.
EIGRL      100
FORCE      5      4      1.      -1.
GRID       1      0.      0.      0.      345
GRID       2      7.      0.      0.      345
GRID       3      14.     0.      0.      345
GRID       4      21.     0.      0.      345
MAT1       2      30.E6      .33
PBEAM      1      2      4.909E-21.917E-41.917E-4      3.835E-4
SPC1       10     123456      1
enddata
```

# Пример - простая колонна Эйлера – выходной файл

Первое собственное значение:  $P_{cr} = \lambda_1 \times 10$  фунтов = 32.18 фунта

Первый собственный вектор (дает форму потери устойчивости)

```

BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG
SUBCASE 2

MODE      EXTRACTION      EIGENVALUE      REAL EIGENVALUES      GENERALIZED      GENERALIZED
NO.      ORDER      EIGENVALUE      RADIANS      CYCLES      MASS      STIFFNESS
1         1         3.217839E+01      5.672600E+00      9.028223E-01      5.873539E-02      1.890010E+00
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG
SUBCASE 2
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG
BUCKLING SUBCASE
EIGENVALUE = 3.217839E+01

REAL EIGENVECTOR NO. 1
POINT ID.  TYPE      T1      T2      T3      R1      R2      R3
1          G      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
2          G      4.118373E-18      1.339746E-01      0.0      0.0      0.0      3.739763E-02
3          G      7.290629E-18      5.000000E-01      0.0      0.0      0.0      6.477460E-02
4          G      8.820291E-18      1.000000E+00      0.0      0.0      0.0      7.479527E-02
    
```

# Литература по анализу устойчивости

1. MSC Seminar Notes, “MSC/NASTRAN Material and Geometric Nonlinear Analysis”:
2. MSC.Nastran Linear Static Analysis Users Guide, Section 13.
3. MSC.Nastran Verification Problem Manual (Version 64, January 1986 Edition):
  - Problem 3.0501A, “Lateral Buckling of a Cantilever Beam”
  - Problem 3.0502A, “Simple Frame Analysis with Buckling”
  - Problem 3.7701S, “Euler Buckling of a Simply Supported Beam”

# Литература по анализу устойчивости (продолжение)

## 4. MSC.Nastran Demonstration Problem Manual (Version 64, March 1985 Edition):

Under Elastic Stability Analysis, see Demonstration Problem D0504A,  
“Flexural Buckling of a Beam”

## 5. MSC.Nastran Application Notes

October 1978 “Buckling and Real Eigenvalue Analysis of Laminated  
Plates”

September 1979 “Static Stability of Structures with Nonlinear Differential  
Stiffness”

February 1982 “Elastic-Plastic Buckling of a Thin Spherical Shell”

November 1985 “Nonlinear Buckling Analysis”

# Пример 9

## Анализ устойчивости пластины

# Пример 9 (продолжение)

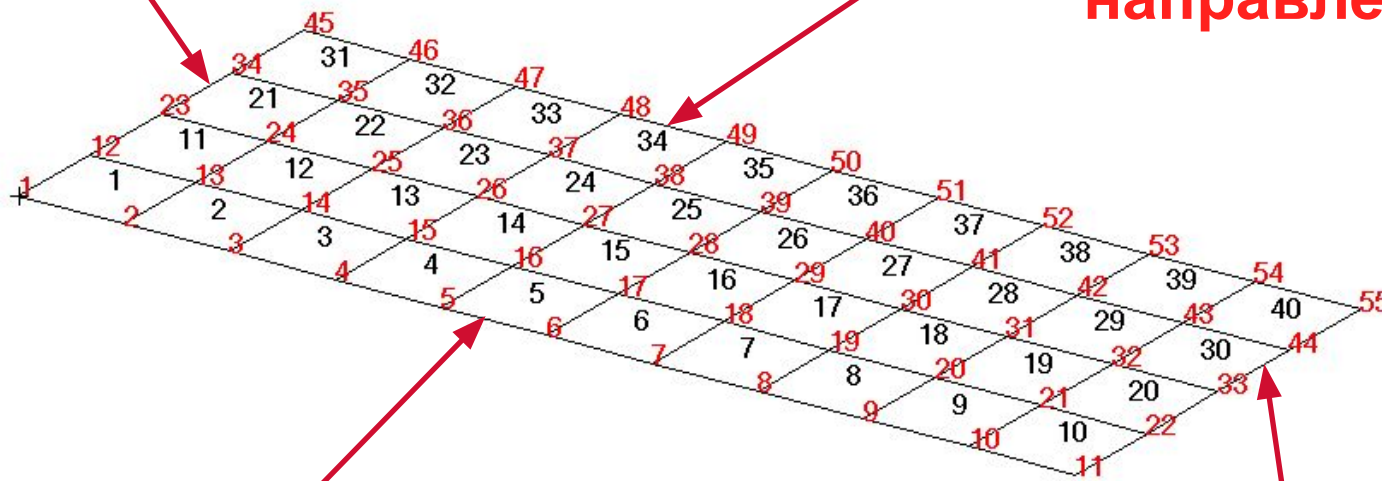
- **Описание модели**

- ❑ **Та же самая модель панели что и в Примере 5, без подкреплений.**
- ❑ **В этой модели применены следующие граничные условия:**
  - **Опираение на левом конце**
  - **“Ролики” на правом конце**
  - **Нулевые вертикальные перемещения на верхней и нижней гранях**
- ❑ **Приложим 100 фунт/дюйм<sup>2</sup> сжимающие нагрузки к правому краю пластины**
  - **Общая нагрузка на правой стороне =  $(100) (8) (.01) = 8$** 
    - **Приложите 1 фунт в каждый из узлов 11 и 55 сетки**
    - **Приложите 2 фунта в каждый из узлов 22, 33 и 44 сетки**

# Пример 9 (продолжение) – Граничные условия

Простое опирание

Защемление в  
вертикальном  
направлении



Защемление в  
вертикальном  
направлении

Опора на роликах

# Пример 9 (продолжение) – Приложенные нагрузки

