

Рекуррентные соотношения

Автор: учитель информатики и
ИКТ МОУ Ольгинской СОШ
Хохрина Елена Александровна

Числовые ряды

● $1+3+5+7+9+11+ \dots+(2n-1)+ \dots$

● $2+6+ 18+54+ 162+ \dots$

● $1+1/2+1/4+1/8+ \dots+1/2^n+ \dots =2$

● $1+1+2+3+5+8+13+21+37+\dots$

● $1+1/1!+ 1/2!+ 1/3!+ 1/4!+ \dots + 1/n!+ \dots =e$

● $1+1/2+1/4+1/6+1/8+1/10+ \dots + 1/2n+ \dots$

Последовательность чисел Фибоначчи

● $1+1+2+3+5+8+13+21+37+\dots$

Задание: Сформулируйте правило, по которому образуется ряд Фибоначчи.

Числа Фибоначчи возникают в самых разных математических ситуациях: комбинаторных, числовых, геометрических. Учёные стремятся отыскивать числовые закономерности даже в живой природе и давно заметили, что числа Фибоначчи встречаются в спиральных формах, которые наблюдаются в мире растений. Например, в расположении листьев и ветвей вокруг ствола дерева. Число витков спирали, которые необходимо сделать, чтобы перейти от нижнего листа к ближайшему верхнему равно одному из чисел Фибоначчи. Это явление в ботанике называется **филлотаксис**.

Леона́рдо Пиза́нский

(лат. *Leonardo Pisano*, около 1170, Пиза — около 1250, там же) — первый крупный **математик средневековой Европы**. Наиболее известен под прозвищем **Фибона́ччи** (*Fibonacci*); о происхождении этого псевдонима имеются разные версии. По одной из них, его отец Гильермо имел прозвище **Боначчи** («Благонамеренный»), а сам Леонардо прозывался *filius Bonacci* («сын Благонамеренного»). По другой, *Fibonacci* происходит от фразы *Figlio Buono Nato* *Ci*, что в переводе с итальянского означает «хороший сын родился».



Число Непера

- $1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots + 1/n! + \dots = e$

Число Непера является составляющей закона существования случайных процессов физической и биологической природы.

Например, закона нормального распределения скорости газовых молекул, закона охлаждения тел, в формулах радиоактивного распада, возраста Земли, роста клеток и др.

Джон Нэпер

(англ. *John Napier*; 1550—1617) — шотландский барон (8-й лорд Мерчистона), математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц.



Факториал

- Факториал - это произведение натуральных чисел от 1 до того числа, которое стоит под знаком факториала.
- От factor - сомножитель. $0! = 1$.
- С учётом этого ряд чисел, дающих в сумме число Непера можно записать в виде
- $1 + 1/1 + 1/(1 * 2) + 1/(1 * 2 * 3) + \dots + 1/(1 * 2 * 3 * 4 * \dots * (n-1)) + \dots$
- Задание: Предложите, каким образом каждый элемент этого ряда можно выразить через предыдущий.

● *Вывод:*

- существуют ряды, в которых элементы можно вычислять через предыдущие. Во всех рядах на доске наблюдается условие, с помощью которого можно образовать элемент ряда. Такое условие называют ***инвариантом*** (неизменяемая часть чего-либо).

Ряд четных чисел

- $2+4+6+8+10+12+ \dots +2n+ \dots =n(n+1)$
- Введём обозначения:
- k - значение последнего члена ряда;
- n - количество вычисляемых членов ряда;
- i - номер члена ряда (от 1 до n);
- a_i - обозначение члена ряда;
- a_{i-1} - обозначение предыдущего члена ряда.

● $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \dots + k$

● № $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \dots \quad n$
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad \dots \quad a_n$

● **Задание:** Подумайте, как из 2 получить 4?

Чем является 2 по отношению к a_2 ?

Чем является a_1 по отношению к a_i ?

Получаем формулу

$$a_i = a_{i-1} + 2$$

Формула представляет собой рекуррентное соотношение.

Возникает вопрос: «Как записать рекуррентное соотношение для вычисления на компьютере?»

$n = 15$

a

2

$$A=2$$

a

4

$$A_i = a_{i-1} + 2$$

a

6

$$A_i = a_{i-1} + 2$$

...

a

30

$$A_i = a_{i-1} + 2$$

Вывод:

Инвариантность

рекуррентного

соотношения

позволяет записать

его в виде

циклической

конструкции.

найти сумму элементов

ряда

- $S=0$ - начальное значение суммы,
- $S=S+A$ - её изменение на каждом шаге цикла.

алг INV(вещ A,S/цел K,N,I)

нач

запрос (N)

A:=2

S:=0

S:=S+A

вывод («I», «A»:12, «S»S:12)

вывод («1»,A:12,S:12)

нц для i от 2 до n

A:=A+2

S:=S+A

вывод (I:3, A:12, S:12)

кц

кон

1. Можно ли по этому алгоритму выписать i -й член и сумму элементов ряда нечётных чисел?
2. Назовите инвариант. Запишите рекуррентное соотношение.
3. Что изменилось в алгоритме?

Домашнее задание

- Примеры числовых рядов, в которых надо уметь находить инвариант.
- Получить рекуррентное соотношение и изобразить блок-схему.