

Научно-исследовательский вычислительный центр  
МГУ

Интеллектуальные информационные технологии

Полиморфное кодирование кубических  
структур, операции над кубантами,  
моноид, хаусдорфова метрика и  
совмещенные машинные операции в  
супервычислениях

Научный руководитель -Г.Г.Рябов

Исполнители:, В.А.Серов, В.А.Толстошеев, Г.Г.  
Кузьмин, А.С.Фингеров

Проект поддержан грантом РФФИ 09-07-12135-офи\_м

# План изложения

- Общее введение.
- Введение. Роль кубических структур в математических моделях.
- Часть 1. Определение кубантов. Операция умножения. Моноид.
- Часть 2. Метрика Хаусдорфа-Хэмминга на кубантах в  $\mathbb{I}^n$ .
- Часть 3. Метрика Евклида-Хаусдорфа в  $\mathbb{R}^n$ с.
- Часть 4. Элементы кубического синтеза.
- Часть 5. Элементы динамики на кубических структурах.
- Часть 6. Машинное представление данных и операций.
- Часть 7. Полиморфное кодирование и алгебраизация супервычислений.
- Часть 8. Инструментальная система на суперкомпьютере.
- Литература.
- Приложение 1. Непересекающиеся  $k$ -пути.
- Приложение 2. Примеры графического представления.
- Приложение 3. 3-пути через случайную окрестность.

# Общее введение

- Интеллектуальные информационные технологии подразумевают не только работы по компьютерной интерпретации механизмов мозга человека, но и использование лингвистических (в т.ч. и математических) методов для более адекватного представления (кодирования в машинные формы) и дальнейших конструктивных компьютерных действий над элементами (и структурами из них) самой общей природы с целью их более глубокого познания.
- Возможность сочетания в единой форме машинного представления различных (даже разнородных) свойств элементов некоторого множества и единообразных операций над такими представлениями открывает дорогу для установления новых закономерностей и как результат этого способствует решению прикладных проблем. Такой подход в праве характеризовать как одну из ветвей интеллектуальных информационных технологий.
- Представления многомерных метрических и топологических пространств, являются основой для различных моделей их структуризации и эффективного отображения этих моделей в существующие или принципиально реализуемые компьютерные системы.

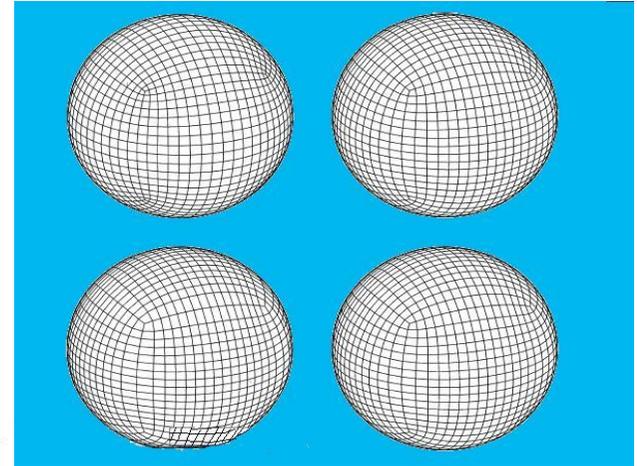
- В самом общем виде основа содержательной части - конкретный пример построения конструктивного мира кубических структур на основе нетрадиционного кодирования, обладающего полиморфными свойствами. Это кодирование позволяет ввести операции, совмещающие вычисление величин, характеризующих метрические, топологические, комбинаторные и алгебраические свойства элементов и структур из этого конструктивного мира.
- Основные операции сводятся к поразрядным операциям, которые обладают максимальной совмещенностью – потенциальной реализацией выполнения за один машинный такт обработки практически неограниченных по числу  $n$  разрядов слов, где  $n$ -размерность рассматриваемого пространства. Эти операции эмулированы на современных компьютерах и могут быть эффективно аппаратно реализованы в компьютерах следующих поколений.
- Постановка задач анализа и синтеза объектов из этого конструктивного мира и алгоритмы решения этих задач опираются на предложенные представления и введенные операции.

- В рамках предыдущих тезисов и следует рассматривать ниже изложенное содержание результатов под общим названием «Алгебраическое представление кубических структур и супервычисления», которое является составной частью проекта, поддержанного грантом РФФИ (09-07-12135-офи-м).
- С другой стороны эта тематика является дальнейшим развитием инструментальной системы под общим названием «Топологический процессор», развиваемой в НИВЦ МГУ с 2005 года с целью более полного математического и программного обеспечения суперкомпьютерных систем ( в частности суперкомпьютера МГУ «Чебышев») при решении комбинаторных геометрико-топологических задач.
- Образовательная сторона исследований направлена на выработку наиболее компактных и доходчивых представлений многомерных структур (чаще всего в виде группоидов) и действий на них, интерпретированных традиционными и нетрадиционными машинными операциями, широко используя совмещение и параллелизм. С целью подготовки специалистов такого профиля создан и продолжает расширяться спецкурс для студентов факультета ВМ и К МГУ «Введение в компьютерные методы комбинаторно-топологических построений».

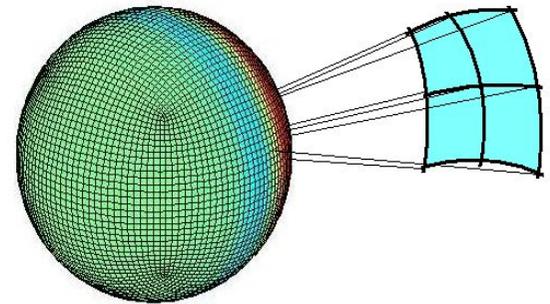
# Роль кубических структур в геометрико-топологической основе математических моделей

- Глобальная модель циркуляции (МТИ)-погодный и климатический прогноз. Конформная кубоидная сфера. □
- Геометрическая основа науки о двоичном кодировании - $n$ -мерный единичный куб. (R.Hamming)[8]

External



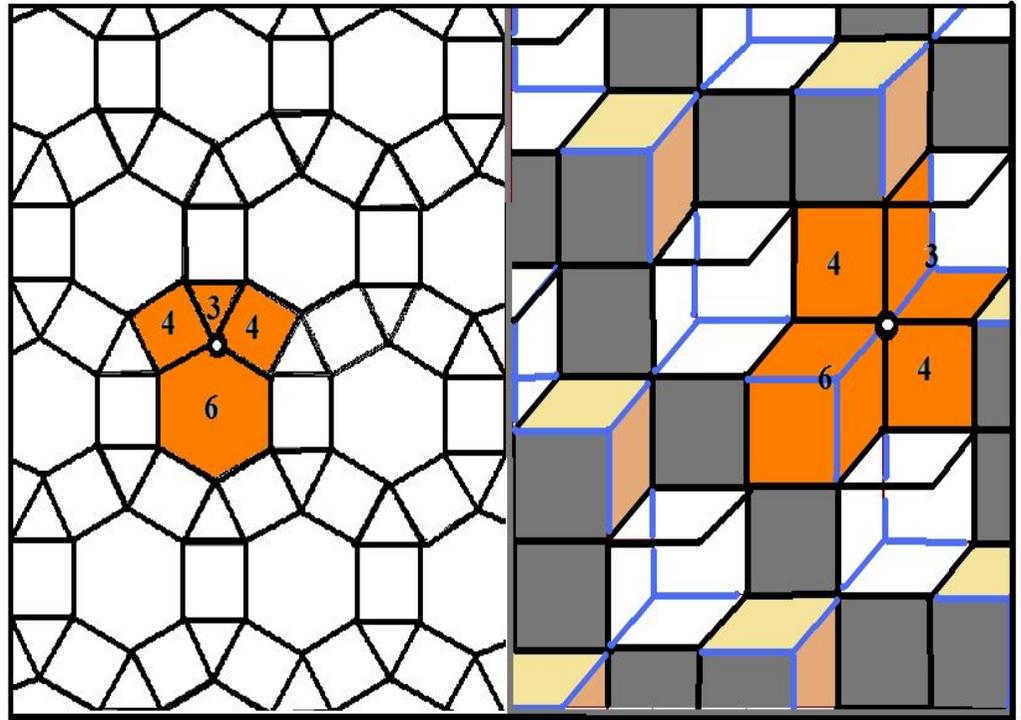
Expanded Conformal Cubic Grid



Face 3cube: 32x32; 64x64; ...

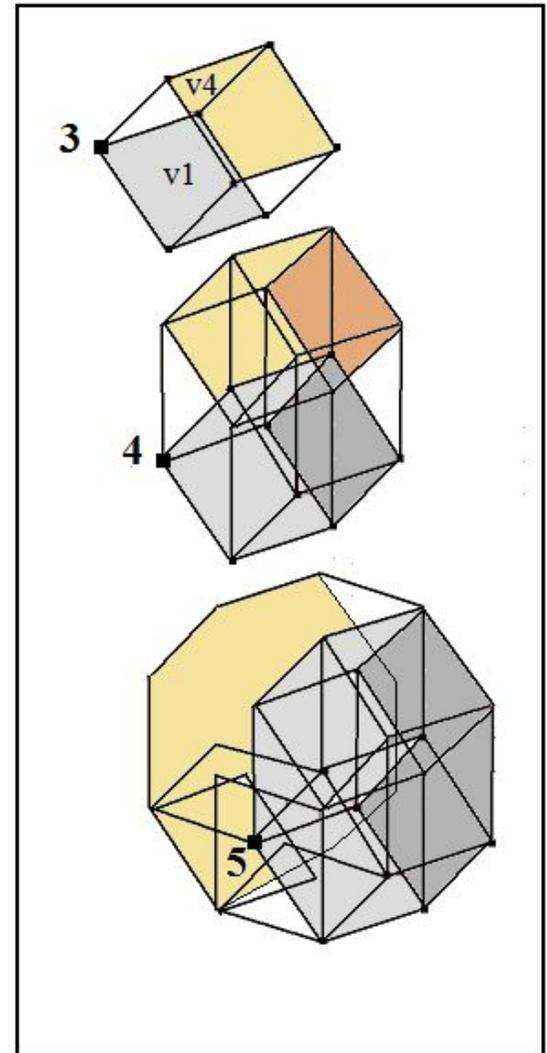
# Изометрические вложения в кубические структуры

- Эффективное отображение на кубические структуры.
- Вложения плоских мозаик в реберный остов  $\mathbf{Z}^n$ .
- Работы- Деза, Долбилина, Штанько, Штогрин. [2,3,4]



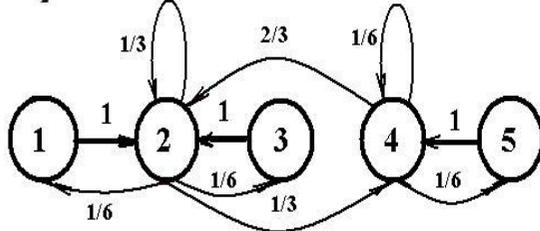
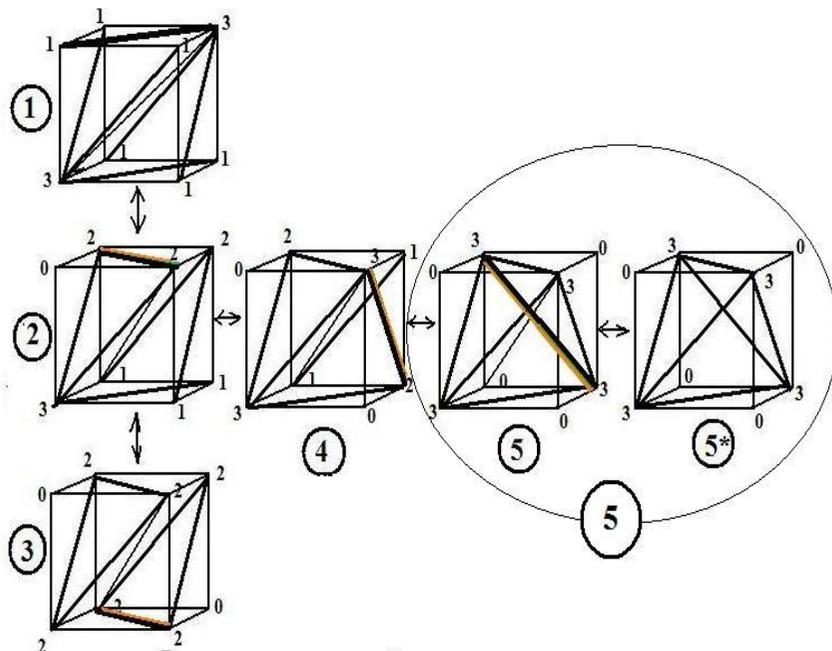
# Комбинаторные многогранники, кольцо граней Стенли-Райснера

- Для простого многогранника  $P$  с гранями  $F_1, \dots, F_m$  и коммутативного кольца  $K$  с единицей кольцо граней Стенли-Райснера- факторкольцо  $K(P) = K[v_1, \dots, v_m] / \mathfrak{I}_P$ , где  $\mathfrak{I}_P$ -идеал, порожденный мономами  $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_s}$ , что  $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_s} = \emptyset$  в  $P$ ,  $i_1 < \dots < i_s$ .
- Для  $P = I^3$ :  $K(P) = K[v_1, \dots, v_6] / (v_1 v_4, v_2 v_5, v_3 v_6)$ ;
- Комбинаторные многогранники и уравнения мат. физики. (В.М. Бухштабер) [ 5 ]
- $n$ -куб-комбинаторный многогранник



# Триангуляции на кубических структурах и их динамика

- 6 типов примитивной триангуляции  $\mathbb{I}^3$ .
- Марковские цепи в реберной динамике примитивных триангуляций в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^4$ . Эргодические свойства.
- Распределение допустимых триангуляций в статистике Бозе-Эйнштейна. [18]



$$A_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_I^n = \begin{pmatrix} 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \end{pmatrix}$$

# Возрастание роли в супервычислениях топологии+многомерности+ комбинаторики +динамики

- Эффективные методы представления семейств объектов для классификации, нумерации и комбинаторных схем перечисления.
- Учет наиболее общих свойств и инвариантов для многомерных построений (симметрия и группы движений, случайные процессы и эргодические свойства).
- Кубические структуры - достаточно универсальны для всестороннего компьютерного анализа и создания на этой базе компьютерных методов синтеза. [1-7]

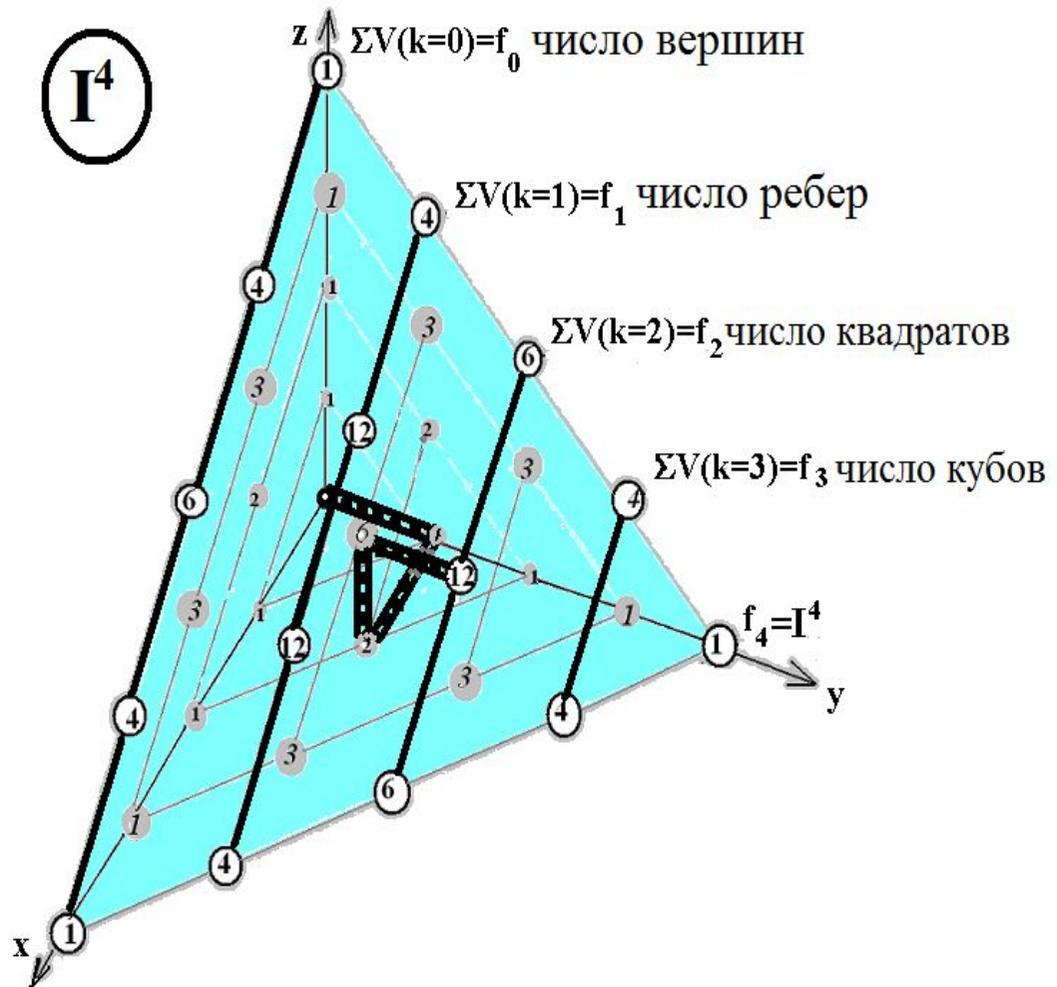
# Принятые обозначения

- $\mathbb{R}^n$ -n-мерное евклидово пространство.
- $e_1, e_2, \dots, e_n$  - ортонормированный базис.
- $\mathbb{Z}^n$ -подпространство целых точек в  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathbb{I}^n$ -n-мерный единичный куб
- $F(k)$ -k-мерная грань в  $\mathbb{I}^n$  (0-грани-вершины, 1-грани-ребра, 2-грани-квадраты и т.д.)
- $F^n$ -множество всех граней  $\mathbb{I}^n$ . ( $k=0, 1, \dots, n$ ).
- $\{0, 1, 2\}$ -троичный алфавит.  $\mathbb{D}_3^n$  - множество всех троичных кодов.
- $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$ -четверичный алфавит.  $\mathbb{D}_4^n$  – множество всех четверичных кодов.
- $S_n$ - симметрическая группа подстановок.

# Часть 1. Пирамида Паскаля и биекция

$$\mathbf{F}^n \leftrightarrow \mathbf{D}_3^n$$

- Пирамида Паскаля-3d аналог треугольника Паскаля.
- Рекурсивная процедура вычисления триномиальных коэффициентов.
- Число в вершине-число крайних путей в трехмерной решетке из (000) в данную вершину.
- Кодировка путей перемещений :0-перемещение по x, 1- по y, 2- по z.
- $f_k = C_n^k 2^{n-k};$   
[19]

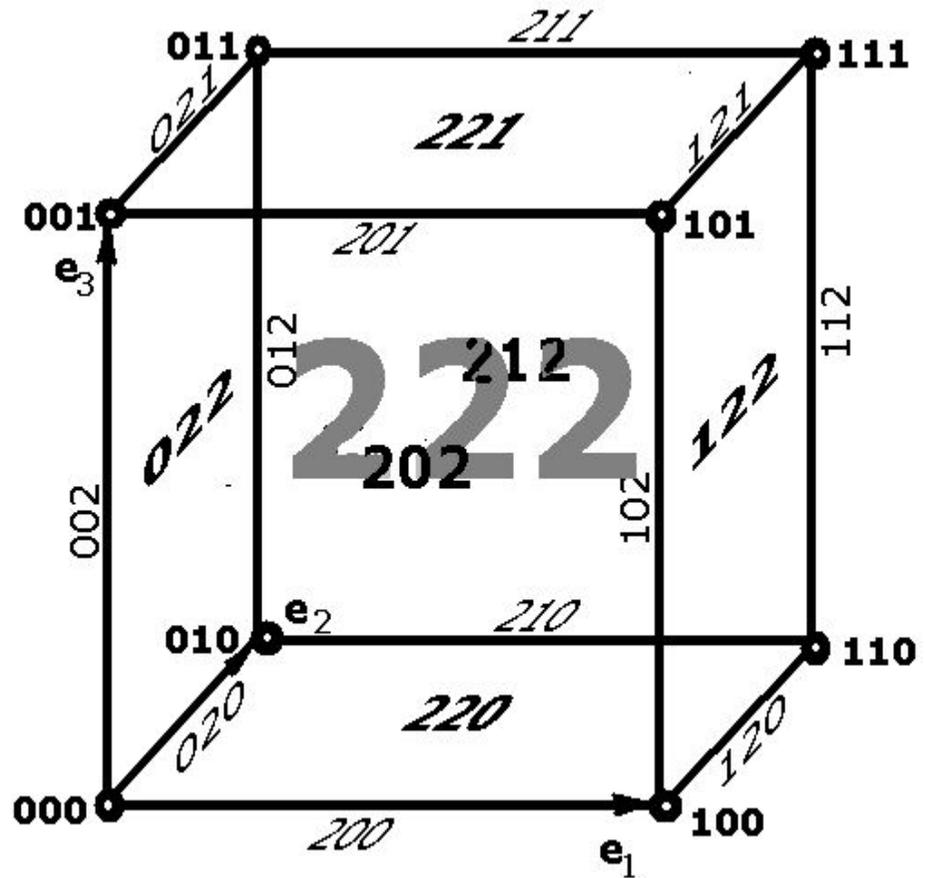


Биекция: мн-во всех  $n$ -разрядных троичных кодов  $\square \square$  мн-во всех граней  $n$ -куба.

- $E = e_1, e_2, \dots, e_n; \square \mathbf{R}^n;$
- $D = d_1, d_2, \dots, d_n; d_i \in \{0, 1, 2\};$
- $F(k, p) = \prod_{i: d_i=2; (k)} e_i + \prod_{j: d_j=0, 1; (n-k)} e_j;$
- Так 021221 –  $e_2 \times e_4 \times e_5$  (трехмерная грань), транслированная в вершину 001001 в шестимерном кубе  $I^6$ .
- **Кубант (кубический квант)** –  $n$ -разрядный троичный код, однозначно определяющий размерность и положение грани в  $n$ -мерном единичном кубе  $I^n$ . [21]

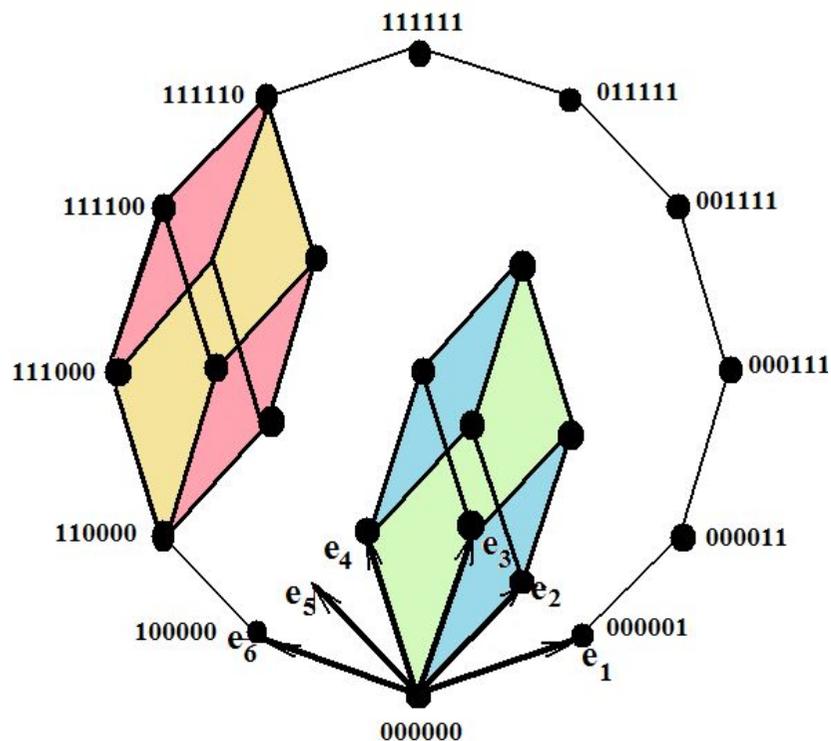
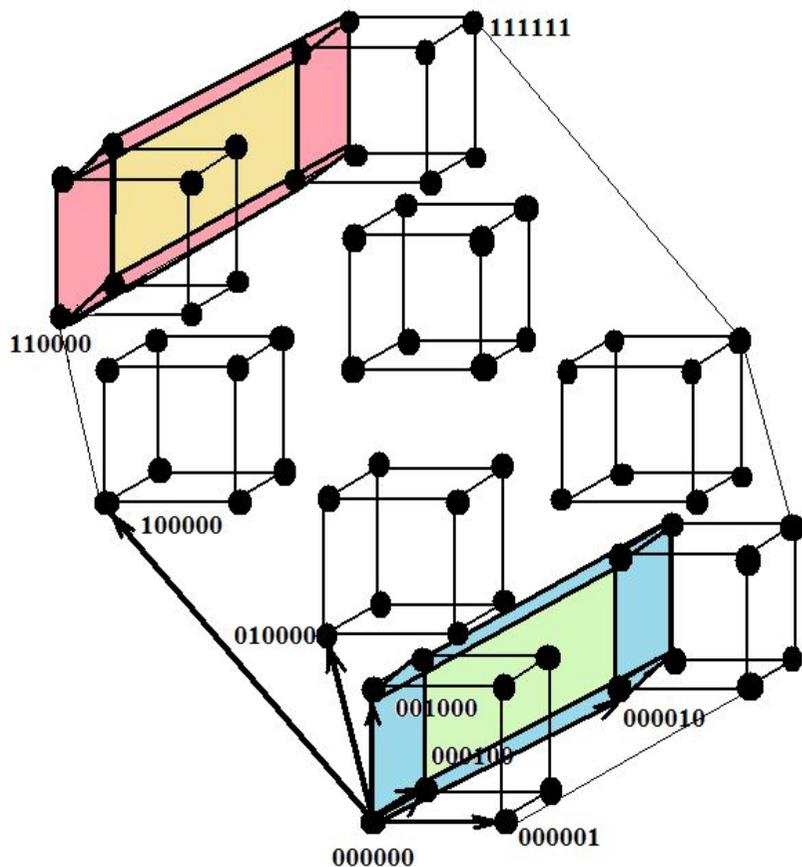
# Троичное кодирование граней $\mathbb{I}^3$ .

- Вершины (0-границы): 001, 010, ..., 111;
- Ребра (1-границы): 002, 012, ..., 211;
- Грани (2-границы): 022, 122, ..., 221;
- Весь  $\mathbb{I}^3$  : 222;



# Виды графических интерпретаций для многомерных случаев

- Общие целевые функции графики-наглядность для плоских проекций, отражение фундаментальных свойств-симметрии. Пример-кубант 112220.



# Бинарная операция умножения

- $D1 = d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n};$
- $D2 = d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n};$
- Поразрядная операция умножения задается следующей таблицей  $\square$
- В префиксной записи:
- $P(022121, 121012) = \emptyset 21 \emptyset 11;$  (псевдокубант)
- $P(022121, 220112) = 020111;$  (кубант).

| $\Pi$    | $d_{1i}$ | 0           | 1           | 2 |
|----------|----------|-------------|-------------|---|
| $d_{2i}$ |          |             |             |   |
| 0        |          | 0           | $\emptyset$ | 0 |
| 1        |          | $\emptyset$ | 1           | 1 |
| 2        |          | 0           | 1           | 2 |

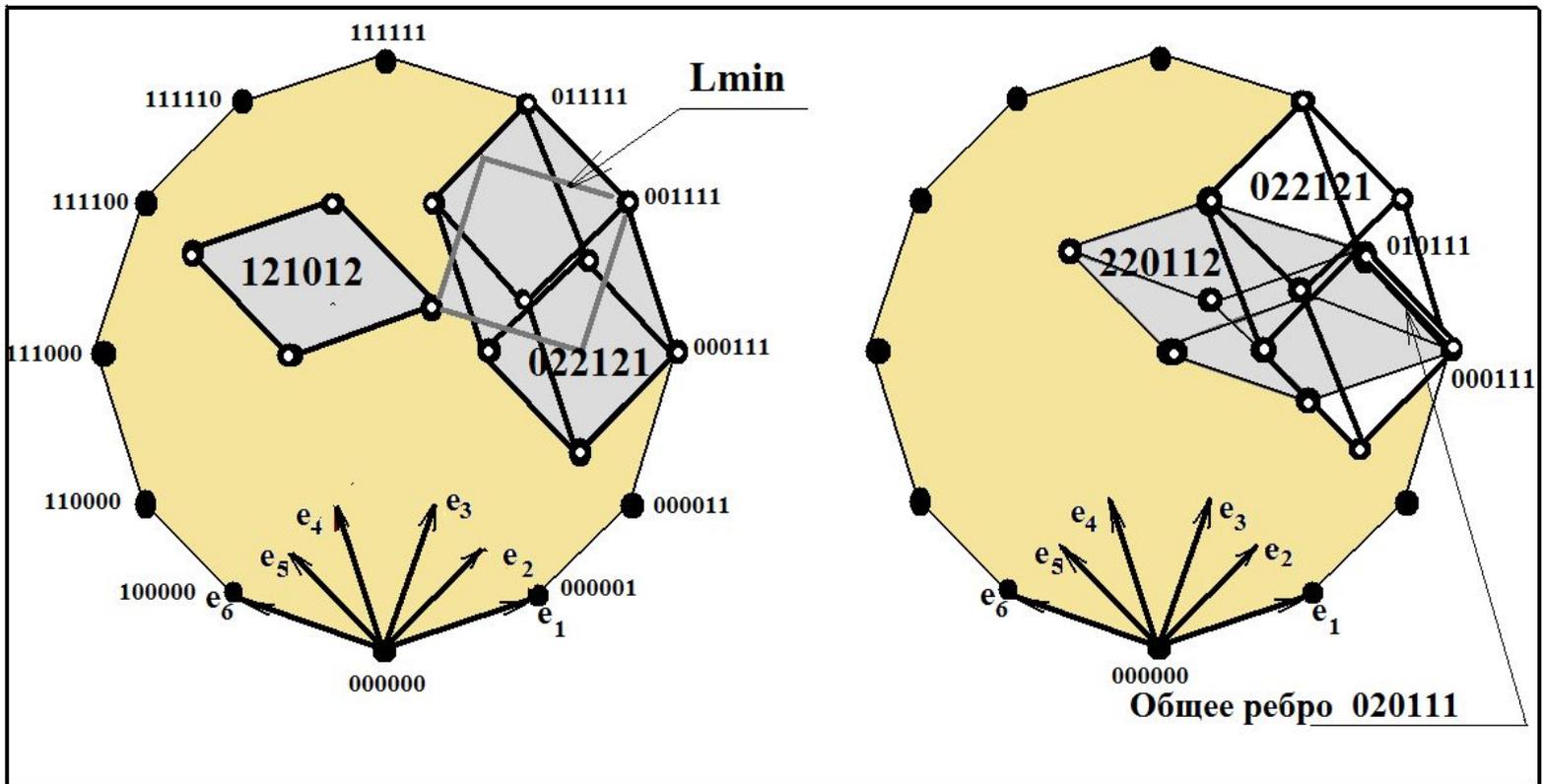
# Расширение алфавита и доопределение операции умножения.

- Расширенный алфавит  $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$ .
- Операция умножения (поразрядная) на расширенном алфавите задается следующей таблицей  
□
- По определению операция – коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна.

| $\Pi$       | $d_{1i}$ | $\emptyset$ | 0           | 1           | 2           |
|-------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $d_{2i}$    |          |             |             |             |             |
| $\emptyset$ |          | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 0           |          | $\emptyset$ | 0           | $\emptyset$ | 0           |
| 1           |          | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 1           | 1           |
| 2           |          | $\emptyset$ | 0           | 1           | 2           |

# Свойства произведения кубантов.

- $\omega(D)$ -число разрядов с символом  $\emptyset$ .
- $\omega(\Pi(D1,D2)=0) \square \Pi(D1,D2) = D3$ -кубант-пересечение.
- $\omega(\Pi(D1,D2) \neq 0) \square \omega = L_{\min}(D1,D2)$ ;
- $\Pi(121012,022121)=\emptyset 21\emptyset 11$ ;  $\Pi(220112,022121)=020111$ ;



# Доказательство свойства

$$\omega(\Pi(D1, D2)) = L_{\min}(D1, D2).$$

- Пусть  $V1$  и  $V2$  два различных  $n$ -разрядных двоичных слова (алфавит  $\{0;1\}$ ), число попарно несовпадающих разрядов  $m$ . Тогда длина минимального пути по ребрам  $I^n$  между вершинами с координатами  $V1$  и  $V2$  равна  $m$ . (Хэммингово расстояние).
- Заменяем в словах  $V1$  и  $V2$  один из совпадающих попарно  $n$ - $m$  разрядов на противоположный. Тогда  $\rho(V1^*, V2^*) = m$ .
- Заменяем этот разряд в  $V1^*$  и  $V2^*$  на 2. Образовались 2 кубанта  $D1$  и  $D2$  (соответствующие ребрам), такие что  $V1, V1^* \in D1$ ,  $V2, V2^* \in D2$  и  $\omega(\Pi(V1, V2)) = \omega(\Pi(V1^*, V2^*)) = L_{\min}(V1, V2) = m$ ;
- С одной стороны  $L_{\min}(D1, D2)$  должно быть  $\leq m$ , т.к. к числу точек каждого множества добавились новые.
- Но поскольку добавились только внутренние точки ребер, то минимальный путь до таких точек по ребрам  $n$ -куба будет  $m + \Delta \geq m$ . Из этого противоречия следует  $\omega(\Pi(D1, D2)) = m = L_{\min}(D1, D2)$ . И так для любого числа совпадающих попарно разрядов  $V1$  и  $V2$ , а следовательно и для любой пары кубантов, т.к. любой кубант можно образовать из двоичного слова заменой ряда разрядов на 2.

# $D_4^n$ -МОНОИД ОТНОСИТЕЛЬНО УМНОЖЕНИЯ.

- Все  $n$ -разрядные четверичные слова с алфавитом  $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$  - (кубанты и псевдокубанты) образуют полугруппу относительно введенного умножения.
- Умножение обладает свойством идемпотентности  $\Pi(D, D) = D$ ; (Маслов [15])
- Единица в этой полугруппе – слово  $22\dots 2$  (соответствует  $I^n$ ).
- Т.о.  $D_4^n$ -МОНОИД.

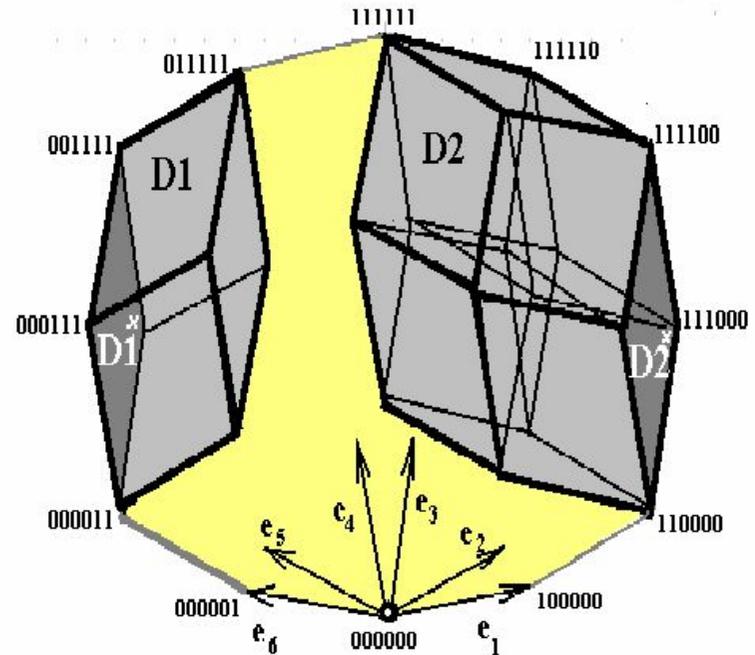
# Подмножество кубантов $\square$ матрица парных произведений (смежностей)

- $D_1, D_2, \dots, D_s \square M_{pp}; m_{ij} = \Pi(D_i, D_j); i, j = 1, 2, \dots, n;$
- $D_1 = 112202; D_2 = 121122; D_3 = 122211; D_4 = 120122; D_5 = 002212;$
- 
- 
- 
- 
- 
- $M_{pp} =$ 

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 112202 | 111102 | 111201 | 110102 | 002202 |
|        | 121122 | 121111 | 120122 | 001112 |
|        |        | 122211 | 120111 | 002211 |
|        |        |        | 120122 | 000112 |
|        |        |        |        | 002212 |
- симметрия
- $D_1, D_2, D_3, D_4$ -образуют цикл (общие ребра);  $D_5$  отстоит на  $L_{min} = 1$  от  $D_2, D_3, D_4$  и на  $L_{min} = 3$  от  $D_1$ ;
- $M_{pp}$ -обобщение матрицы смежностей для графов.

# Часть 2. Хаусдорфова метрика на кубантах. Обобщение метрики Хэмминга.

- $\rho_{HH}(D1, D2) = \max\{\max L_{\min}(D1 \square D2), \max L_{\min}(D2 \square D1)\};$
- $D1 = 022211; D2 = 112222;$
- $L_{\min}(D1 \square D2) \square 112222$
- $002211$
- $\Pi = \emptyset \emptyset 2211$
- $\max L_{\min}(D1 \square D2) = 2;$
- $L_{\min}(D2 \square D1) \square 022211$
- $112200$
- $\Pi = \emptyset 122 \emptyset \emptyset$
- $\max L_{\min}(D1 \square D2) = 3;$
- $\rho_{HH}(D1, D2) = \max\{2, 3\} = 3;$



# Хаусдорфова метрика на кубантах. Операция Н-сжатия.

- Н-сжатие  $D_i$  относительно  $D_j$   $\square (D_i^*/D_j)$  - для вычисления самого длинного из кратчайших путей от  $D_i$  до  $D_j$
- $\text{Max}\{\omega\Pi(D_i^*/D_j, D_j), \omega\Pi(D_j^*/D_i, D_i)\} = \rho_{\text{HH}}(D_i, D_j);$

|                 |           |           |          |          |          |
|-----------------|-----------|-----------|----------|----------|----------|
|                 |           | <b>Di</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> |
|                 | <b>Dj</b> |           |          |          |          |
| <b>Di*/Dj</b> → | <b>0</b>  |           | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |
|                 | <b>1</b>  |           | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |
|                 | <b>2</b>  |           | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> |



# Структура НН-метрики для $\mathbb{I}^n$ .

- $H(k,m)$ -минор матрицы парных НН-расстояний, содержит все расстояния между  $k$ - и  $m$ -размерными кубантами.
- $r = [r_1, r_2]$ -диапазон значений НН-расстояний.  $r_1, r_2$ -целые;  $r_1 \leq r_2$ .

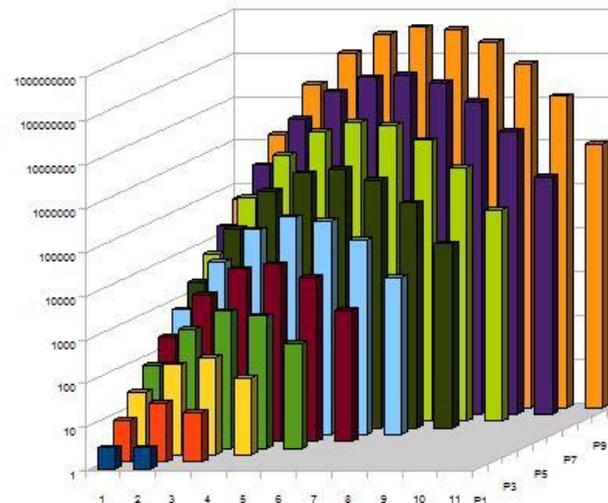
|     | 0  | 1  | ... | n-2   | n-1   | n   |
|-----|--|--|-----|---|---|-----|
| 0   | $\begin{matrix} 0 & H(0,0) \\ \dots & [0,n] \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(0,1) \\ r=[1,n] \end{matrix}$                  |     | $\begin{matrix} H(0,n-2) \\ r=[n-2,n] \end{matrix}$             | $\begin{matrix} H(0,n-1) \\ r=[n-1,n] \end{matrix}$             | n   |
| 1   |  | $\begin{matrix} 0 & H(1,1) \\ \dots & [0,n-1] \\ 0 \end{matrix}$ | ... | $\begin{matrix} H(1,n-2) \\ r=[n-3,n-1] \end{matrix}$           | $\begin{matrix} H(1,n-1) \\ r=[n-2,n-1] \end{matrix}$           | n-1 |
| ... |  |  | ... |   |   |     |
| n-2 |  |  |     | $\begin{matrix} 0 & H(n-2,n-2) \\ \dots & r=[0,2] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(n-2,n-1) \\ r=[1,2] \end{matrix}$             | 2   |
| n-1 |  |  |     |   | $\begin{matrix} 0 & H(n-1,n-1) \\ \dots & r=[0,1] \end{matrix}$ | 1   |
| n   |  |  |     |   |   | 0   |

симметрия

# Распределение НН-расстояний между кубантами для $\mathbb{I}^2$ - $\mathbb{I}^{10}$ .

- Таблица  $M(r,n)$ -число пар кубантов в  $\mathbb{I}^n$  с  $r_{\text{HH}}=r$ ;
- $M(0,n)=3^n$ ;
- $M(n,n)=4^n-2^{n-1}$ ;
- Гистограмма по вертикали-в логарифм. масштабе.
- Горизонталь-почти симметрия.

|    | $r_{\text{HH}}(n)$ |         |          |           |           |           |           |           |          |          |         |
|----|--------------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|---------|
|    | 0                  | 1       | 2        | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8        | 9        | 10      |
| 1  | 3                  |         |          |           |           |           |           |           |          |          |         |
| 2  | 9                  | 22      | 14       |           |           |           |           |           |          |          |         |
| 3  | 27                 | 117     | 174      | 60        |           |           |           |           |          |          |         |
| 4  | 81                 | 540     | 1380     | 1072      | 248       |           |           |           |          |          |         |
| 5  | 243                | 2295    | 8820     | 11480     | 5800      | 1008      |           |           |          |          |         |
| 6  | 729                | 9234    | 49410    | 94960     | 78600     | 29088     | 4064      |           |          |          |         |
| 7  | 2187               | 35721   | 252882   | 667380    | 802200    | 476784    | 139104    | 16320     |          |          |         |
| 8  | 6561               | 134136  | 1211112  | 4183200   | 6818000   | 5794432   | 2669184   | 644608    | 65408    |          |         |
| 9  | 19683              | 492075  | 5511240  | 24068016  | 50836464  | 57881376  | 37591680  | 14135040  | 2922624  | 261888   |         |
| 10 | 59049              | 1771470 | 24078870 | 129509280 | 343148400 | 501544512 | 431417280 | 225876480 | 71925120 | 13043200 | 1048064 |



# Расширение матрицы парных произведений кубантов.

- Дополнение элементов матрицы парных произведений значениями НН-расстояний ( $/\rho_{\text{НН}}$ ) между кубантами.
- В расширенном виде матрица содержит полную топологическую и НН-метрическую картину множества кубантов ( в т.ч. НН-диаметр множества, исходные данные для построения НН-кратчайшего связывающего дерева и т.д.)
- Ранее приведенный пример  $M_{pp}$  с расширением приведен ниже.

D1=112202; D2=121122; D3=122211; D4=120122; D5=002212;

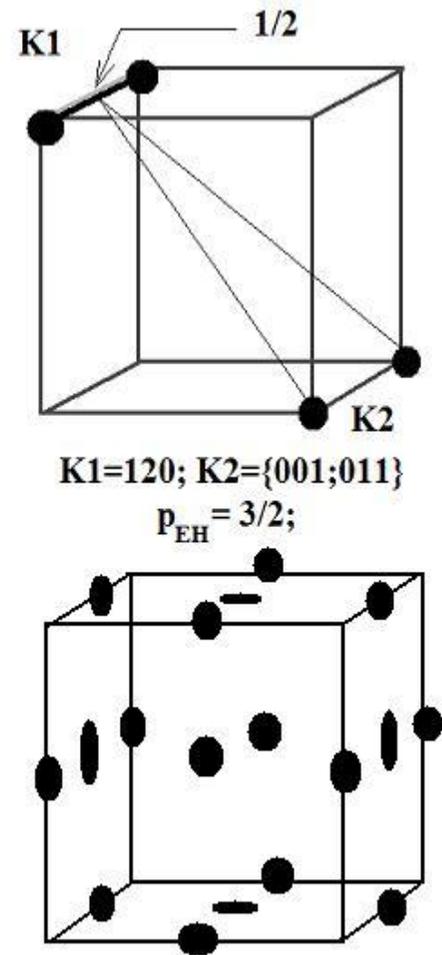
|           |          |          |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|           | 112202/0 | 111102/2 | 1112Ø1/2 | 110102/2 | ØØ22Ø2/3 |
|           |          | 121122/0 | 121111/2 | 12Ø122/1 | Ø01112/3 |
|           |          |          | 122211/0 | 120111/2 | Ø02211/2 |
| симметрия |          |          |          | 120122/0 | Ø00112/3 |
|           |          |          |          |          | 002212/0 |

# Часть 3. Подмножества кубантов в $\mathbb{I}^n$ .

- Булеан n-кубантов-множество всех двоичных m-разрядных кодов при  $m=3^n$ ;
- Каждому кубанту соответствует номер в размерно-лексикографически упорядоченной последовательности троичных n-разрядных кодов, этот номер равен номеру разряда в булеане, если данный кубант входит в рассматриваемое подмножество.
- Каждое подмножество кубантов  $\square$  двоичное слово в булеане.
- 000,001,010,...,022,122,220,221,222.
- 1 2 3 23 24 25 26 27
- 002,122  $\square$  0001000000000000000000000000100;
- 001,022  $\square$  000100000000000000000000000000;-поглощение кубанта 001 кубантом 022.
- После поглощений число различных подмножеств
- $< 2^m; m=3^n$ ;
- Для  $n=2$ ;  $\square m=9; |B|=512; |B^*|=47$ ; число всех пар подмножеств:
- **2209 < 262144**

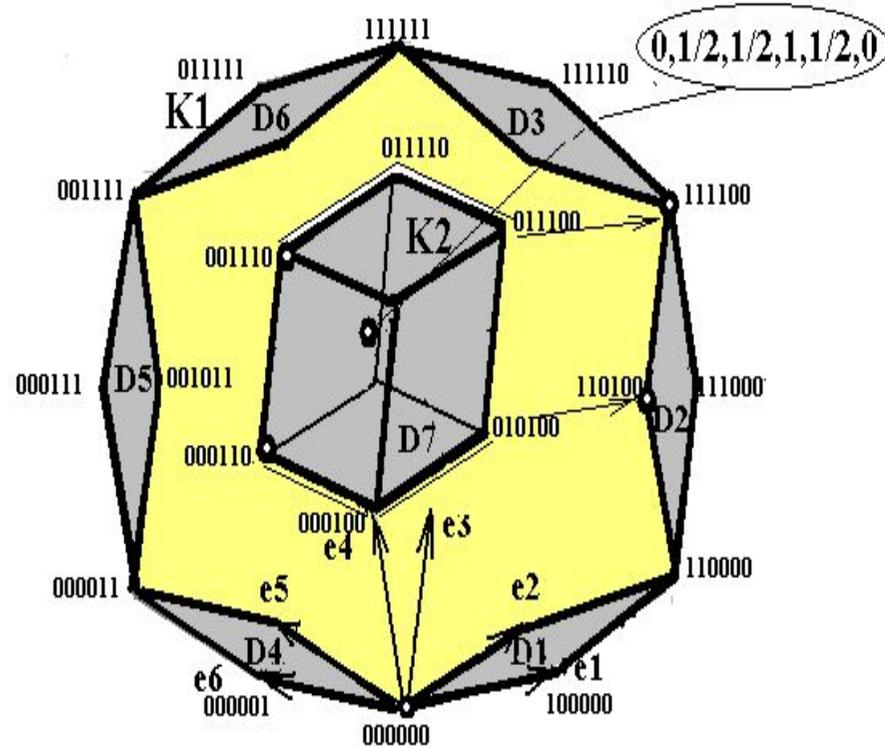
# Особенности хаусдорфовой метрики на подмножествах кубантов.

- Необходимость перехода к евклидовой метрике.  $\square$
- Добавление к вершинам (целым точкам) «полуцелых» точек для каждой грани (кубанта).
- $2\ 1\ 0 \square 1/2\ 1\ 0;$   $\square$



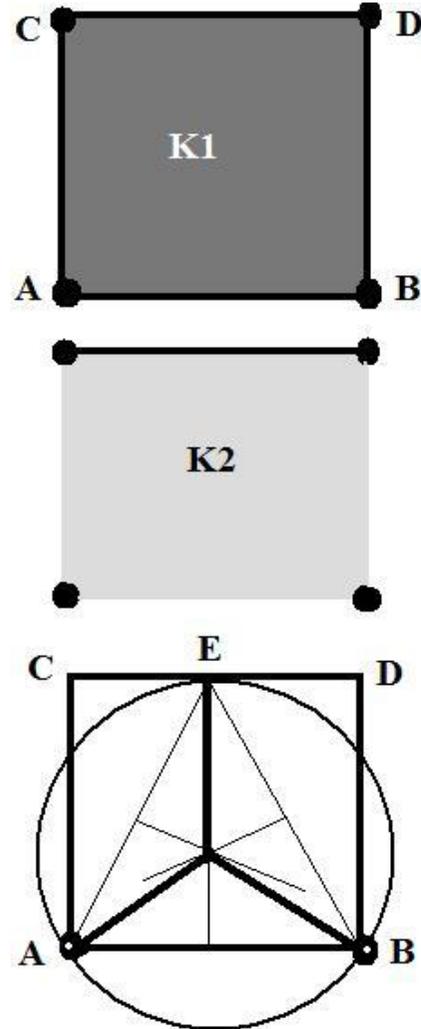
# Соотношения между $\rho_{HH}$ и $\rho_{EH}$ в $\mathbb{I}^n$ .

- Кубанты:  $D1=220000$ ;  
 $D2=112200$ ;  $D3=111122$ ;  
 $D4=000022$ ;  $D5=002211$ ;  
 $D6=221111$ ;  $D7=022120$ ;
- $\rho_{HH}(D_i, D_7)=3$ ;  
 $\rho_{EH}(D_i, D_7)=\sqrt{3}$ ;  $i=1-6$ ;
- Подмножества:
- $K1=\{D1, D2, \dots, D6\}$ ;  
 $K2=\{D7\}$ ;
- $\rho_{EH}(K1, K2)=\sqrt{7/2}$ ;
- Мах равноудаленная точка имеет нецелочисленные координаты, т.е. нецелая.



# Вычисление равноудаленных точек в комплексах из кубантов разной размерности .

- Мах равноудаленная точка – в множестве пересечений прямых, ортогональных к кубантам другого комплекса в общей для комплексов выпуклой оболочке. Точка и инцидентное ребро считаются ортогональными.
- Для  $I^2$  – построение отрезков прямых и окружностей с доп. условиями (см. пример).
- $K1=\{22\}; K2=\{12;00;01\}$ ;
- Окружность касается ребра CD(кубант 12) и проходит через точки A(кубант 00) и B(кубант 01)
- Из приведенного построения  $\rho_{EH}(K1, K2)=5/8$ ;
- Для  $I^3$  окружности заменяются сферами.



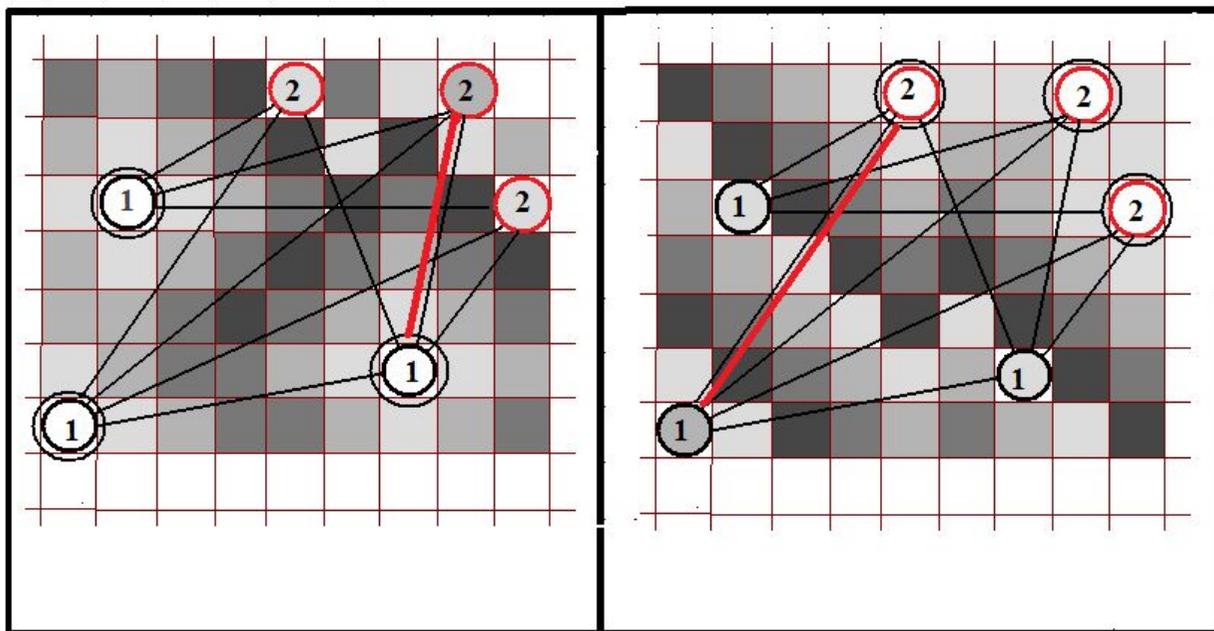
# К вычислению полной матрицы $\rho_{EH}$ всех пар комплексов $\mathbb{I}^n$

- Среди множества всех подмножеств кубантов возможны «поглощения»: так код в булеане (для  $\mathbb{I}^3$ )  $00\dots100000001 \sqsupset 00\dots100000000$ , т.к. кубант  $002$  содержит вершину  $000$ .
- Возможность сокращения общего числа ( $2^{3^n}$ ) комплексов за счет «поглощения» кубантов меньшей размерности не приводит к принципиальному результату. Так для  $\mathbb{I}^3$  общее число комплексов  $2^{27}$  (точнее  $2^{26}+1$ ) за счет поглощения сводится к  $\sim 2^{25}$ .
- Оценка возможности полных вычислений для  $\mathbb{I}^3 \sqsupset 2^{52} \sim 4 \cdot 10^{15}$ . Задача для суперкомпьютера.

# Два метода вычисления $\rho_{EH}$ для двух множеств целых точек в $\mathbf{R}^3$ .

- Волновой алгоритм на  $\{\mathbf{Z}^3, \mathbf{V}^3\}$ , где  $\mathbf{V}^3$ - множество простых (примитивных) ребер, не содержащих внутренних целых точек. (Отображения целочисленных множеств и евклидовы приближения. 2007). Учет невыпуклости пространства, приближение к E-метрике (длина ломаной на простых ребрах)- приближенное значение хаусдорфова расстояния.
- Алгебраический метод на основе свойств моноида. Точная E-метрика, пространство-выпуклое. (2009).

# Сравнение двух методов для мн-ств $\mathbb{Z}^n$ .



- Волна от мн-ва 1 до последней (по шагам) точки мн-ва 2 –  $p(2,1) = \max \min(2 \square 1)$ , от мн-ва 2 до п.т. мн-ва 1 –  $p(1,2) = \max \min(1 \square 2)$ ,  $p_{EH}(1,2) = \max\{p(2,1); p(1,2)\}$ .
- В примере с волной (окр.=2)  
 $p_{EH} \sim 7,3006$ ; (окр.=3)  $\sim 7,2110$ ;
- точ.  $p_{EH}(1,2) = 2\sqrt{13} \sim 7,2110$ ;

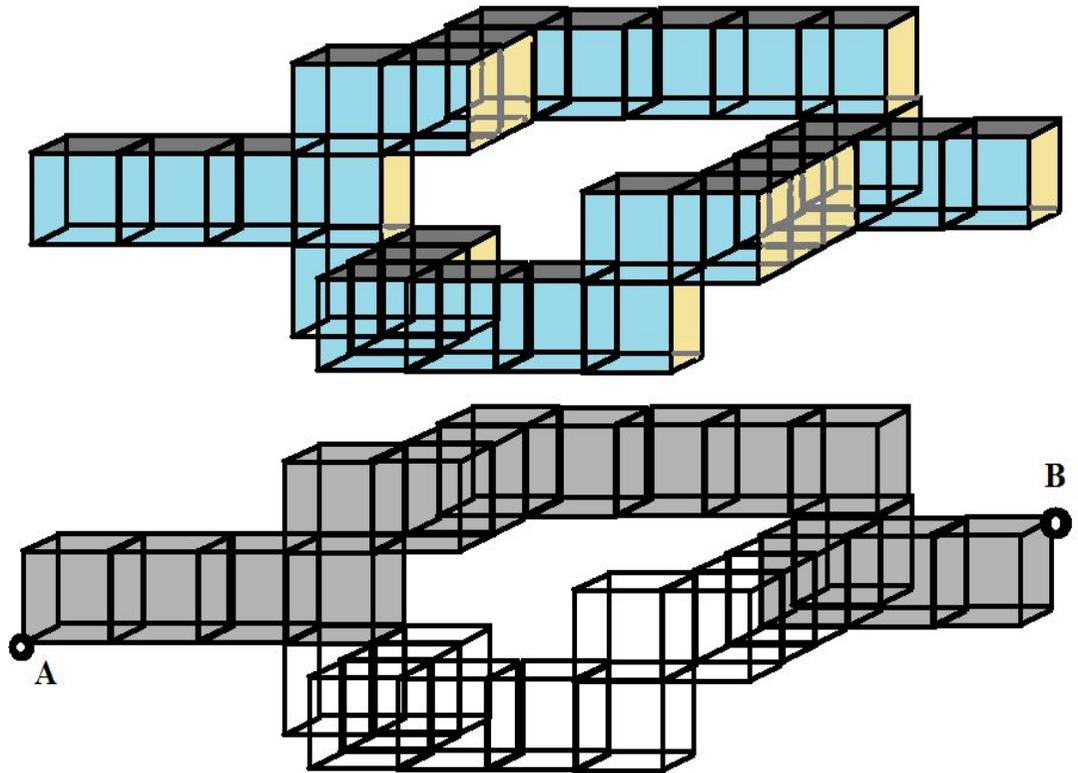
# Часть 4. О подходе к задачам синтеза на кубантах

- Формирование в  $\mathbf{R}^n_c$  (с множеством вершин в  $\mathbf{Z}^n$ ) конечного множества  $S$  комплексов кубантов  $K_1, K_2, \dots, K_m$  с заданными топологическими и метрическими условиями, а также на мощности множества  $S$  и комплексов кубантов.
- Формирование - представление, вычисление, преобразование, верификация.



# Примеры k-связности и k-пути.

- 2-связность комплекса кубантов.
- 3-путь минимальной длины из A в B внутри комплекса .  
Длина пути -16.



# Гамильтоновы циклы( $HC(n)$ ) на $I^n$ как циклы 1-кубантов.

- Представления гамильтонова цикла:

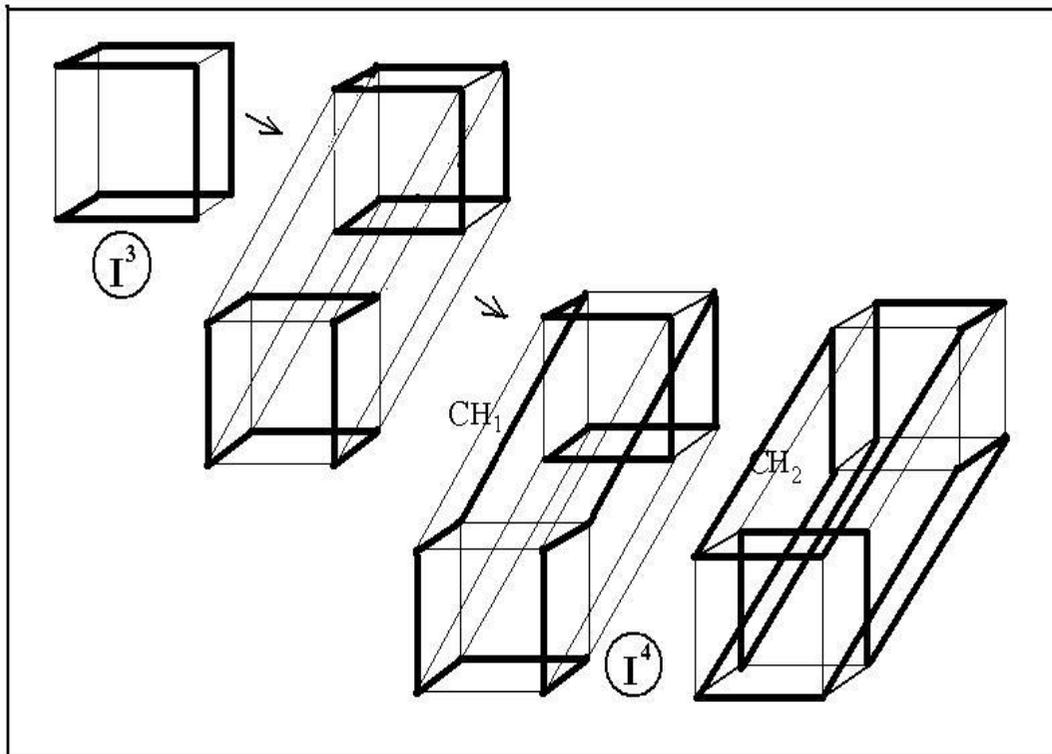
- Вершинное
- Реберное

- 000
- 001                      002
- 011                      021
- 010                      012
- 110                      210
- 111                      112
- 101                      121
- 100                      102
- 000                      200
- 002
- 

- В случае реберного представления гамильтонова цикла выполняются:
- $\Pi(D_i, D_{i+1}) = v_i; (v_i - \text{вершина } n\text{-куба})$
- $\omega(\Pi(D_i, D_{i+2})) = 1;$

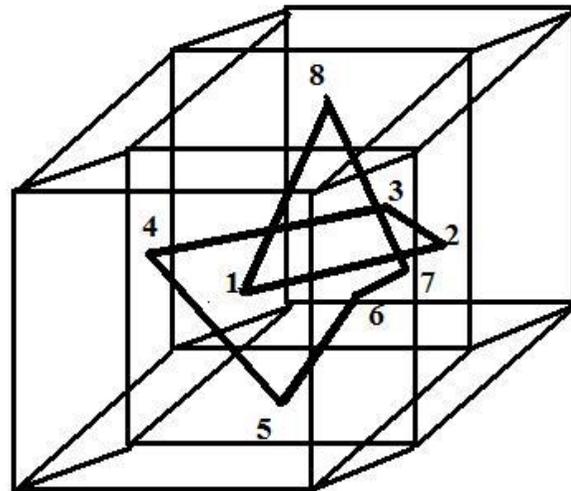
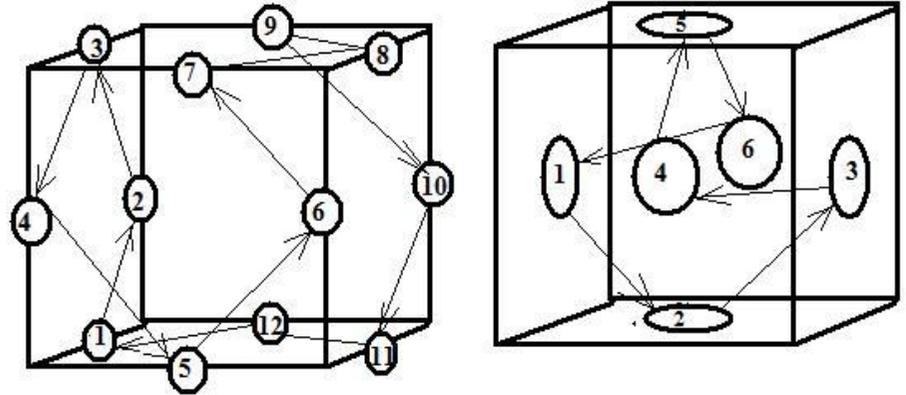
# Рекурсивная процедура генерации $HC(n) \square HC(n+1)$ .

- Склейка двух  $HC(n) \square HC(n+1)$ ;
- Склейка попарно двух ортогональных  $\square$  два ортогональных в следующей размерности.
- При  $n > 3$   $I^n$  содержит по крайней мере два орт.  $HC$ .
- Гипотеза:  $I^{2n}$  ( $n > 1$ ) содержит  $n$  орт.  $HC$



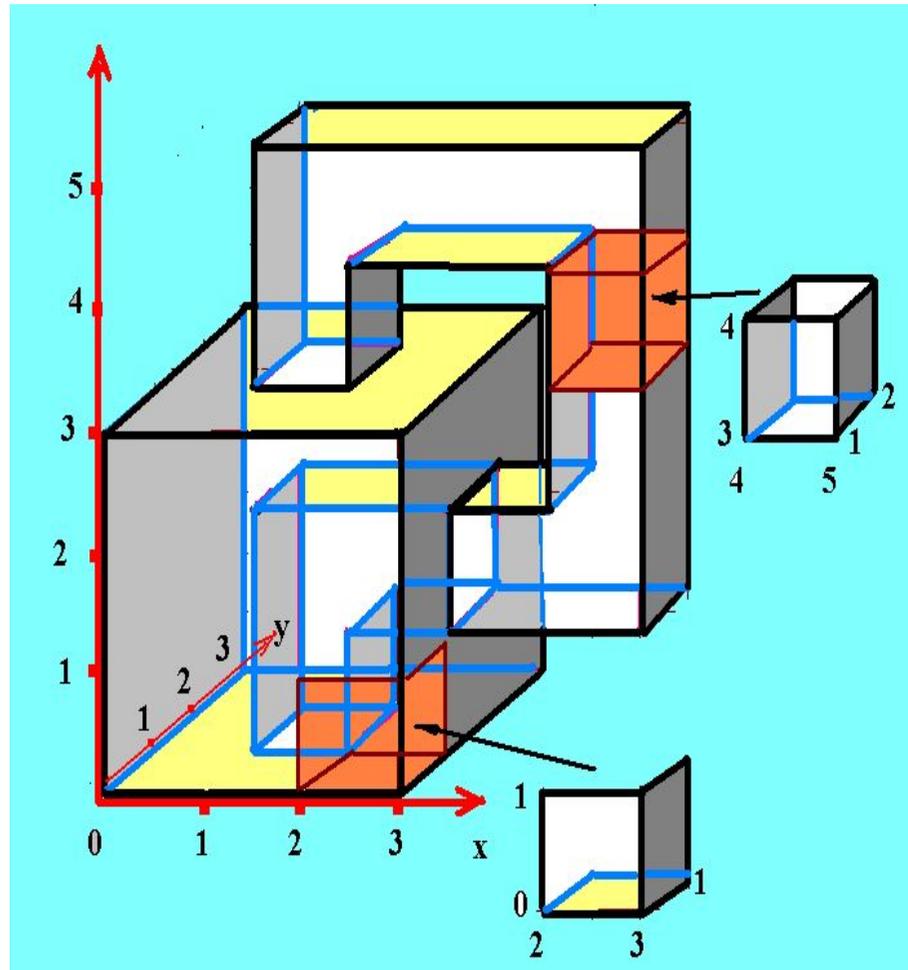
# Циклические пути с неповторяющимися кубантами.

- Обобщение гамильтонова цикла-цикл по всем  $k$ -кубантам на  $k+1$ -кубантах.
- Динамическая интерпретация пути- «шаги землемера» в смежную грань. В «распоре»-ребро, квадрат, куб и т. д. (кубанты).



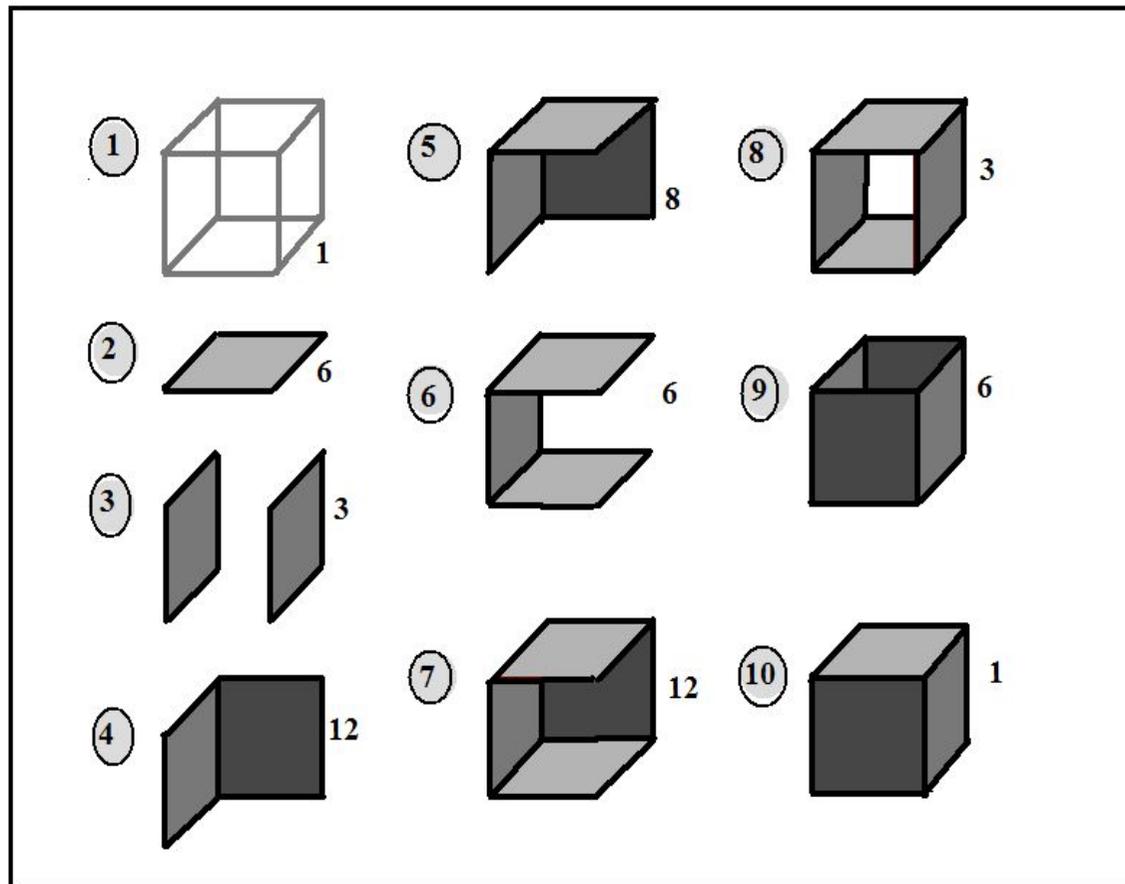
# Пример топологического «строительства»

- Кубическая бутылка Клейна из панелей-комплексов гиперграней.
- Нумерация всех комплексов гиперграней и правил их сборки.
- Отображение в памяти компьютера.



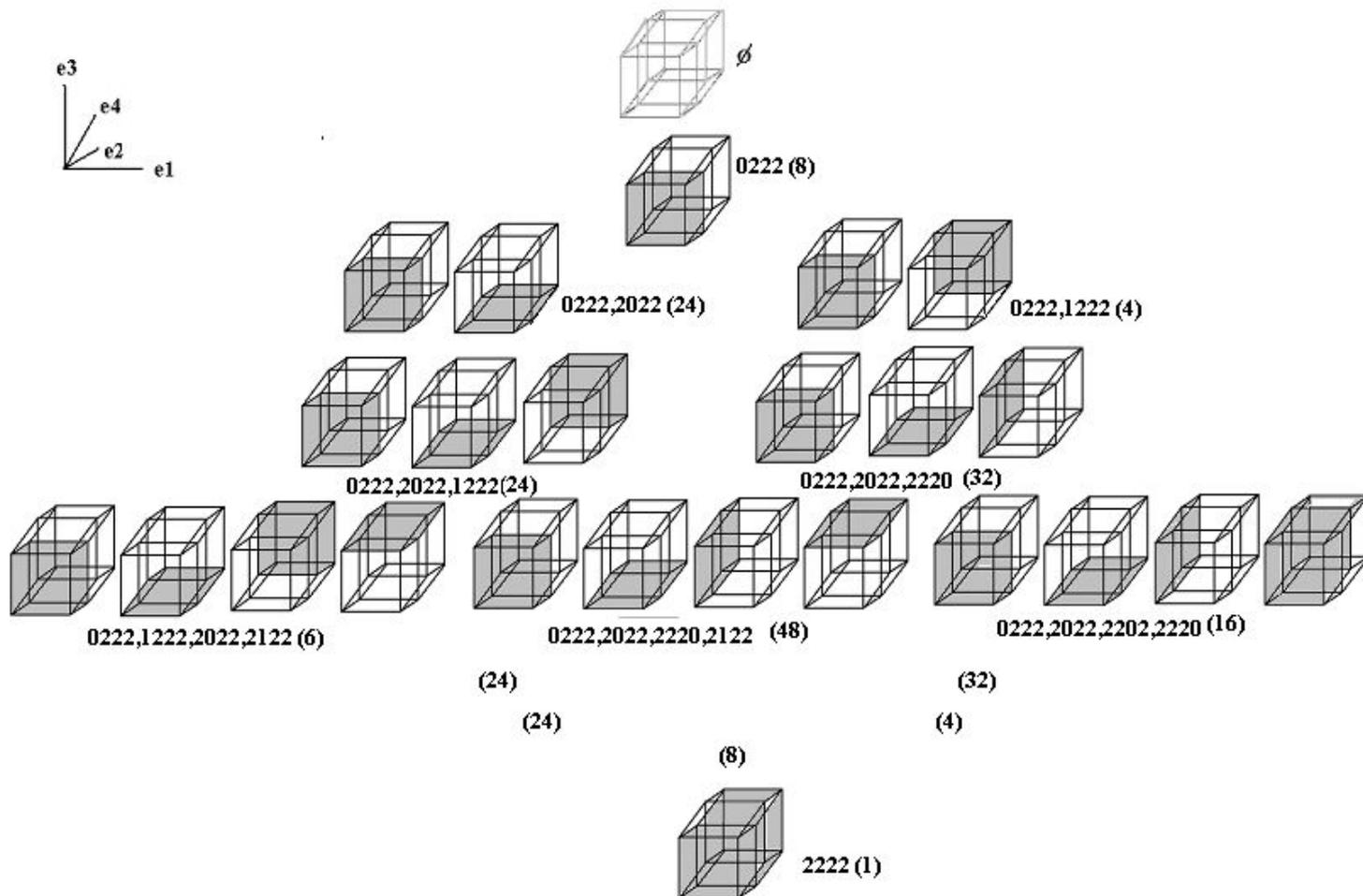
# Комплексы из гиперграней $\mathbb{I}^3$

- 10 типов не гомеоморфных комплексов из гиперграней.
- 64 типа различных по положению в  $\mathbb{I}^3$  (различны коды кубантов).



# Комплексы в $I^4$

## Все негомеоморфные типы комплексов гиперграней $I^4$ Раздельное изображение гиперграней комплексов



# Вычисление (построение) комплекса гиперграней в $I^n$

- Исходные данные: размер, структура, метрика.
- Выходные : Комплекс(ы) кубантов или пустое мн-во.
- Алгоритм вычисления с помощью таблицы возможностей.
- Пример из  $I^4$ : размер-4, цикл, число минимальных путей, отличных от 0 равно 2  $\square$  {0222;2202;1222;2212;}

| 0xxx | x0xx | xx0x | xxx0 | 1xxx | x1xx | xx1x | xxx1 | ΣП | (0/1) |
|------|------|------|------|------|------|------|------|----|-------|
| *    | *    |      |      | *    |      | *    |      | 1  | 2/2   |
| *    |      | *    |      | *    |      | *    |      | 2  | 2/2   |
|      | *    | *    |      | *    |      | *    |      | 1  | 2/2   |
|      | *    |      |      | *    |      | *    | *    | 0  | 1/3   |

## Часть 5. Элементы динамики в кубических структурах

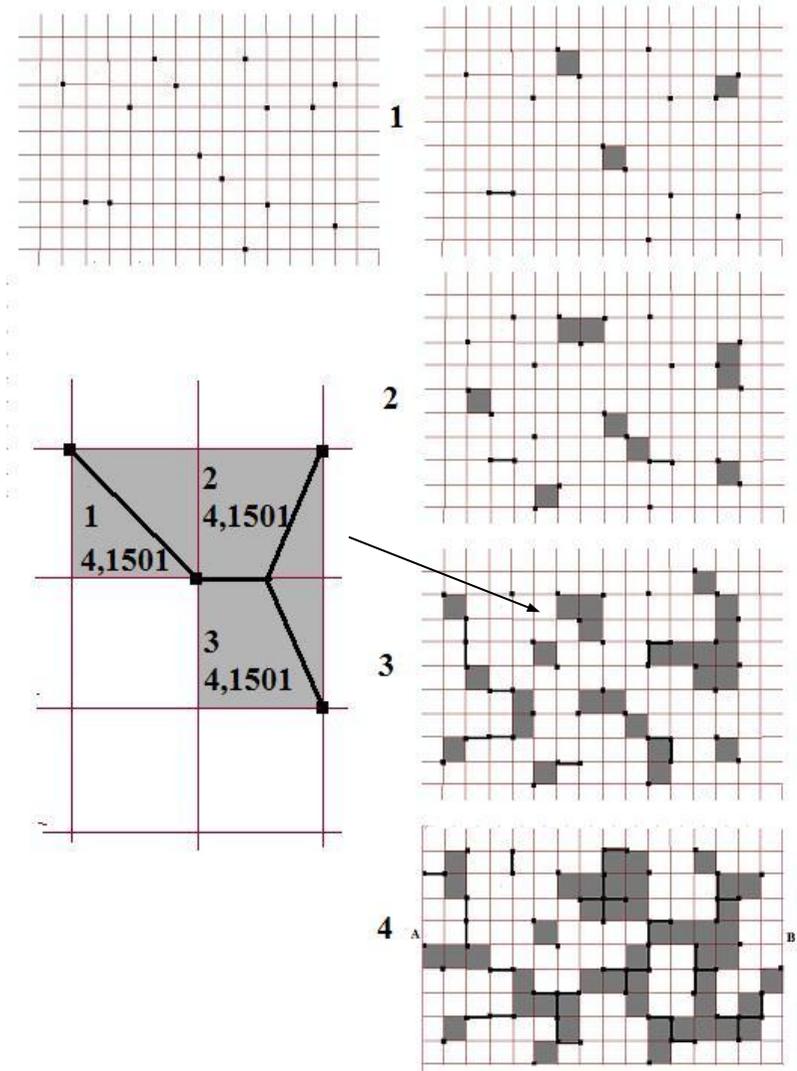
- Огромное число вариантов изменения структуры кубических комплексов (с сохранением  $k$ -связности между всеми подкомплексами или без, с сохранением общего числа кубантов или без и т.д.).
- Аналогии гомотопных преобразований. Изотропность и анизотропность преобразований. ( Минск2007 )
- Случайные преобразования-появление и исчезновение  $k$ -граней (кубантов) в  $n$ -мерных кубических комплексах. (Динамическая маркировка).

# Маркировка кубантов

- Маркировки целыми числами соответствуют конечным множествам определенных качеств в т.ч. наличию или отсутствию кубанта в комплексе в рассматриваемый момент, определенной раскраске в конечное число цветов, отражающих определенные свойства в зависимости от конечного множества состояний некоторого параллельного процесса или некоторых процессов.
- Маркировки вещественными числами отражают непосредственно численные результаты расчетов, связанных с рассматриваемой структурой и приписываемых данному элементу структуры (кубанту).

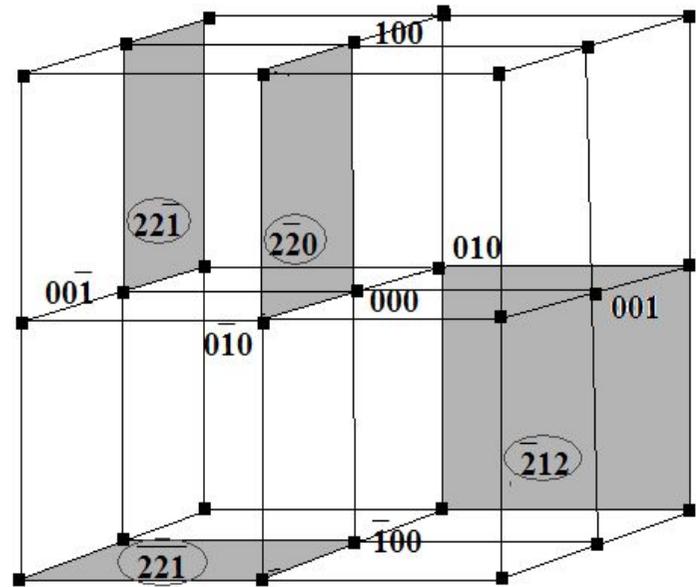
# Пример маркировки.

- Случайный процесс в дискретном времени бросания множества целых точек, образования в каждый момент на этом множестве выпуклых оболочек (операция над кубантами) и развития общей перколяционной ситуации.
- Маркировки каждого 2-кубанта-момент рождения  $(1, 2, \dots \in \mathbf{Z}_+)$ , длина ребер дерева Штейнера  $(L \in \mathbf{R}_+)$  для локального связного множества.



# Кодирование n-октантов, как расширение понятия кубанта

- Семиричный алфавит  $\{\emptyset, \emptyset^*, 0, 1, \bar{1}, 2, \bar{2}\}$  и множество n-октантов с одной общей целой точкой. («-» вынесен как надстрочный символ).
- Табличное задание бинарной операции умножения кубантов в  $\mathbf{O}^n$ . Коммутативна, но не ассоциативна.
- Моноид на семиричном алфавите  $\square$  сохранение метрических и топологических свойств представления кубантов.

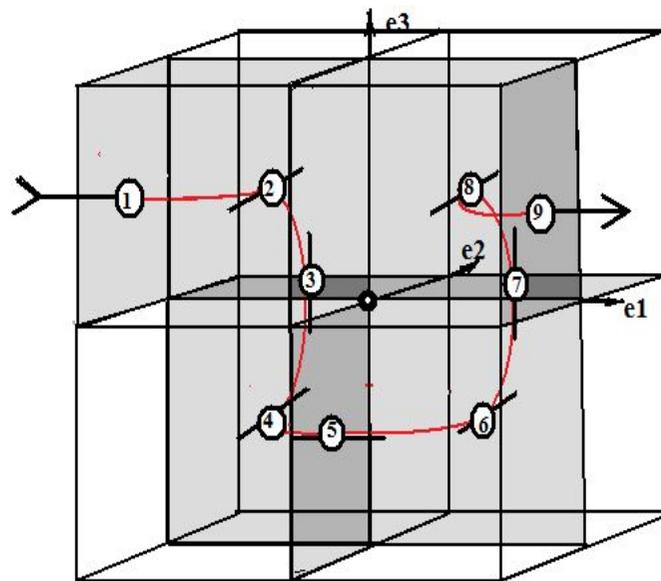


| П             | $\emptyset$ | $\emptyset^*$ | 0           | 1             | $\bar{1}$     | 2           | $\bar{2}$   |
|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|---------------|-------------|-------------|
| $\emptyset$   | $\emptyset$ | $\emptyset$   | $\emptyset$ | $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $\emptyset^*$ | $\emptyset$ | $\emptyset$   | $\emptyset$ | $\emptyset$   | $\emptyset$   | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 0             | $\emptyset$ | $\emptyset$   | 0           | $\emptyset$   | $\emptyset$   | 0           | 0           |
| 1             | $\emptyset$ | $\emptyset$   | $\emptyset$ | 1             | $\emptyset^*$ | 1           | $\emptyset$ |
| $\bar{1}$     | $\emptyset$ | $\emptyset$   | $\emptyset$ | $\emptyset^*$ | $\bar{1}$     | $\emptyset$ | $\bar{1}$   |
| 2             | $\emptyset$ | $\emptyset$   | 0           | 1             | $\emptyset$   | 2           | 0           |
| $\bar{2}$     | $\emptyset$ | $\emptyset$   | 0           | $\emptyset$   | $\bar{1}$     | 0           | $\bar{2}$   |

$\emptyset \rightarrow \min r = 1; \emptyset^* \rightarrow \min r = 2;$

# Октантная окрестность $\mathbb{O}^n$ целой точки и комплекс кубантов на ней

- Все  $n$ -октанты, имеющие общую вершину (целую точку) образуют  $n$ -октантную окрестность этой точки.
- Любой комплекс октантов на окрестности – по к.м.  $0$ -связный.
- Комплекс (рис)-1-связный.
- $22^*1^*$ ,  $202^*$ ,  $02^*2$ ,  $2^*02$ ,  $2^*2^*0$ ,  $2^*02$ ,  $022$ ,  $202$ ,  $212$  ( $2-2-1=22^*1^*$ )
- Последовательный обход через 3-октанты  
( $22^*2^*$ ,  $222^*$ ,  $2^*22^*$ ,  $2^*2^*2^*$ ,  $2^*2^*2$ ,  
 $2^*22$ ,  $22^*2$ ,  $222$ )-3-путь в  
«разрешенном комплексе коридоре».



# Матрица парных произведений кубантов в $\mathbb{O}^n$

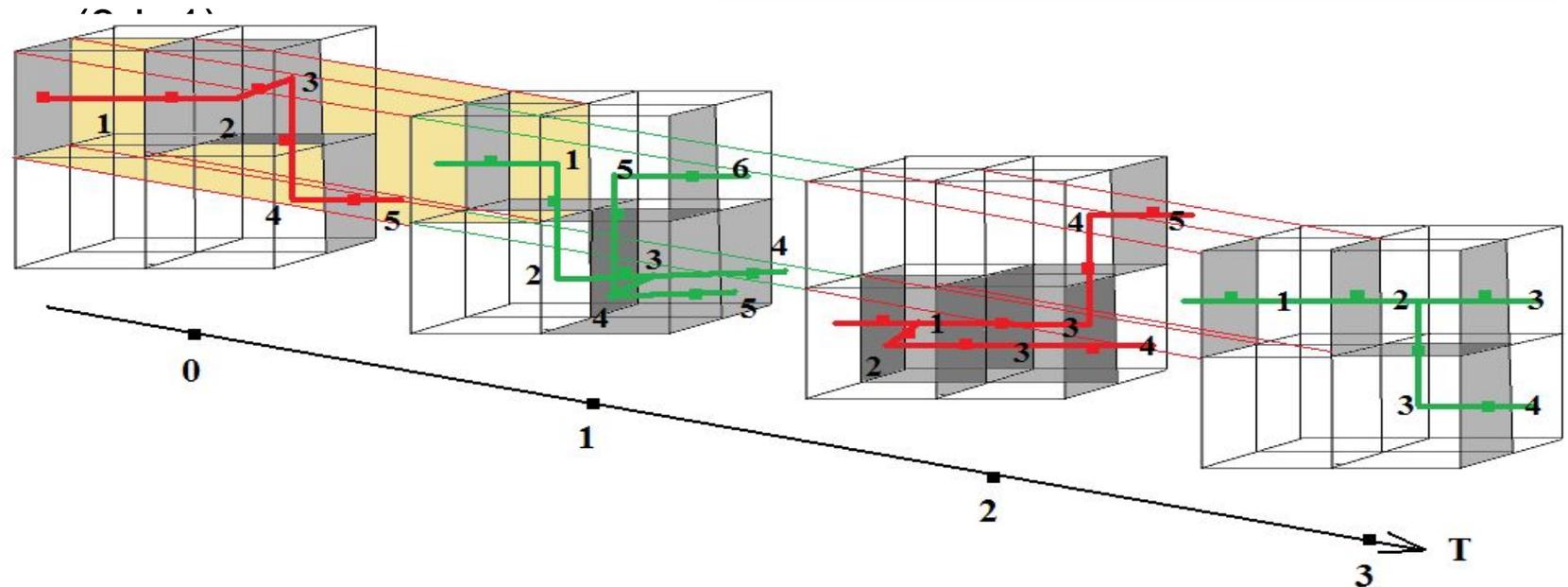
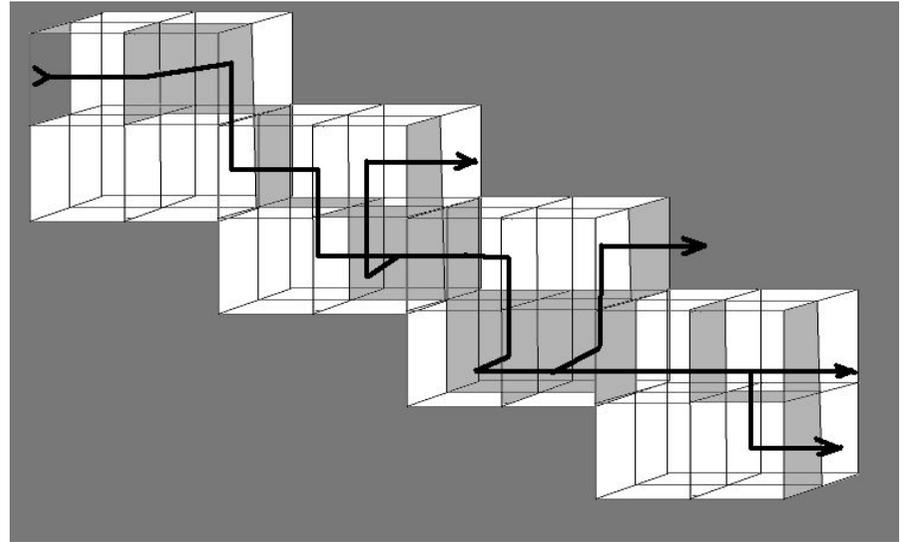
- Множество кубантов в  $\mathbb{O}^4$ :  $\{21^*22; 122^*2^*; 2^*212; 1^*2^*2^*2^*\}$ ; и матрица парных произведений (принятые обозначения  $-1=1^*$ ;  $-2=2^*$ ):

|   |          |                 |                          |                        |
|---|----------|-----------------|--------------------------|------------------------|
| • | $21^*22$ | $122^*2^*$      | $2^*212$                 | $1^*2^*2^*2^*$         |
| • | $21^*22$ | $1\emptyset 00$ | $0\emptyset 12$          | $\emptyset 1^*0\ 0$    |
| • |          | $122^*2^*$      | $\emptyset 2\emptyset 0$ | $\emptyset^*0\ 2^*2^*$ |
| • |          |                 | $2^*212$                 | $1^*\ 0\ \emptyset\ 0$ |
| • |          |                 |                          | $1^*2^*2^*2^*$         |

- Минимальные пути:  $\emptyset \square 1; \emptyset^* \square 2;$
- Множество-несвязное.

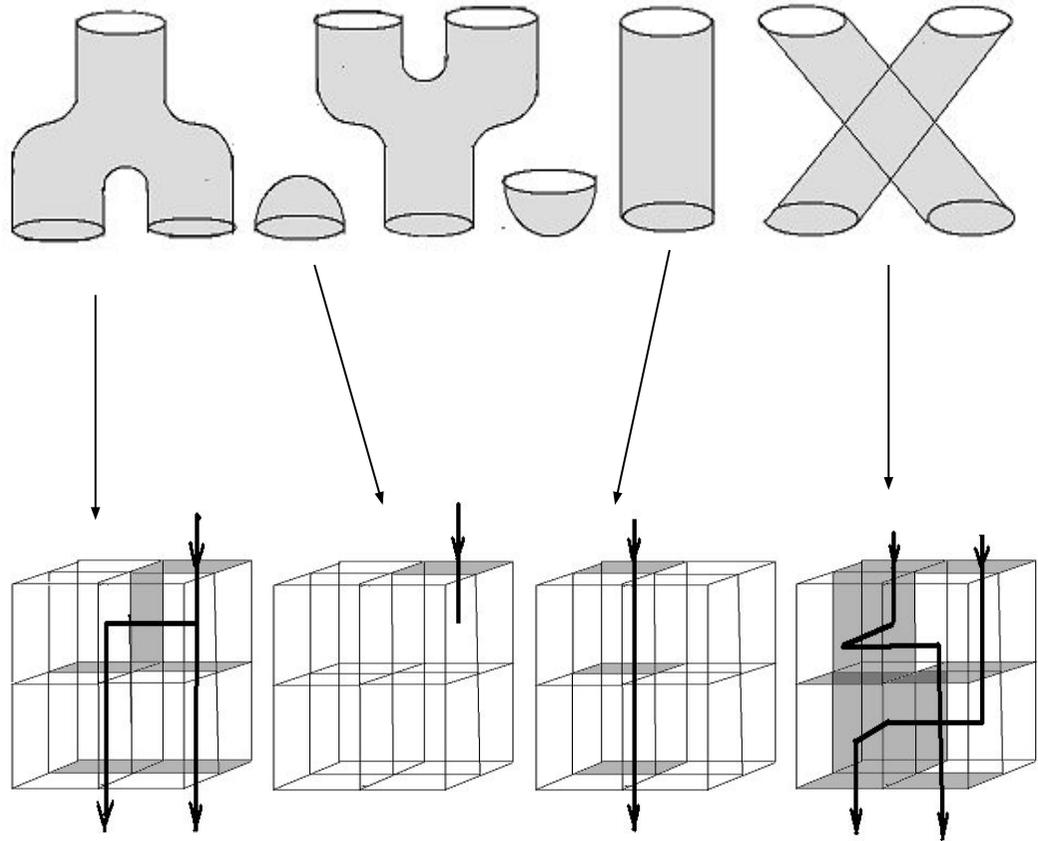
# 3-пути в октантных коридорах

- Полупрозрачные 2-грани открыты для прохода.
- Вариант древовидной структуры возможных 3-путей(3d).
- Изменения в октантных окрестностях в дискретном времени.



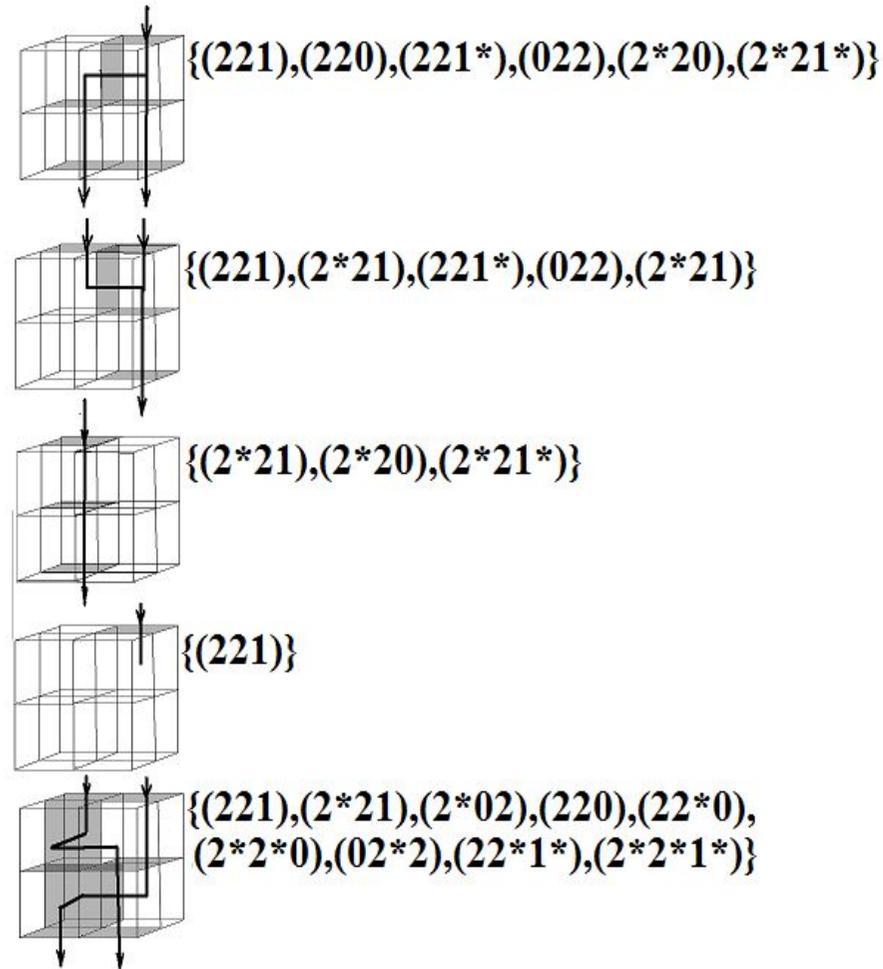
# Один из вариантов топологической интерпретации алгебры Фробениуса октантными структурами

- Методы алгебраической топологии в теоретической физике – наиболее активная область исследований. [9,13-15]
- Топологическое представление алгебры Фробениуса (АФ) наиболее полно дано А.Лаудой.[10]
- Общепринятые операторы АФ и октантные структуры. (рис)



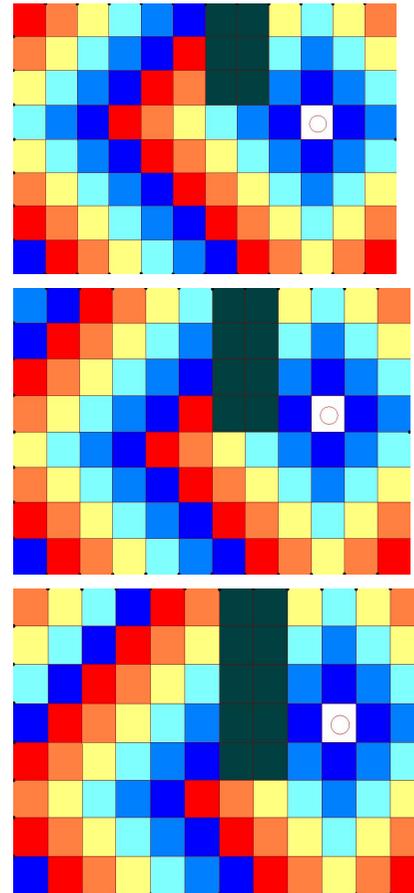
# Кодирование операторов через октантные структуры

- Оператор  $\square$  комплекс кубантов в  $\mathbf{O}^n(x_1, \dots, x_n)$ ;
- Ситуация на стыках вычисляется как произведение.
- Рис. пример кодирования в  $\mathbf{O}^3$ .



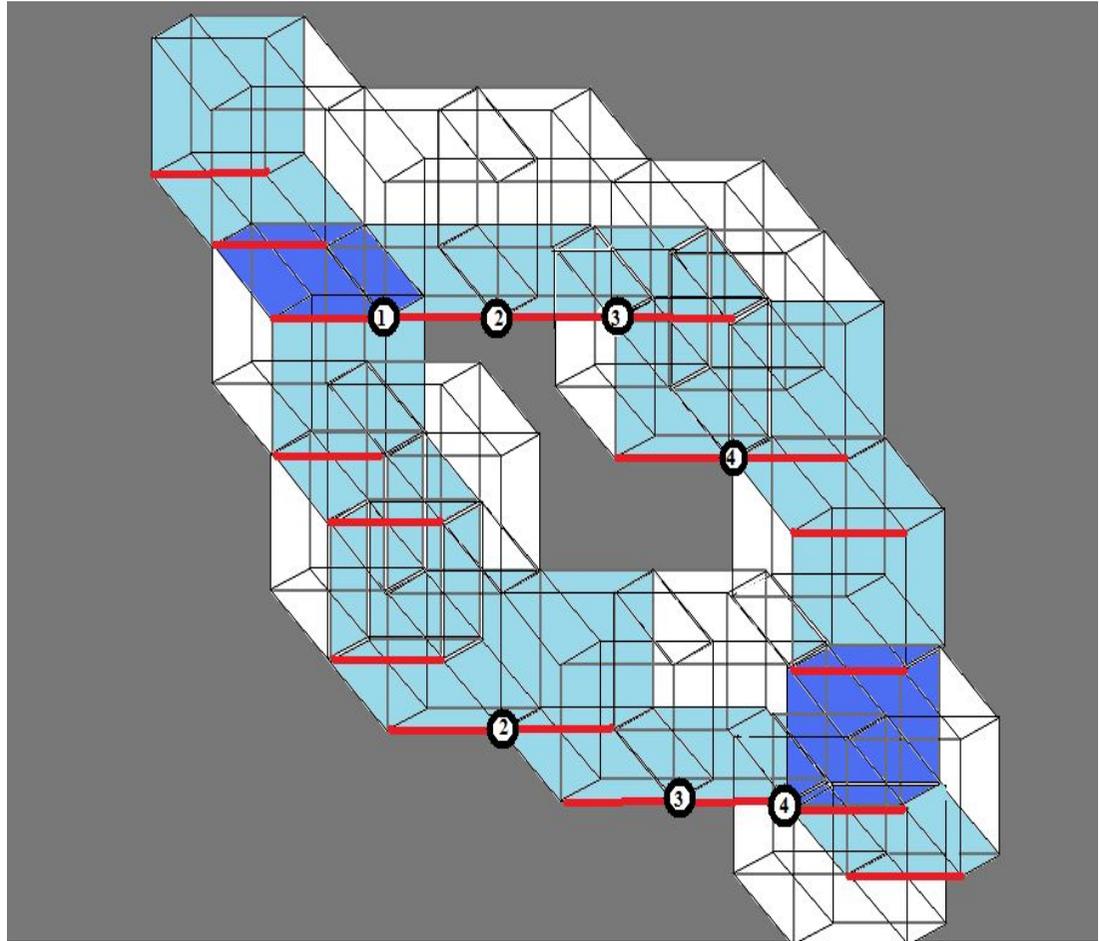
# Марковские процессы-перестройки кубантов и состояния $O^n$

- В  $\mathbf{R}^3$  общее число состояний  $O^3$  равно  $2^{36}$ , где 36-число 2-граней в  $O^3$ .
- Появление и исчезновение 2-граней – детерминированное или (и) случайное событие.
- Зависимость структуры ( радиус связности, род границы и др.) «большого» комплекса от процесса перестроек.
- Эргодичность процесса  $\square$   
обобщенная картина динамики.



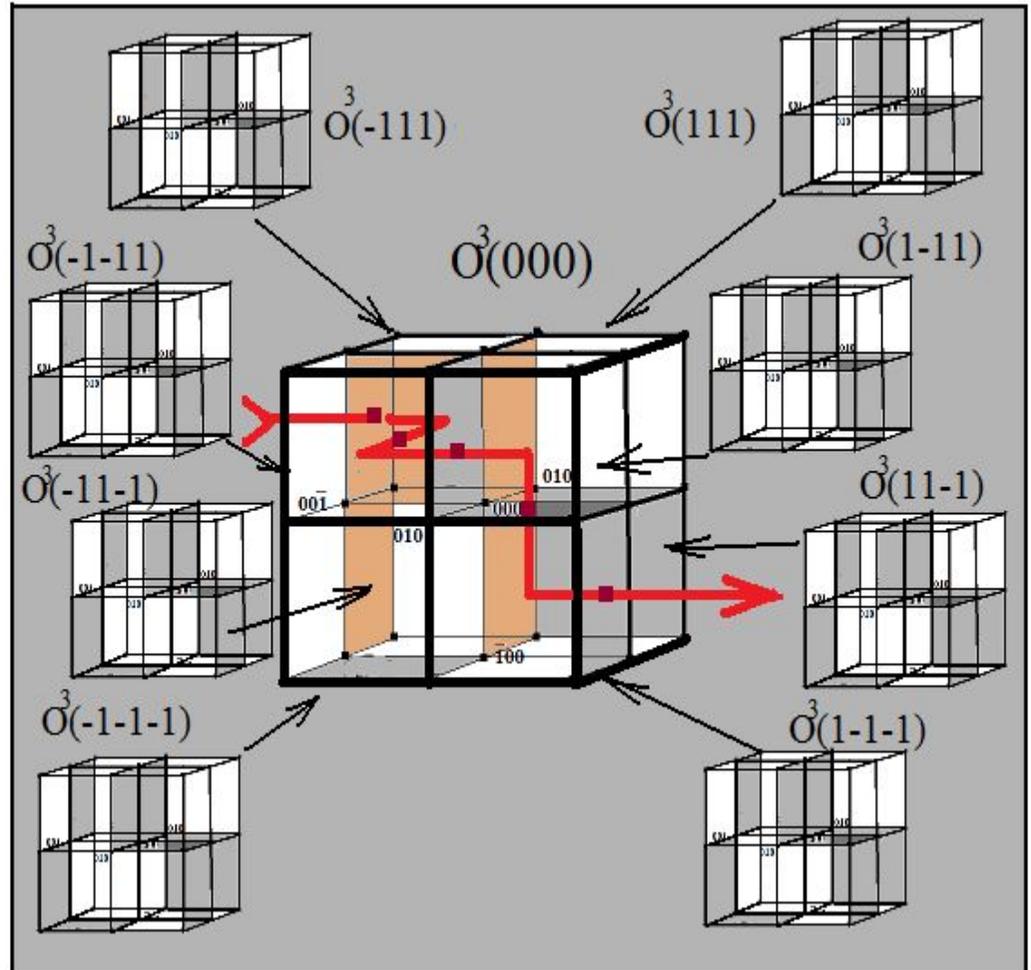
# 4d схема топологических коридоров в дискретном времени.

- Ось дискретного времени.
- Два различных 3-пути (коридора) за 4 дискретных момента времени.
- Условия допустимости (открытости соответствующих граней) для коридора не отображены.



# Генерация комплексов в $R^n_c$ .

- Склейка (join) комплексов из  $\mathbb{O}^n(x,y,z)$ .
- Самоподобие и появление новых свойств пространства.
- Пример  $R^3_c \square$  формирование самоподобной картины со свойством перколяции.
- Расчеты результирующей топологической картины и определение общих свойств связности  $\square$  операции над кубантами в октантах.



# Часть 6. Общие положения машинного представления и структуры данных

- Разработать и эффективно реализовать на суперкомпьютерах массивно-параллельной архитектуры (наиболее доступных отечественному пользователю) **инструментальную систему** обработки кубических структур на базе предложенной алгебры кубантов и октантов.
- В понятие эффективности здесь входят следующие составляющие – размерность пространства и число гиперкубических комплексов, сокращение времени решения задач за счет совмещения действий в одной операции и максимального распараллеливания обработки между многими процессорами суперкомпьютера.

# Машинное представление кубантов

- Машинное представление четверичного алфавита:
- $\emptyset \square 0; 0 \square 1; 1 \square 2; 2 \square 3$
- При двоичном представлении этого алфавита операция умножения кубантов совпадает с поразрядной (битовой) операцией логического умножения  $2n$ -разрядных двоичных слов.

- Машинное табличное представление умножения.

|             |   |   |   |   |
|-------------|---|---|---|---|
| • $\otimes$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| • 0         | 0 | 0 | 0 | 0 |
| • 1         | 0 | 1 | 0 | 1 |
| • 2         | 0 | 0 | 2 | 2 |
| • 3         | 0 | 1 | 2 | 3 |

# Машинное представление кубантов в $\mathbb{O}^n$

- Машинное табличное представление операции умножения
- Машинное представление семиричного алфавита:
  - $\emptyset \square 0; \emptyset^* \square 1; 0 \square 2;$   
 $1 \square 3; 2 \square 4; -1 \square 5;$   
 $-2 \square 6;$

| • x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| • 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| • 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| • 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| • 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| • 4 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | 2 |
| • 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 5 |
| • 6 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 5 | 6 |

# Основные структуры данных.

- Текстовый вид входных и выходных данных:
- $\{ [ ] ( ) ( ) \dots ( ) [ ] ( ) ( ) \dots \} \dots \{ \dots \} \square$
- $\{ \}$ -комплекс из n-кубов;
- $[ ]$ -координаты n-куба в составе комплекса;
- $( )$ -кубант в составе n-куба; Алфавит  $\{Z, 0, 1, 2\}$
- Основные структуры данных- набор классов.
- Класс «Куб» (координаты и набор кубантов) –реализация одномерный массив.
- Класс «Комплекс»(кубы в комплексе)-одномерный массив
- Реализация средствами библиотеки STL C++;
- Для кластерной реализации-представление кубанта как самостоятельного элемента: [идентификатор комплекса] [координаты n-куба] [кубант].

# Основные функции

- Уровень кубантов (для двух кубантов): умножение и H-сжатие.
- Уровень комплекса кубантов в n-кубе: вычисление матрицы парных произведений кубантов и следствий из нее-топологическая и HH-метрическая структура комплекса.
- Уровень комплекса из n-кубов: вычисление EH-расстояний между комплексами в  $R_n$ .
- Геометрические операции с n-мерными векторами-библиотеки Intel MKL, BLAS.

## Часть 7. Полиморфное кодирование и алгебраизация супервычислений.

- Супервычисления – это не только рациональные методы использования предельной по своей производительности аппаратуры и системного программного обеспечения суперкомпьютеров, но и лингвистическое (в том числе и математическое) представление данных и операций над этими данными, позволяющие создать алгоритмы нового уровня параллелизма и совмещения операций.
- Ниже рассматриваются аспекты предложенных методов с точки зрения их возможного влияния на архитектурные решения суперкомпьютеров и дальнейшего развития направления условно называемого «полиморфное кодирование и алгебраизация супервычислений».

# Некоторые обобщения

- Кубант обладает полиморфными свойствами:
- Четверичное  $n$ -разрядное слово.
- Представляет геометрический объект ( $n$ -мерный куб и его грани). Допускает рассмотрение как точка гиперметрического пространства с Хаусдорфовой метрикой (обобщение метрики Хэмминга для двоичных кодов).
- Представляет элемент топологических комплексов.
- Вместе с расширением (псевдокубанты) образует алгебраическую структуру (полугруппу с единицей-МОНОИД) относительно введенной операции умножения.
- Разряды слова с символом 2 можно рассматривать как обобщение  $q$ -битов (значения 0 и 1 и все действительные числа отрезка  $0,1$ ) и в целом кодирование как полуквантовое.[12]
- В машинном представлении кубант  $2n$ -разрядное двоичное число, к которому применим весь арсенал машинных операций.
- В целом эффективная масштабируемость (в размерности  $n$  пространства).

# Вычислительные особенности

- Выполнение основной операции (умножения) сводится к поразрядной операции логического умножения над  $2n$ -разрядных двоичных кодов практически неограниченной длины- поразрядное перемножение стрингов потенциально может быть реализовано за один машинный такт. Совмещенное вычисление данных о связности и длине кратчайшего пути между кубантами.
- Вычисление матрицы парных произведений (обобщение матрицы смежностей) для комплекса из  $m$  кубантов имеет сложность  $m^2$ .
- Вычисление Хаусдорфова расстояния между  $n$ -мерными кубантами вместо задачи экспоненциальной сложности  $2^n$  сводится к задаче сложности  $n$ .

## Вычислительные особенности для суперкомпьютеров кластерного типа

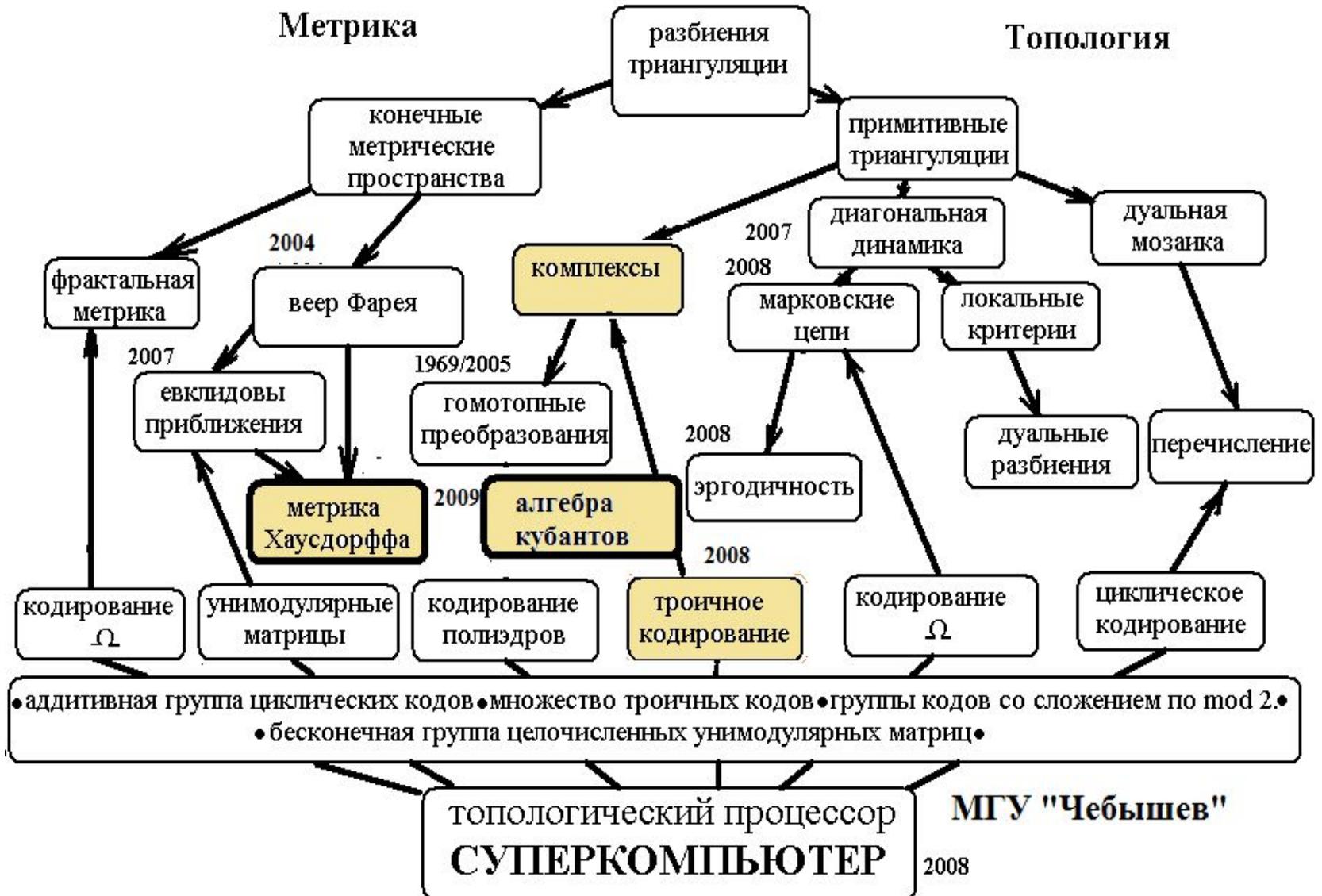
- Линейный характер увеличения длины слова кубанта от размерности пространства  $n$  и поразрядные операции над кубантами позволяют задать вопрос об оценке предельных возможностей современных кластерных суперкомпьютеров в задачах подобного класса и на ближайшую перспективу при условии сохранения общих тенденций развития их архитектур.
- В качестве самого упрощенного (начального) подхода рассмотрим первый этап в задаче анализа структуры  $M$  комплексов (каждый по  $m$  кубантов) в  $n$ -мерном пространстве – вычисление матриц парных произведений.

- Для оценок общих ресурсов по оперативной памяти и производительности необходимо учесть, что каждый кубант сопровождается значительным объемом данных во много раз превосходящий представление его геометрико-топологической структуры. Обработка этих данных на данном этапе не рассматривается, но в оценке объема оперативной памяти они участвуют. Будем считать, что их объем  $2^n v$ , где  $n$ - размерность пространства, а  $v$ -некоторая постоянная.
- Тогда грубая оценка оперативной памяти для хранения исходных данных в байтах  $Mm(2n/8)2^n v$  (при  $v=100$  байт  $\Sigma V_0 = 100Mm(n/4)2^n$  ; а выходных данных (матриц)  $\Sigma V_1 = Mm^2(n/4)$ ;
- Оценка общего числа операций для однократного вычисления всех  $M$  матриц парных произведений для комплексов из  $m$  кубантов  $Q = Mm^2(n/4)$ . При  $n=10$ ;  $M=10^3$ ;  $m=10^3$ ;
- $Q \sim 10^{10}$ ; (в настоящее время производительность нескольких процессоров)
- $Sv_0 \sim 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^{11} < 1$ Терабайт (в настоящее время память 500 микропроцессоров).
- При  $n=20$  и тех же  $M, m$  :  $Q \sim 10^{11}$ ;  $SV_0 \sim 1$  Петабайт (память 0,5 миллиона современных микропроцессоров).
- Т.о. следует ожидать, что проблемы оперативной памяти в этой области будут возрастать быстрее чем суммарного быстродействия.
- Если рассматривать только данные по структуре ( $SV_1$ ), то возможна обработка до  $n=100$ ;  $M=10^3$ ;  $m=10^4$ . Тогда  $Q \sim 10^{15} - 10^{16}$ ;  
 $SV_1 \sim 0,1$  Петабайт – **диапазон петафлопсной системы.**

# Часть 8. Инструментальный комплекс «Топологический процессор»

- Основная цель - разработать математическое и программное обеспечение для инструментальной системы, реализующей операции анализа и синтеза на многомерных кубических структурах, максимально используя методы совмещения и распараллеливания вычислений на архитектурах современных и перспективных **суперкомпьютеров.**
- Работы ведутся в НИВЦ МГУ с 2005 года. Программное обеспечение на C++.Графика OpenGL, VRML.
- Начало реализации на системе «Чебышев». («Волна» на решетке  $10^{10}$  )-2008г
- Основные публикации по теме за прошлые годы:
- Рябов Г.Г.Метрические и топологические волны на решетках.//Изд. НИВЦ МГУ.2005
- ----- Алгоритмические основы топологического процессора.// Труды МСО-2005.МГУ.
- Рябов Г.Г.,Серов В.А. Отображения целочисленных множеств и евклидовы приближения.//Выч. методы и программирование.2007
- Ryabov G.,Serov V. Simplicial-lattice model and metric-topological constructions.// Proc. IX PRIP-conference.Minsk.2007
- Рябов Г.Г.,Серов В.А. Компьютерные комбинаторно-топологические построения и их преобразования.//Информационные технологии и выч. системы.РАН.2008

# Схема работ по инструментальному комплексу «Топологический процессор».



# Текущие технические задачи

- Разработка набора макроопераций на основе алгебры кубантов для инструментальной системы «Топологический процессор», являющейся инструментом фундаментальных исследований в части построения примеров и контрпримеров с определенными свойствами.
- Программная реализация и верификация набора макроопераций «Алгебра кубантов» для суперкомпьютера МГУ «Чебышев».
- Полное документирование математического и программного обеспечения «Алгебры кубантов».
- Подготовка и выпуск методического пособия по «Алгебре кубантов».

# Текущие теоретические задачи

- Разработка вариантов организации структуры оперативной памяти кластерного суперкомпьютера для эффективной реализации алгоритмов на базе алгебры кубантов.
- Исследования видов полиморфного кодирования для симплициальных структур и совмещенных кубико-симплициальных структур.
- Разработка эффективных (с точки зрения машинной реализации) октантных структур и операций над ними для кодовой интерпретации алгебр Фробениуса.

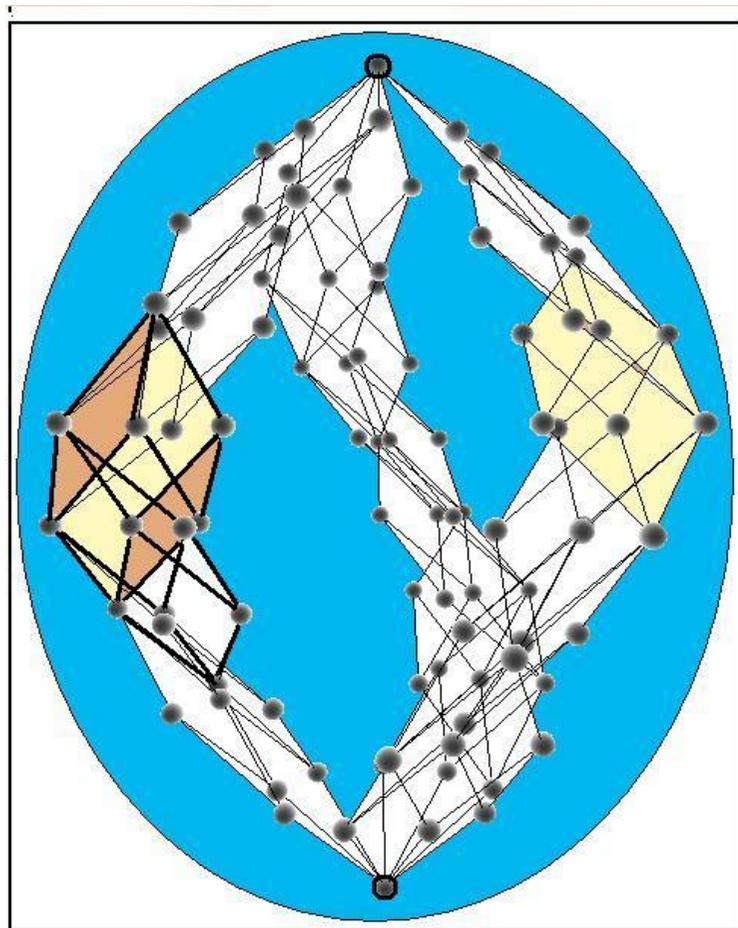
# Литература.

- 1.Новиков С.П. Топология. Москва-Ижевск.РХД.2002.
- 2.Долбилин Н.П.,Штанько М.А.,Штогрин М.И. Кубические многообразия в решетках.// Изв.РАН.Сер. матем.1994.**58**. вып.2.93-107
- 3.Деза М.,Штогрин М. Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки.// Успехи матем. наук.1997.52.№6.155-156.
- 4.Деза М.,Штогрин М. Мозаики и их изометрические вложения.// Изв. РАН.Сер. матем.2002.66.№3.3-22.
- 5.Бухштабер В.М. Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения.// Труды матем. Ин-та РАН.2008.263.18-43.
- 6.Кузнецов С.Д.,Кудрявцев Ю.А. Математическая модель OLAP-кубов. //Программирование.2009.№5
- 7.Pedersen T.B. Multidimensional databases.// Industrial Information Technology.Handbook. 2005.
- 8.Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes.// Bell system Tech.Journal. 1950.**29**(2) 147-160
- 9.Baez J.,Lauda A. A Prehistory of n-categorical Physics.// arXiv: 0908.2469.v1 [hep-th] 18 Aug 2009.
- 10.Lauda A. Frobenius algebras and planar open string topological field theories.// arXiv: math(0508.349 v1) [math QA] 18 Aug 2005.
- 11.Stanley R. Combinatoric and Commutative Algebra.// Birkhauser.1996
- 12.Manin Yu.I. Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm. // arXiv: quant-ph/9905008 v1. 2 March 1999.

- 13. Ambjorn J., Jurkevicz J., Loll R. The Universe from Scratch. // arXiv: hep-th/0509010 v3. 14 Oct 2006.
- 14. Coecke B., Quantum pictorialism. // arXiv:0908.1787v1[quant-ph] 13 Aug 2009.
- 15. Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Шпиз Г.Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход. Математ. заметки. **69**:5(2001),758-797
- 16. Ryabov G., Serov V., Simplicial-lattice model and metric-topological constructions. // Proc. of IX Conf. on Pattern Recognition and Inf. Processing. V2. Minsk.2007.135-140
- 17. Рябов Г.Г. О путевом кодировании k-граней в n-кубе. // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**.N1.20-22
- 18. ----- Марковские процессы в динамике примитивной триангуляции в пространствах  $R^3$  и  $R^4$ . // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**.N1,5-12
- 19. ----- О четверичном кодировании кубических структур. // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**.N2,154-161
- 20. ----- Хаусдорфова метрика на гранях n-куба. // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. (в печати).
- 21. ----- Алгебраическое представление кубических структур и супервычисления. // Сб. Программные системы и инструменты. ВМиК МГУ. 2009. №10, 12-26

# Приложение 1. Генерация комплексов кубантов внутри $I^n(O^n)$ .

- 1. Общие условия (ОУ) на множество комплексов.
- 2. Условия внутри комплексов. (УВК)
- 3. Условия между комплексами. (УМК)
- 4. Диагностика совместимости условий. (ДСУ)
- Рассмотрение на примере построения (вычисления) максимального числа непересекающихся минимальных (по длине) k-путей из одной вершины в другую n-мерного куба с максимальным разнесением их друг от друга.



# Неформальная постановка задачи

- Проложить максимальной число  $k$ -мерных непересекающихся тоннелей минимальной длины между двумя заданными вершинами  $n$ -куба на максимальном расстоянии друг от друга. (Кроме пересечения этих путей в начальной и конечной вершинах).

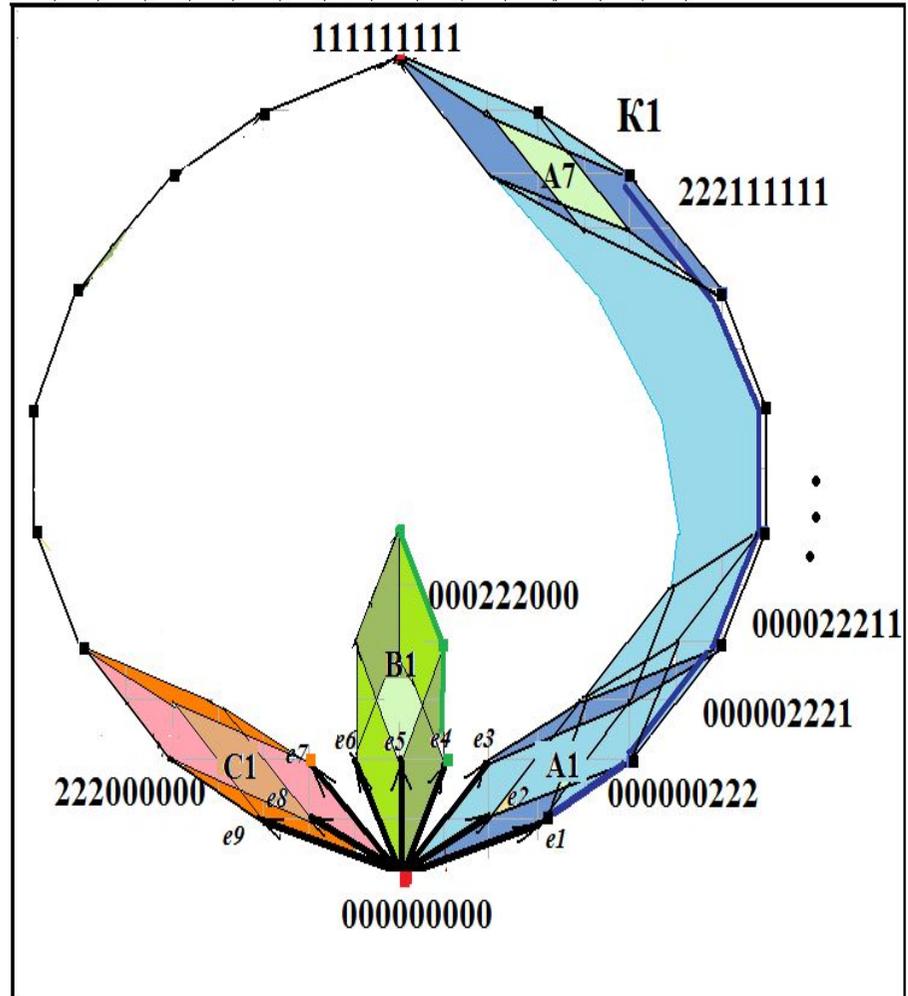
# Формальная постановка для $\mathbb{I}^9$ .

- Общие условия: размерность  $n=9$ ; заданы вершины  $D1=(00\dots 0)$  и  $D2=(11\dots 1)$ ; определить три  $k$ -пути (три множества кубантов)  
 $K1\{A1, A2, \dots, Am\}; K2\{B1, B2, \dots, Bm\}; K3\{C1, C2, \dots, Cm\}$   
размерности  $k=3$  в  $\mathbb{I}^9$  таких, что  $m$ - $\min$  и выполняются
- УВК:  $\dim\Pi(Ai, Ai+1)=2$ ;  $\dim\Pi(Bi, Bi+1)=2$ ;  $\dim\Pi(Ci, Ci+1)=2$ ;  
для  $i=1 \div m-1$ ;
- $\Pi(A1, D1)=D1$ ;  $\Pi(B1, D1)=D1$ ;  $\Pi(C1, D1)=D1$ ;
- $\Pi(Am, D2)=D2$ ;  $\Pi(Bm, D2)=D2$ ;  $\Pi(Cm, D2)=D2$ ;
- УМК:  $\Pi(Ai, Bi)=\emptyset$ ;  $\Pi(Ai, Ci)=\emptyset$ ;  $\Pi(Bi, Ci)=\emptyset$ ;  $i=1 \div m$ ;
- $\rho_{\text{HH}}(Ai, Bi)=\rho_{\text{HH}}(Ai, Ci)=\rho_{\text{HH}}(Bi, Ci)=\max; i=1 \div m$ ;
- Кратчайший путь по ребрам (1-путь) между  $D1$  и  $D2$  равен 9, по квадратным граням (2-путь) – 8, по кубическим граням (3-путь)-7. Отсюда  $m=7$ ;
- Общий вид  $Ai$  и  $Ai+1$   $\square$  002121210  
002121120  $\square$   $\Pi=002121110$   $\square$   $\dim \Pi=2$ ;

# К решению задачи

- Кубантный тензор-размер  $9 \times 7 \times 3$ , где 9-размерность куба, 7-длина кратчайшего пути, 3-число путей.
- Простейший вид матрицы  $9 \times 7$  (кубанты располагаются столбцом в лексикографическом порядке слов), выполняются УВК:

- $K1$
- 000000222
- 000002221
- 000022211
- 000222111
- 002221111
- 022211111
- 222111111

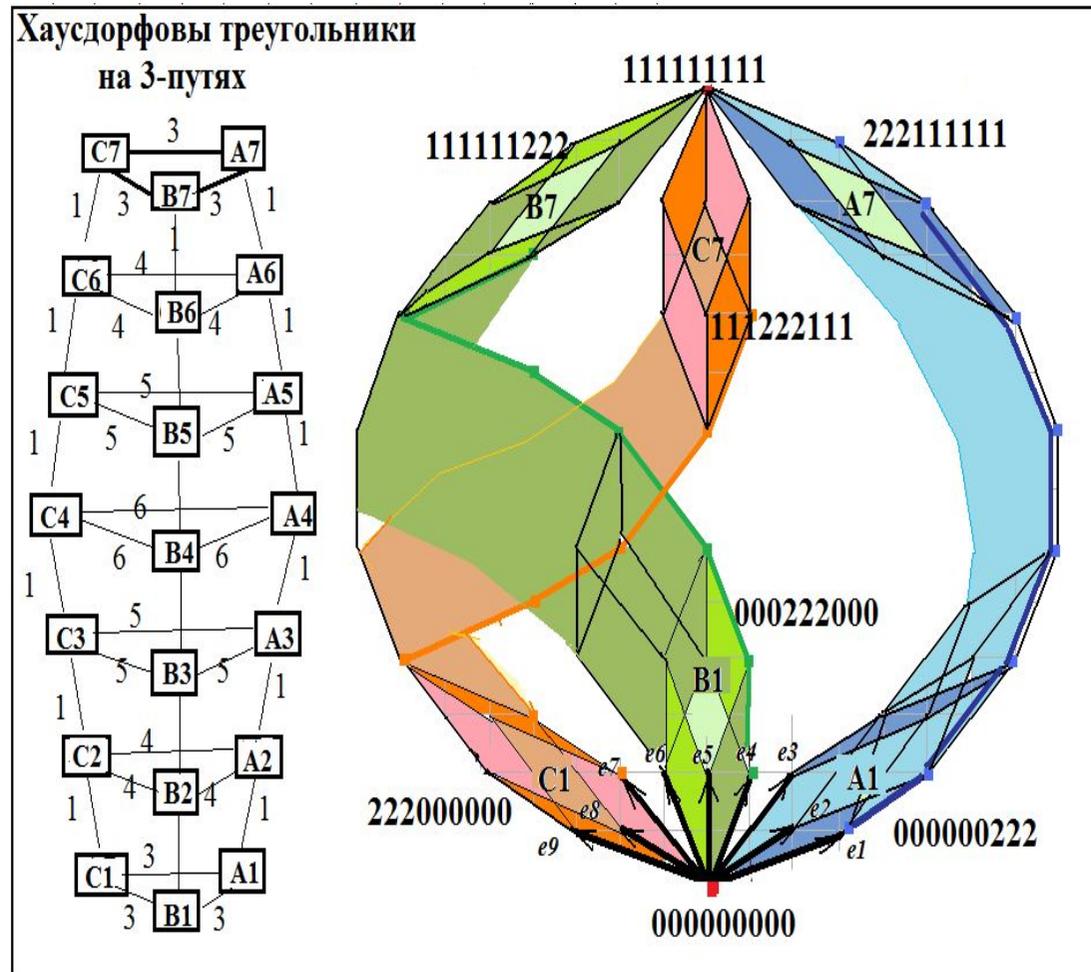


# К решению задачи

- Куб как объект с осевой (00...0,11...1) симметрией □ организация по той же схеме матриц K2 и K3 приводит к :
- K1                      K2                      K3
- 000000222      000222000      222000000
- 000002221      002221000      221000002
- 000022211      022211000      211000022
- 000222111      222111000      111000222
- 002221111      221111002      111002221
- 022211111      211111022      111022211
- 222111111      111111222      111222111
- Выполняются все условия поставленной задачи при любой одновременной перестановке столбцов в K1, K2, K3 (коммутативность умножения), кроме максимальной удаленности друг от друга.

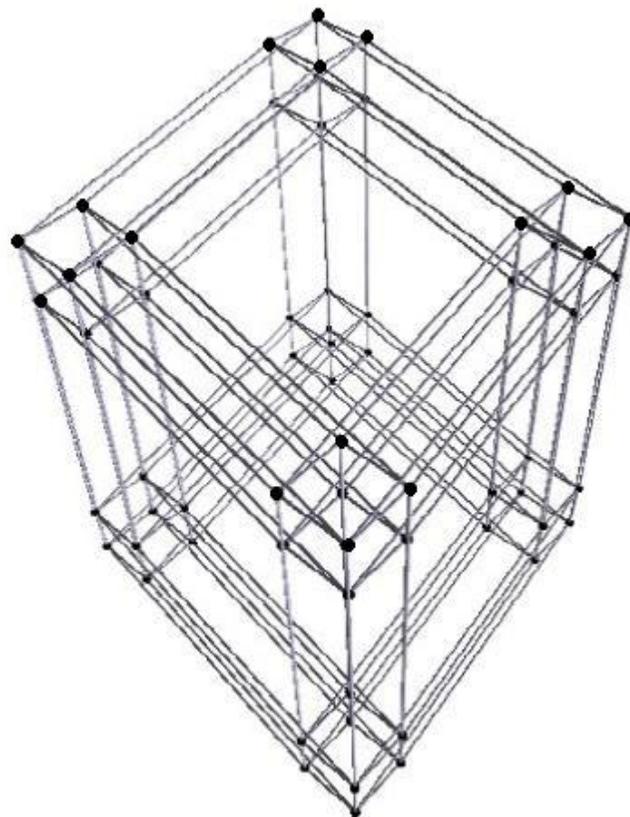
# Хаусдорфова метрика в рассматриваемой задаче.

- Операция Н-сжатия не коммутативна и перестановки столбцов в  $k$ -тензоре могут менять  $\rho_{HH}$  между кубантами в путях.
- На рис.слева показаны значения  $\rho_{HH}$  для вышеприведенного решения. Они максимальны для  $9!$  перестановок столбцов.



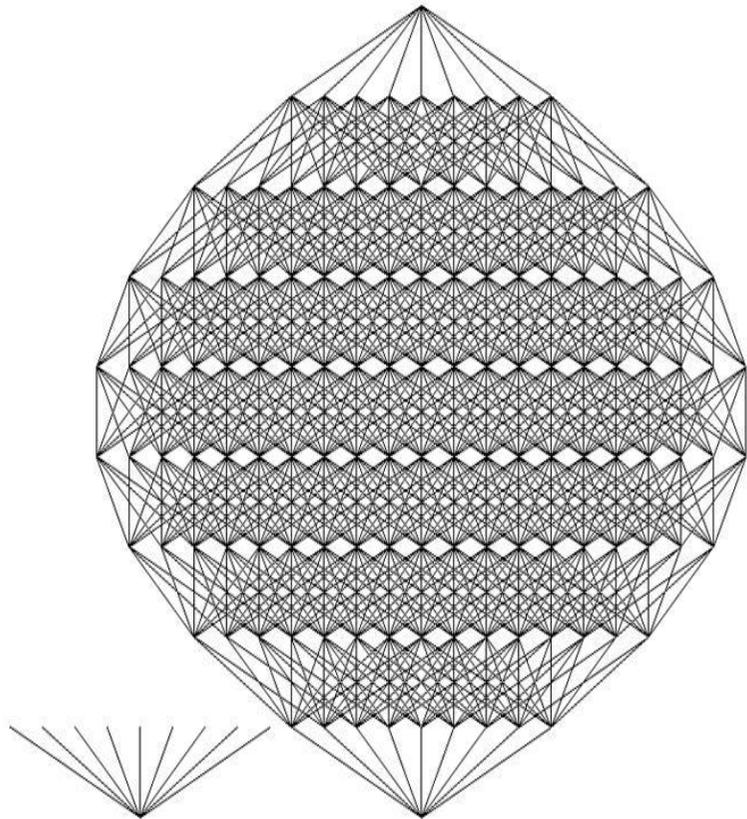
## Приложение 2. О некоторых графических отображениях кубических структур

- Основные цели графического отображения в рамках рассматриваемых методов:
- Визуальная ориентация пользователя в многомерных структурах.
- Для различных задач – различные методы.
- Выход в открытые графические системы (VRML) с полным набором их средств визуализации.
- Рис. традиционный метод отображения для  $I^6$  (с кластеризацией вершин по 8).



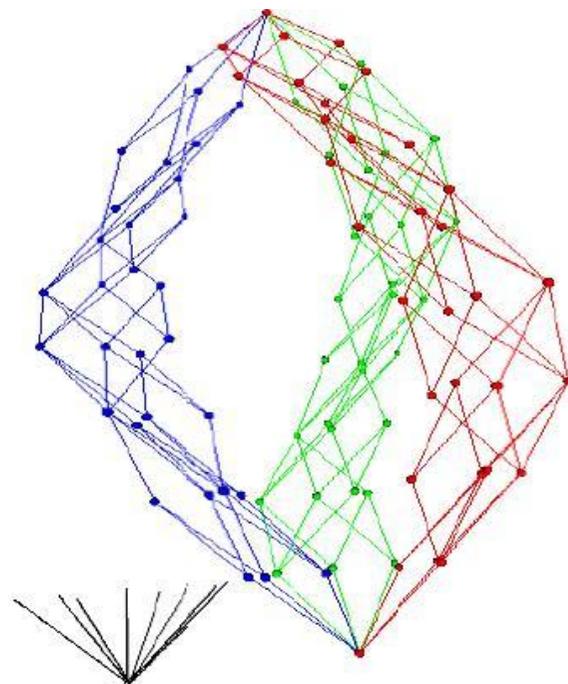
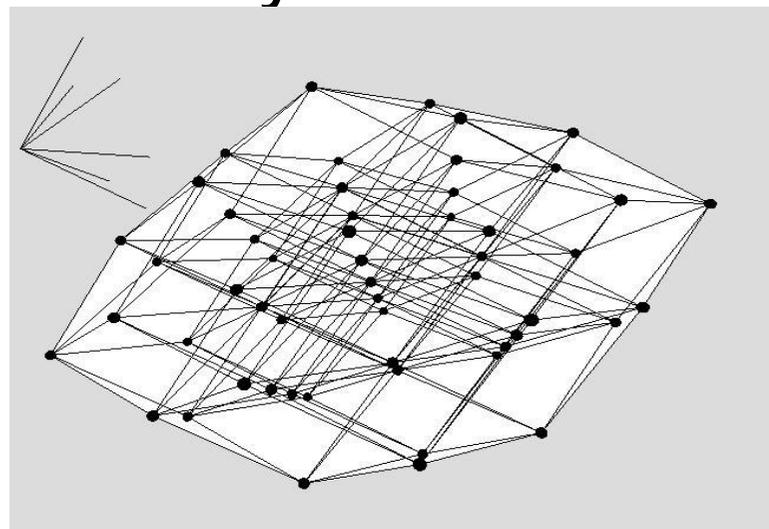
# Реперно-ориентированные отображения

- Более привычное для глаза восприятие граней в  $n$ -мерном кубе (меньший разброс в метрике ребер).
- Вариация репера  $\square$  вариация отображения.
- Рис. плоский репер и отображение вершин и ребер 9-мерного куба.



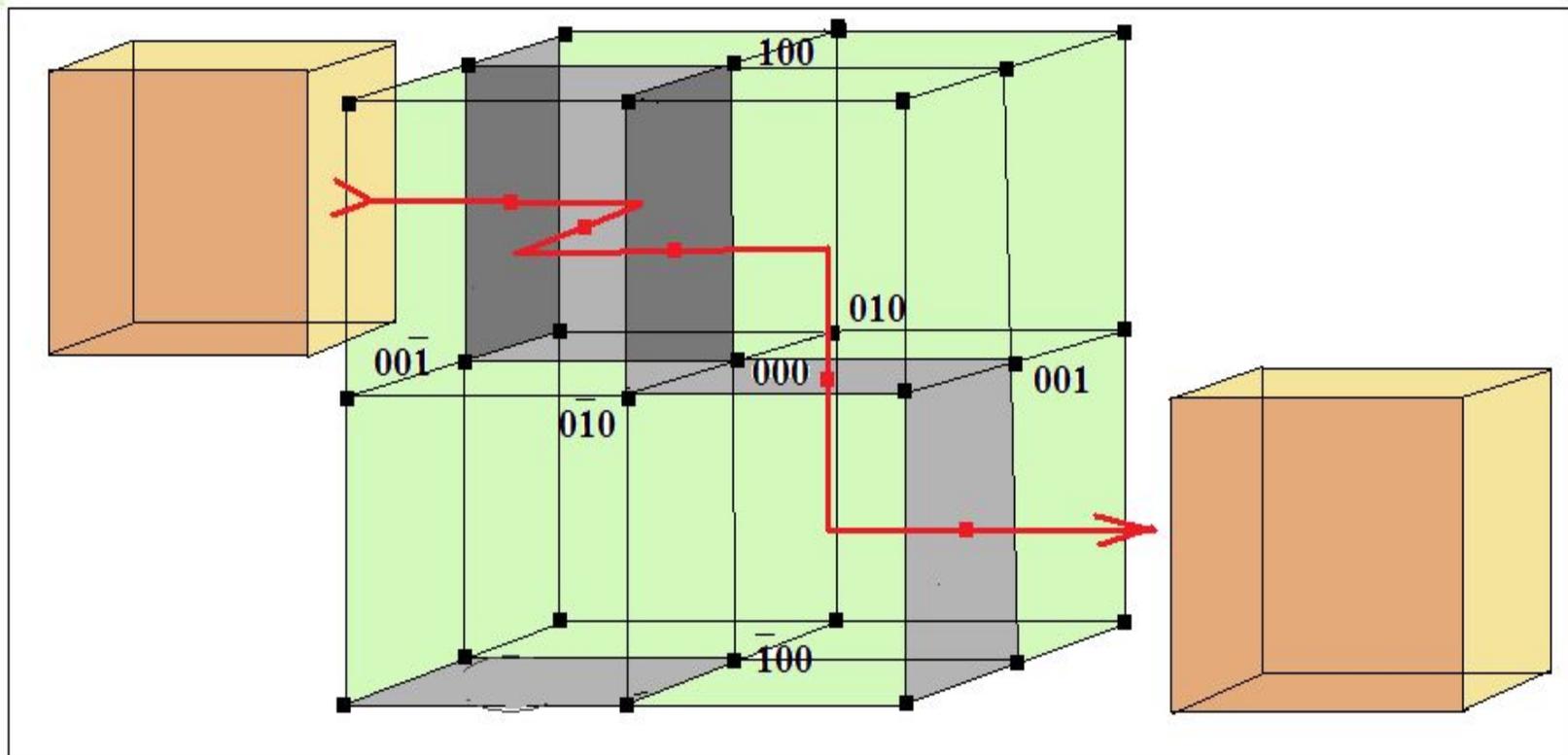
# Кубанты и комплексы кубантов

- 3d-репер, цветовая идентификация, выход в VRML-оперативный инструментарий для отображения кубантов и комплексов из них.
- Рис. Отображения  $I^6$  и решения задачи о 3-путях (приложение 1).



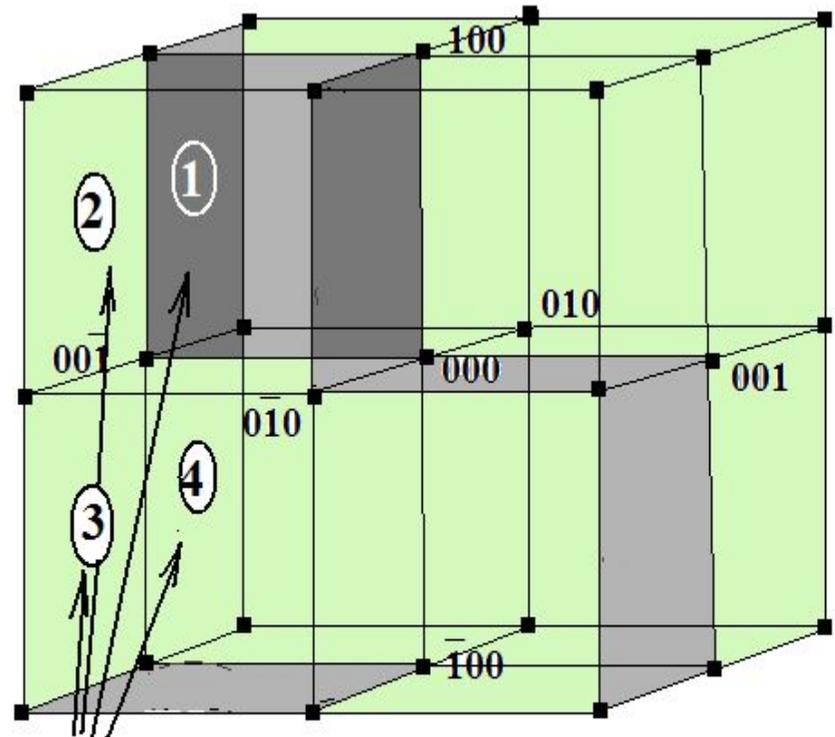
# Приложение 3. 3-пути сквозь случайную $O^3$ .

- Постановка задачи. Задан октант, в нем 2-границы двух типов ( кодировка: 0-закрыты, 1-открыты – рис.серый цвет).
- Вычислить кратчайший(ие) 3-пути между входами (-1,...) и выходами (1,...)-число и их длину, проходя через открытые 2-границы.



# К постановке задачи.

- 36-и разрядный двоичный код отражает какие грани открыты (1) и закрыты (0) для 3-путей.
- На множестве всех возможных разбиений всех 2-граней  $O^3$  построить распределение кратчайших 3-путей по числу и длине.
- Для каждого кода вычислить топологический тип.



1000.0100.0010.  
0000.0100.0000.  $\rightarrow$   $L_{min}=4$ ;  
0000.0001.0010.

$Q=64$  Mb;

# Допустимые кратчайшие 3-пути и их длины

- Для дальнейшего изучения марковских процессов в динамике случайного поведения 2-граней необходима матрица переходных вероятностей между допустимыми состояниями. (20x20)

Допустимые пути  
и их длины

2 2 2 2

2 2 2

2 2 3

2 2 4

2 2

2 3

2 4

2 5

2 6

3 3

3 4

3 5

4 4

2

3

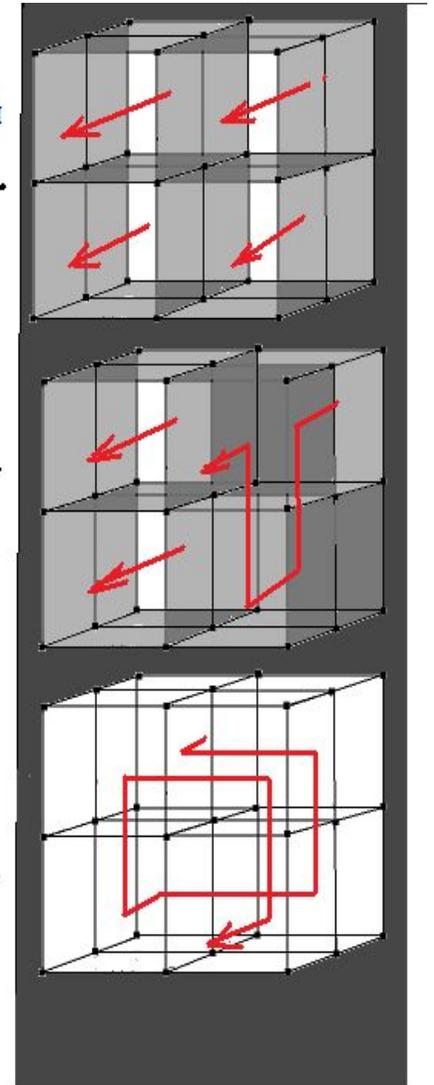
4

5

6

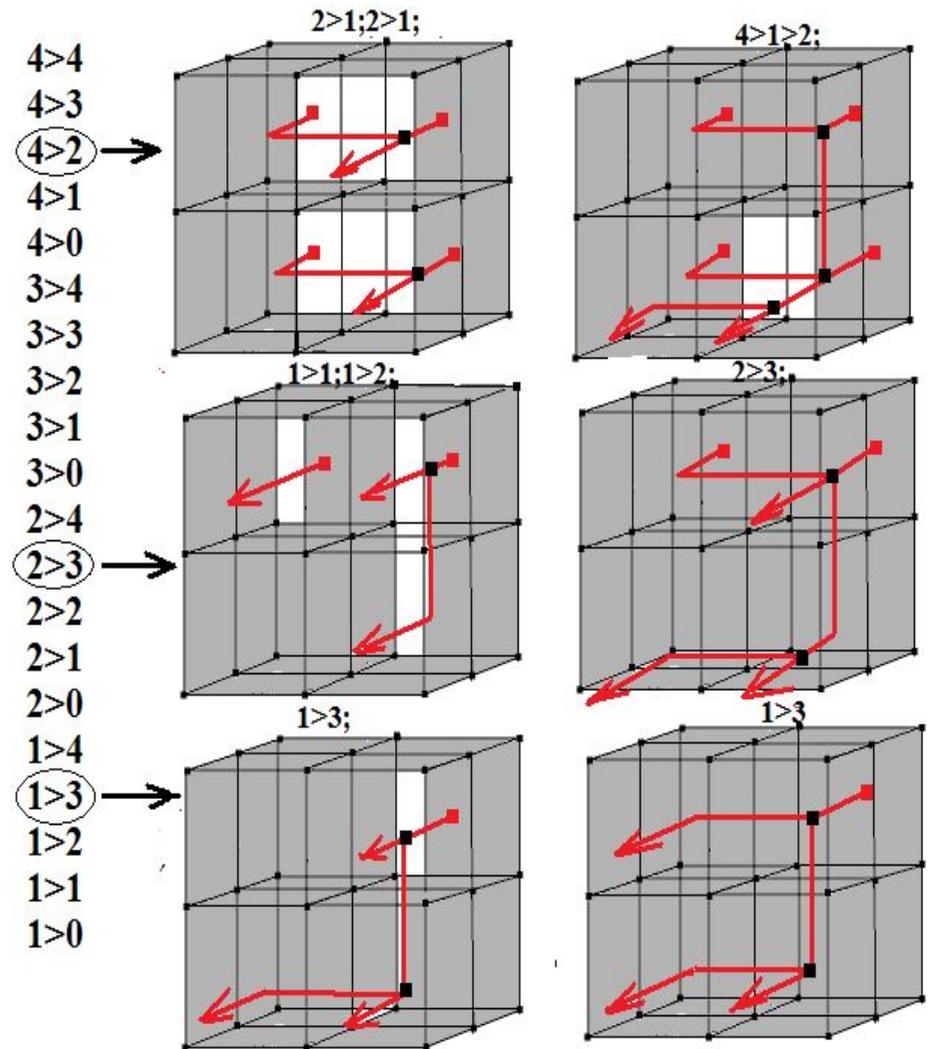
7

8



# Допустимые топологические типы

- Соотношение числа входов и выходов.
- Структуры кратчайших связ. деревьев.
- Число изолированных деревьев.
- Характеристика каждого дерева.
- Дальнейшие расчеты на «Чебышеве».



- Конец презентации по результатам проекта за 2009 г, поддержанного грантом РФФИ 09-07-12135-офи\_м.

- Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ