

Основы логики и логические основы работы компьютера

- Историческая справка
- Понятие логики
- Понятие высказывания, его виды
- Логические операции
- Таблицы истинности
- Тождества и законы алгебры логики
- Упрощение выражений
- Решение логических задач
- Логические схемы

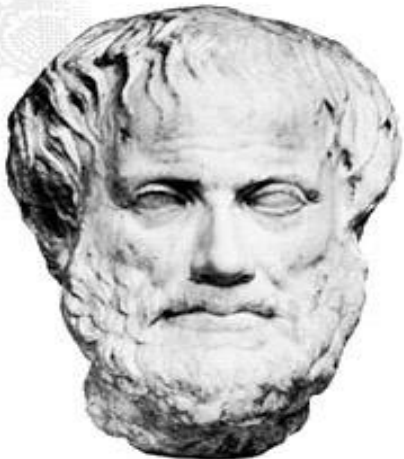
Историческая справка

Этапы развития логики

I этап - формальная логика.
Основатель - Аристотель
(384-322 гг. до н.э.),
ввел основные формы
абстрактного мышления.

II этап – математическая логика.
Основатель – немецкий ученый
и философ Лейбниц
(1642-1716), предпринял попытку
логических вычислений.

*III этап – математическая логика
(булева алгебра).*
Основатель – английский
математик Джордж Буль
(1815-1864),
ввел алфавит,
орфографию и грамматику
для математической логики.



Логика-наука, изучающая законы и формы мышления

Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира.

Логика изучает внутреннюю структуру процесса мышления, который реализуется в следующих формах:

- понятие
- высказывание (суждение)
- умозаключение
- доказательство

Формы мышления

Высказывание

(суждение)

выражается повествовательным предложением на основе понятий, в котором что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметах и отношениях

между ними

Доказательство –

подтверждение или опровержение какого – либо положения посредством других, ранее обоснованных доводов

Умозаключение –

из одного или нескольких суждений (посылок) по определенным правилам логического вывода получается новое суждение (заключение)

Дедуктивные –
от общего к частному

Индуктивные –
от частного к общему

По аналогии –
от общности одних свойств и отношений у сравниваемых предметов или процессов к общности других

Понятие выделяет существенные признаки объекта, отличающие его от других объектов

Содержание –
совокупность существенных признаков объекта

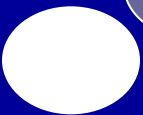
Объем понятия

(множество объектов) –
совокупность предметов, на которую распространяется понятие

пересечение



равнозначность



подчинение



Какие из предложений являются высказываниями:

1. Число 6 – четное.
2. Посмотрите на доску.
3. Все роботы являются машинами.
4. У каждой лошади есть хвост.
5. Внимание!
6. Кто отсутствует?
7. Есть кошки, которые дружат с собаками.
8. Не все то золото, что блестит.
9. $X^2 \geq 0$
10. Некоторые люди являются художниками.
11. Выразите 1 час 50 минут в минутах.
12. Всякий моряк умеет плавать.
13. Электрон – элементарная частица.

Логическая форма высказывания

S есть (не есть) P

Компьютер состоит из процессора, памяти и внешних устройств

Субъект (S) –
понятие о предмете
мысли

Предикат (P) –
понятие о свойствах и
отношениях предмета мысли

Связка (есть, является, состоит и т.д.) –
отношения между
субъектом и предикатом

Функциональная зависимость
от n неопределенных понятий
 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $n > 0$

Предикат I порядка при $n=1$
Сократ (X) – человек

Предикат II порядка при $n=2$
Ксантиппа (Y) любит Сократа (X)

Предикат III порядка при $n=3$
Софроникс (Z) – сын Сократа (X)
и Ксантиппы (Y)

Понятие высказывания, его виды

Высказывания

```
graph TD; A[Высказывания] --> B[Простые]; A --> C[Сложные (составные)];
```

Простые –

логические переменные,
обозначаемые буквами

латинского алфавита: А, В, С...

А = {Земля – планета Солнечной
системы}

В = {Луна вращается вокруг Солнца}

Сложные (составные)-

логические функции -

состоят из простых высказываний,
соединенных знаками
логических операций (и, или)

$F(A,B) = \{\text{Лил дождь и дул сильный ветер}\}$

Из двух простых высказываний постройте сложное высказывание, используя логические связки «И», «ИЛИ»

1. Все ученики изучают математику. Все ученики изучают литературу.
2. Одна половина класса изучает английский язык. Одна половина класса изучает немецкий язык.
3. Марина старше Светы. Оля старше Светы.
4. В кабинете есть учебники. В кабинете есть справочники.
5. Часть туристов любит чай. Остальные туристы любят молоко.
6. $X=3$, $X>2$
7. Синий кубик меньше красного. Синий кубик меньше зеленого.
8. Слова в этом предложении начинаются на букву Ч. Слова в этом предложении начинаются на букву А.

Высказывания

```
graph TD; A[Высказывания] --> B[Общие]; A --> C[Частные]; A --> D[Единичные];
```

Общие с можно начать со слов:

- все
- всякий
- каждый
- ни один

Все рыбы умеют плавать.

Частные можно начать со слов:

- некоторые
- большинство

Некоторые медведи – бурые.

Единичные используются
в единственном числе.
Буква А – гласная.

Определите общие, частные и единичные высказывания:

1. Не все книги содержат полезную информацию.
2. Кошка является домашним животным.
3. Все солдаты храбрые.
4. Ни один внимательный человек не совершит оплошность.
5. Некоторые ученики – двоечники.
6. Все ананасы приятны на вкус.
7. Мой кот страшный забияка.
8. Любой неразумный человек ходит на руках.
9. Некоторые мои друзья собирают марки.
10. Все лекарства неприятны на вкус.
11. У некоторых змей нет ядовитых зубов.
12. Многие растения обладают целебными свойствами.
13. Все металлы проводят тепло.

Высказывания

```
graph TD; A[Высказывания] --> B[Истинные (значение=1) – суждения, в которых связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей. «Сумма углов треугольника = 180 градусов» - истинно в геометрии Евклида]; A --> C[Ложные (значение=0) – суждения, в которых связь понятий искажает объективные отношения, не соответствует реальной действительности. «Сумма углов треугольника = 180 градусов» - ложно в геометрии Лобачевского]; B --- D[относительно] --- C
```

Истинные (значение=1) – суждения, в которых связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей.

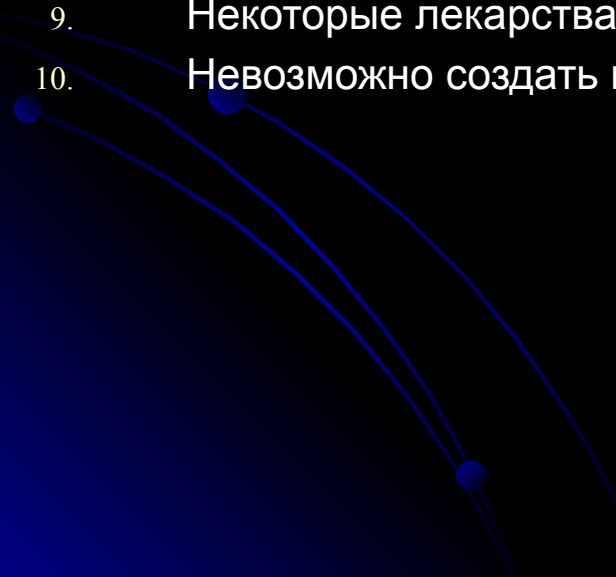
«Сумма углов треугольника = 180 градусов» - истинно в геометрии Евклида

относительно

Ложные (значение=0) – суждения, в которых связь понятий искажает объективные отношения, не соответствует реальной действительности.

«Сумма углов треугольника = 180 градусов» - ложно в геометрии Лобачевского

Определите истинность высказываний:

1. Лед – твердое состояние воды.
 2. Париж – столица Китая.
 3. Наполеон был французским королем.
 4. Не нарушайте правил дорожного движения!
 5. Каждый человек – художник.
 6. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.
 7. Человек все может.
 8. Тигр – хищное животное.
 9. Некоторые лекарства приятны на вкус.
 10. Невозможно создать вечный двигатель
- 

Алгебра высказываний

Логические операции и схемы

Вентиль - логический элемент- часть электронной логической схемы, выполняющий элементарную логическую операцию

Инверсия

Дизъюнкция

Конъюнкция

Импликация

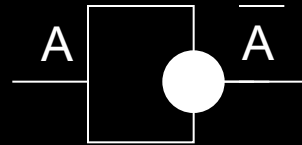
Эквиваленция

Инверсия (от лат. Inversio – переворачиваю) отрицание

- Соответствует частице НЕ, словосочетанию НЕВЕРНО, ЧТО
- Обозначение: не A, $\bar{A}$, $\neg A$
- Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

- Логическая схема (инвертор):

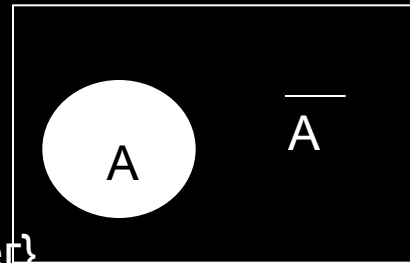


- Диаграмма Эйлера - Венна

- Пример: $A = \{\text{На улице идет снег}\}$

$\bar{A} = \{\text{Неверно, что на улице идет снег}\}$

$\bar{A} = \{\text{На улице не идет снег}\}$



Дизъюнкция (от лат. disjunctio - разделение) логическое сложение

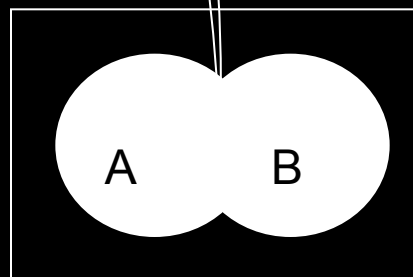
- Соответствует союзу ИЛИ
- Обозначение: +, $\vee$, or
- Таблица истинности:

A	B	$F=A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Логическая схема (дизъюнктор):



- Диаграмма Эйлера – Венна:



- Пример: $A = \{\text{Ученик вчера в 6 часов вечера читал книгу}\}$

$B = \{\text{Ученик вчера ехал в автобусе на стадион}\}$

$F = A \vee B = \{\text{Ученик вчера в 6 часов вечера читал книгу или ехал в автобусе на стадион}\}$

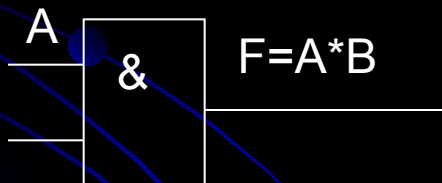
Дизъюнкция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

Конъюнкция (от лат. conjunctio - соединение) логическое умножение

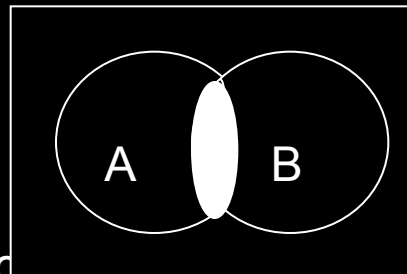
- Соответствует союзу И
- Обозначение: *, &, and, ^
- Таблица истинности:

A	B	F=A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Логическая схема (конъюнктор):



- Диаграмма Эйлера – Венна:



- Пример: A = {Ученик вчера в 6 часов вечера читал книгу}

B = {Ученик вчера ехал в автобусе на стадион}

F = A&B = {Ученик вчера в 6 часов вечера читал книгу и ехал в автобусе на стадион}

Конъюнкция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Импликация (от лат. implicatio – тесно связаны) логическое следование

- Соответствует обороту: если..., то; из... следует; ... влечет ...
- Обозначение: $\rightarrow$, $\Rightarrow$
- Таблица истинности:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация – это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда из истинного условия следует ложное заключение.

- Пример: $A = \{\text{Данный четырехугольник - квадрат}\}$
 $B = \{\text{Около квадрата можно описать окружность}\}$
 $F = A \Rightarrow B = \{\text{Если данный четырехугольник – квадрат, то около него можно описать окружность}\}$

Эквиваленция (от лат. *aequivalens* – равноценные) логическая равнозначность

- Соответствует обороту: тогда и только тогда, необходимо и достаточно, ... равносильно...
- Обозначение: $\longleftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\sim$
- Таблица истинности:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

- Пример: $A = \{\text{Я пойду гулять}\}$
 $B = \{\text{Выучу все уроки}\}$
 $F = A \Leftrightarrow B = \{\text{Я пойду гулять тогда и только тогда, когда выучу все уроки}\}$

1. Запишите с помощью логических операций каждое высказывание:
- а) Число 376 четное и трехзначное.
 - б) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
 - в) Рыбу ловят сачком, или ловят крючком, или мухой приманивают, иль червячком.
 - г) Если сумма цифр делится на 3, то число делится на 3.
 - д) Компьютер может производить вычисления тогда и только тогда, когда он включен.
2. Найдите значения логических выражений:
- а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$ б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$ в) $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$ г) $(0 \& 1) \& 1$ д) $1 \& (1 \& 1) \& 0$ е) $((1 \vee 0) \& (1 \& 1)) \& (0 \vee 1)$
3. Даны простые высказывания:
- $A = \{\text{Принтер} - \text{устройство ввода информации}\}$ $B = \{\text{Процессор} - \text{устройство обработки информации}\}$
 $C = \{\text{Монитор} - \text{устройство хранения информации}\}$ $D = \{\text{Клавиатура} - \text{устройство ввода информации}\}$
- Определите истинность высказываний: а) $\overline{A}$ б) $\overline{B}$ в) $A \& B$ г) $C \vee D$ д) $A \Rightarrow B$ е) $C \Leftrightarrow D$
ж) $(A \& B) \& (C \vee D)$
4. Используя логические операции, запишите высказывания, которые являются истинными при выполнении следующих условий:
- а) X, Y, Z равны между собой;
 - б) хотя бы одно из чисел X, Y, Z положительно;
 - в) только одно из чисел X, Y, Z больше 10;
 - г) каждое из чисел равно 0.
5. Запишите на языке алгебры логики следующие высказывания:
- а) Я поеду в Киев и если встречу там друзей, то мы интересно проведем время.
 - б) Если я поеду в Киев и встречу там друзей, то мы интересно проведем время.
 - в) Неверно, что если погода пасмурная, то идет дождь тогда и только тогда, когда нет ветра.
6. Определите значения логических переменных a, b, c, d , если:
- а) $a * (\text{Марс} - \text{планета}) = 1$ б) $b * (\text{Марс} - \text{планета}) = 0$ в) $c + (\text{Солнце} - \text{спутник Земли}) = 1$
 - г) $d + (\text{Солнце} - \text{спутник Земли}) = 0$
7. Определите значения логического выражения не $(X > Z)$ и не $(X = Y)$, если:
- а) $X=3, Y=5, Z=2$ б) $X=0, Y=1, Z=19$ в) $X=9, Y=-9, Z=9$

Логические выражения и таблицы истинности

Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую входят логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций, обозначающие логические функции.

$(2*2=5 \text{ или } 2*2=4) \text{ и } (2*2 \neq 5 \text{ или } 2*2 \neq 4)$

$A = \langle 2*2=5 \rangle$ - ложно (0)

$B = \langle 2*2=4 \rangle$ - истинно (1)

$(A \text{ или } B) \text{ и } (\bar{A} \text{ или } \bar{B})$

$F = (A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$

$F = (A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B}) = (0 \vee 1) \& (1 \vee 0) = 1 \& 1 = 1$

Таблица истинности – это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (переменных) вместе со значением истинности выходного сигнала (значения логической функции) для каждого из этих сочетаний.

A	B	$A \vee B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$F = (A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Построение таблиц истинности

Построить таблицу истинности для формулы: $F = A \vee B \vee A \& C$

Определить число переменных

Определить число строк в таблице истинности

Записать всевозможные значения переменных

Определить количество логических операций, их порядок, записать в таблицу

Определить для каждой операции значение

A	B	C	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{A \& C}$	$F = A \vee \overline{B \vee A \& C}$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

1. Постройте таблицы истинности для следующих функций:

$$F = (A \vee B) \& (\overline{A \& B})$$

$$F = A \sim B \vee A \Rightarrow B$$

$$F = \overline{A \vee B \& C}$$

$$F = \overline{C \& D \Rightarrow B}$$

2. Докажите, используя таблицы истинности, что логические выражения равносильны:

а) $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ и $A \& B$, б) $A \rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$, в) $A \sim B$ и $(\overline{A} \& B) \vee (A \& \overline{B})$

3. Для формулы $A \& (B \vee \overline{B} \& \overline{C})$ постройте таблицу истинности с использованием электронных таблиц.

4. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какие из этих выражений могут соответствовать F

X	Y	Z	F
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0

а) $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$

б) $\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z}$

в) $\overline{X} + \overline{Y} + Z$

г) $\overline{X} + \overline{Y} \& Z$

Законы алгебры логики

Закон	Для ИЛИ	Для И
Переместительный	$A \vee B = B \vee A$	$A \& B = B \& A$
Сочетательный	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$
Распределительный	$(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$	$(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$
Исключенного третьего	$A \vee \overline{A} = 1$	$A \& \overline{A} = 0$
Де Моргана	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$	$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
Повторения	$A \vee A = A$	$A \& A = A$
Поглощения	$A \vee (A \& B) = A$	$A \& (A \vee B) = A$
Склеивания	$(A \& B) \vee (\overline{A} \& B) = B$	$(A \vee B) \& (\overline{A} \vee B) = B$
Контрапозиции	$(A \Leftrightarrow B) = (B \Leftrightarrow A)$	
Операции с константами	$A \vee 1 = 1, A \vee 0 = A$	$A \& 1 = A, A \& 0 = 0$

Упрощение логических выражений

Упростить выражение: $\overline{A} \& B \vee \overline{A} \vee B \vee A =$

$$\overline{A} \& B \vee \overline{A} \& \overline{B} \vee A =$$

$$= \overline{A} \& (B \vee \overline{B}) \vee A =$$

$$= \overline{A} \& 1 \vee A =$$

$$= \overline{A} \vee A = 1$$

Закон де Моргана

Распределительный для сложения

Исключения констант

Исключение третьего

1. Упростите логические выражения:

a) $(A \vee \bar{A}) \& B$ b) $A \& (A \vee B) \& (B \vee \bar{B})$

2. Докажите, что выражение тождественно – ложно, тождественно-истинно:

a) $\overline{B \& C \vee (A \& C \rightarrow B)}$

б) $\overline{A \& (A \leftrightarrow C) \rightarrow (A \vee B)}$

Решение логических задач

1. Решение логических задач средствами алгебры логики:

- Изучить условие задачи
- Выделить простые логические высказывания и ввести обозначения
- Записать условие задачи на языке алгебры логики
- Составить конечную формулу, объединив логическим умножением формулы каждого утверждения, приравнять произведение единице
- Упростить формулу, проанализировать полученный результат или составить таблицу истинности, найти по таблице значения переменных, для которых $F=1$, проанализировать полученный результат.

2. Решение логических задач табличным способом:

- При использовании этого способа условия, которые содержит задача, и результаты рассуждений фиксируются с помощью специально составленных таблиц.

3. Решение логических задач с помощью рассуждений

- Этим способом обычно решают несложные логические задачи.

Решите задачи:

1. Три дочери писательницы Жаклин Деманж – Дениз, Амели и Лилиан тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств – оперном пении, балете и игре на виолончели. Все они живут в разных городах, поэтому Жаклин часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго. Известно что:

- Дениз живёт не в Париже, а Лилиан – не в Риме
- Парижанка не играет на виолончели
- Та, кто живёт в Риме, оперная певица
- Лилиан равнодушна к балету
- Где живёт Амели и какова её профессия?

2. Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.

— Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.

— Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.

Питер, к которому обратился Ник, возмущился:

— Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину.

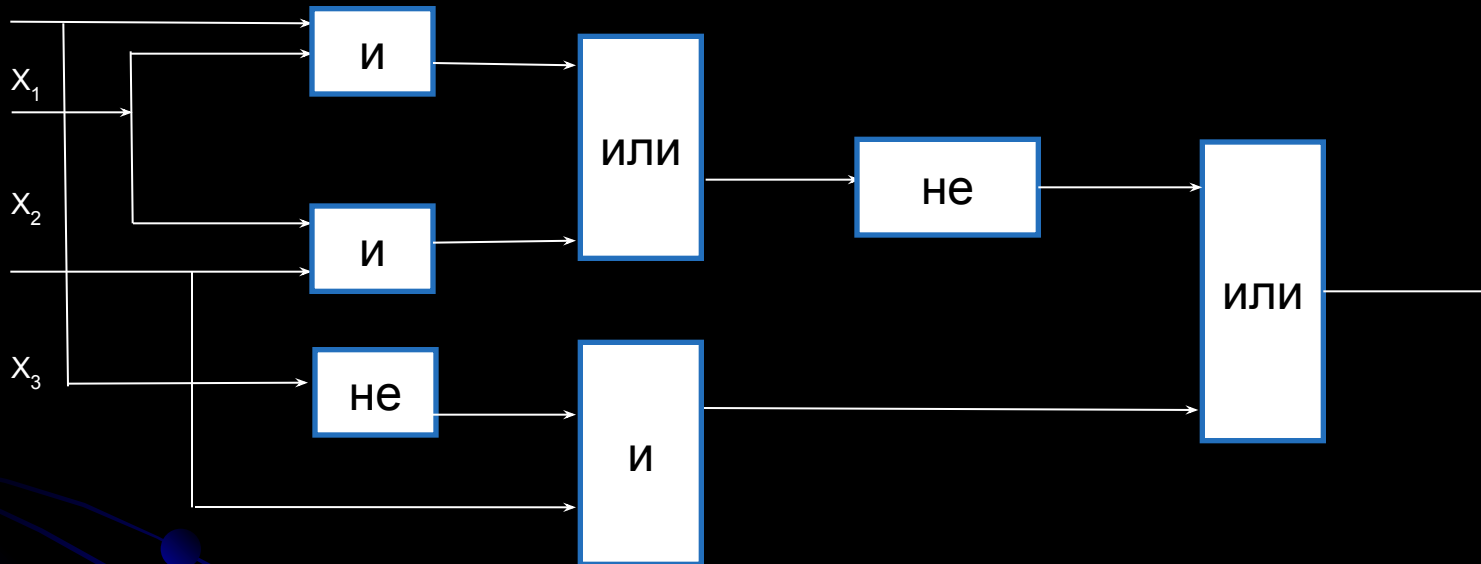
По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

3. Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

Логические схемы

В компьютере все вычисления выполняются с помощью логических элементов – электронных схем, выполняющих логические операции.

1. Дана логическая схема. Построить соответствующее ей логическое выражение



Вычислить значение выражения для:

- А) $x_1=x_2=x_3=1$
- Б) $x_1=x_2=x_3=0$
- В) $x_1=0, x_3=1, x_2$ -любое

2. По данному логическому выражению построить логическую схему:

$$x \cdot y + x \cdot z + x \cdot y \cdot z$$