

Информатика

Институт информатики, инноваций и бизнес-систем

Кафедра информатики, инженерной и компьютерной графики

Черкасова Евгения Анатольевна

Тема 9. Логические основы компьютеров

Логические основы компьютеров

1. Логические выражения и операции
2. Преобразование логических выражений
3. Логические элементы компьютера

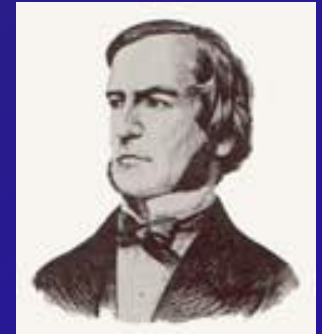
1 Логические выражения и операции

Булева алгебра

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



Почему "логика"?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Логические высказывания

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- ☐ Сейчас идет дождь.
- ☐ Жирафы летят на север.
- ☐ История – интересный предмет.
- ☐ У квадрата – 10 сторон и все разные.
- ☐ Красиво!
- ☐ В городе N живут 2 миллиона человек.
- ☐ Который час?

Обозначение высказываний

А – Сейчас идет дождь.
В – Форточка открыта. }

простые высказывания
(элементарные)



Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) "**и**", "**или**", "**не**", "**если ... то**", "**тогда и только тогда**" и др.

А и В Сейчас идет дождь и открыта форточка.

А или не В Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если А, то В Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

не А и В Сейчас нет дождя и форточка открыта.

А тогда и только тогда, когда В Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то "**не A**" ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также: $\bar{A}$,
not A (Паскаль),
! A (Си)

**таблица
истинности
операции НЕ**

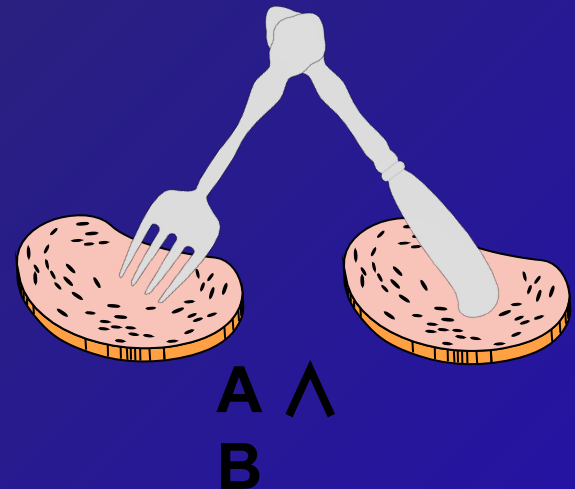
Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

Высказывание "А и В" истинно тогда и только тогда, когда А и В истинны одновременно.

	А	В	А и В
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также: $A \cdot B$, $A \wedge B$,
A and B (Паскаль),
 $A \&\& B$ (Си)



конъюнкция — от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание "А или В" истинно тогда, когда истинно А или В, или оба вместе.

А	В	А или В
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, $A \vee B$,
 $A \text{ or } B$ (Паскаль),
 $A \parallel B$ (Си)

дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

Операция "исключающее ИЛИ"

Высказывание " $A \oplus B$ " истинно тогда, когда истинно A или B , но *не оба одновременно*.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
 $A \text{ xor } B$ (Паскаль),
 $A \wedge B$ (Си)

Свойства операции "исключающее ИЛИ"

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$(A \oplus B) \oplus B = ?$$

$$A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$$

A	B	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	$A\bar{B} + \bar{A}B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Импликация ("если ..., то ...")

Высказывание " $A \rightarrow B$ " истинно, если не исключено, что из A следует B .

A – "Работник хорошо работает".

B – "У работника хорошая зарплата".

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

Эквиваленция ("тогда и только тогда, ...")

Высказывание " $A \leftrightarrow B$ " истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = AB + \overline{A}\overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И

ИЛИ

НЕ

базовый набор
операций

Логические формулы

Система имеет три датчика и может работать, если два из них исправны.

А – "Датчик № 1 неисправен".

В – "Датчик № 2 неисправен".

С – "Датчик № 3 неисправен".

Аварийный сигнал:

Х – "Неисправны два датчика".

Х – "Неисправны датчики № 1 и № 2" или
"Неисправны датчики № 1 и № 3" или
"Неисправны датчики № 2 и № 3".

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая
формула

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\bar{A} \cdot B$	$\bar{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- ☐ **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- ☐ **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- ☐ **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

0
1
2
3
4
5
6
7

A	B	C	AB	AC	BC	X
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

2 Преобразование логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
правила де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \rightarrow \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}, \quad \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} = (M + \bar{M}) \cdot X \cdot \bar{H} = X \cdot \bar{H}$$

$$X = (B \rightarrow A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \rightarrow C)$$

$$= (\bar{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\bar{A} + C)$$

$$= (\bar{B} + A) \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

$$= (\bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot (\bar{A} + C)$$

$$= \bar{B} \cdot \bar{A}$$

раскрыли $\rightarrow$

формула де Моргана

распределительный

исключения третьего

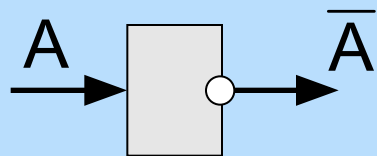
повторения

поглощения

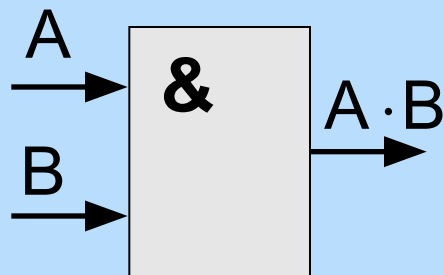
3 Логические элементы компьютера

Логические элементы компьютера

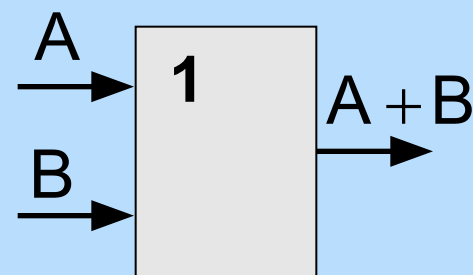
значок инверсии



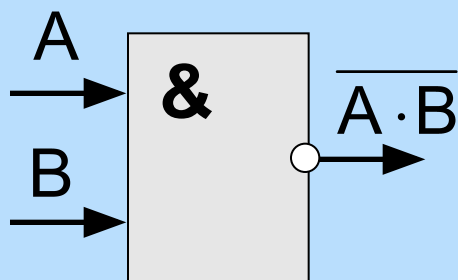
НЕ



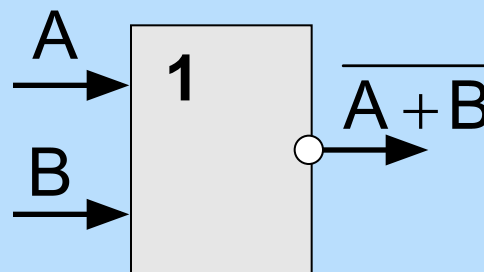
И



ИЛИ



И-НЕ



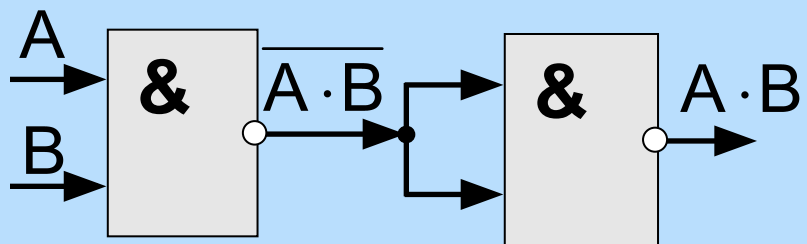
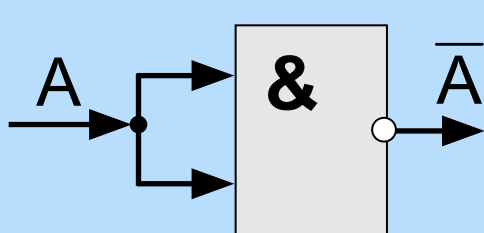
ИЛИ-НЕ

Логические **элементы** компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ**.

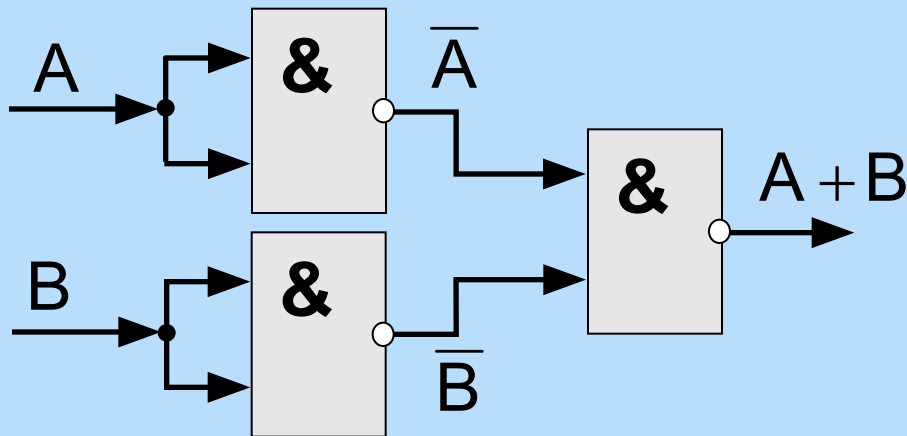
НЕ: $\bar{A} = \bar{A} + \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{A}$

И: $A \cdot B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$



ИЛИ:

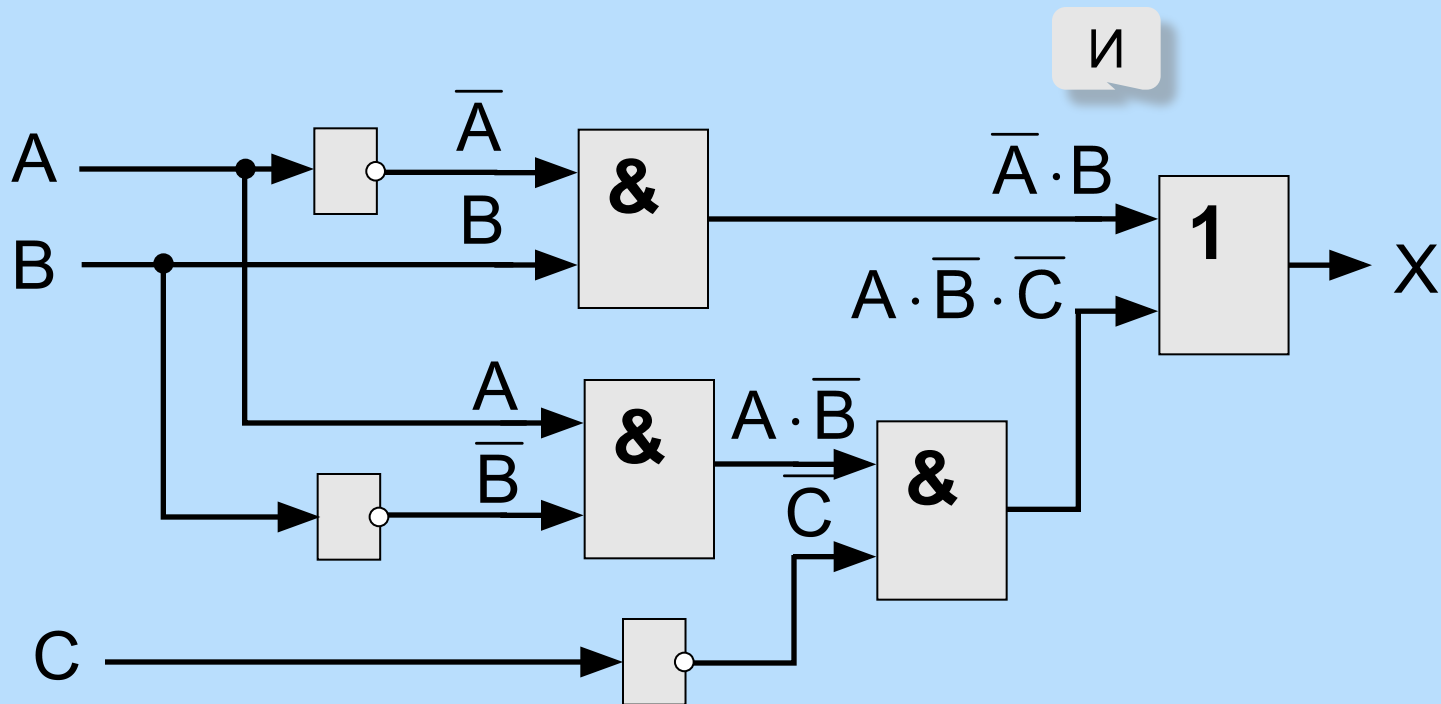
$$A + B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$$



Составление схем

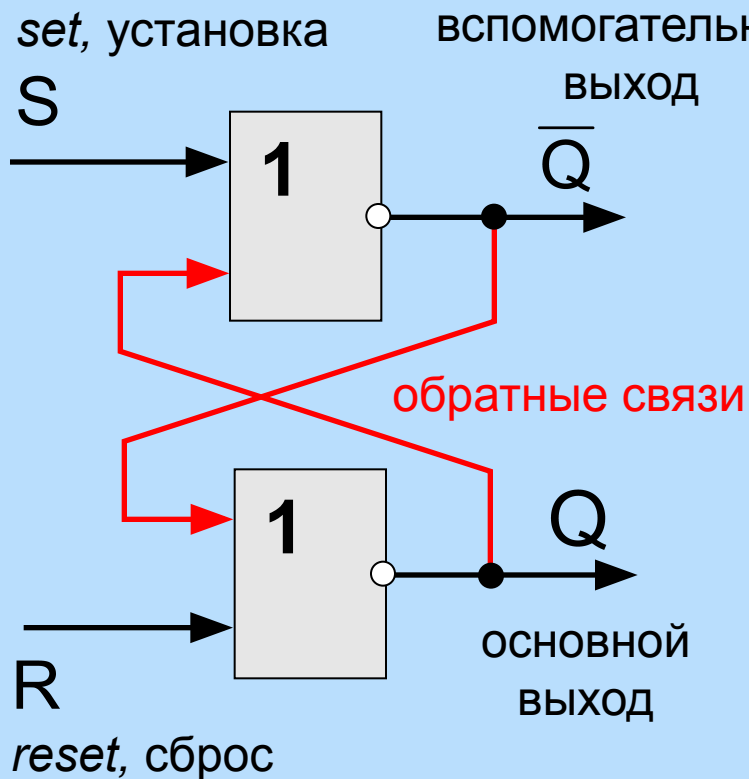
последняя операция - ИЛИ

$$X = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$



Триггер (англ. *trigger* – защёлка)

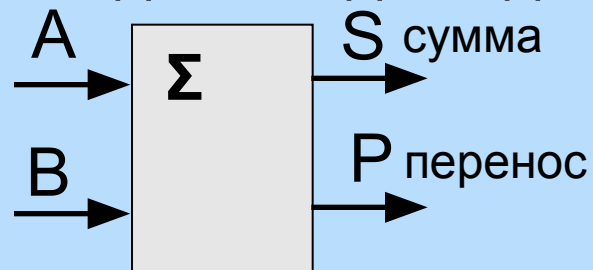
Триггер – это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах **ИЛИ-НЕ** или на 2-х элементах **И-НЕ**.



S	R	Q	$\bar{Q}$	режим
0	0	Q	$\bar{Q}$	хранение
0	1	0	1	сброс
1	0	1	0	установка 1
1	1	0	0	запрещен

Полусумматор

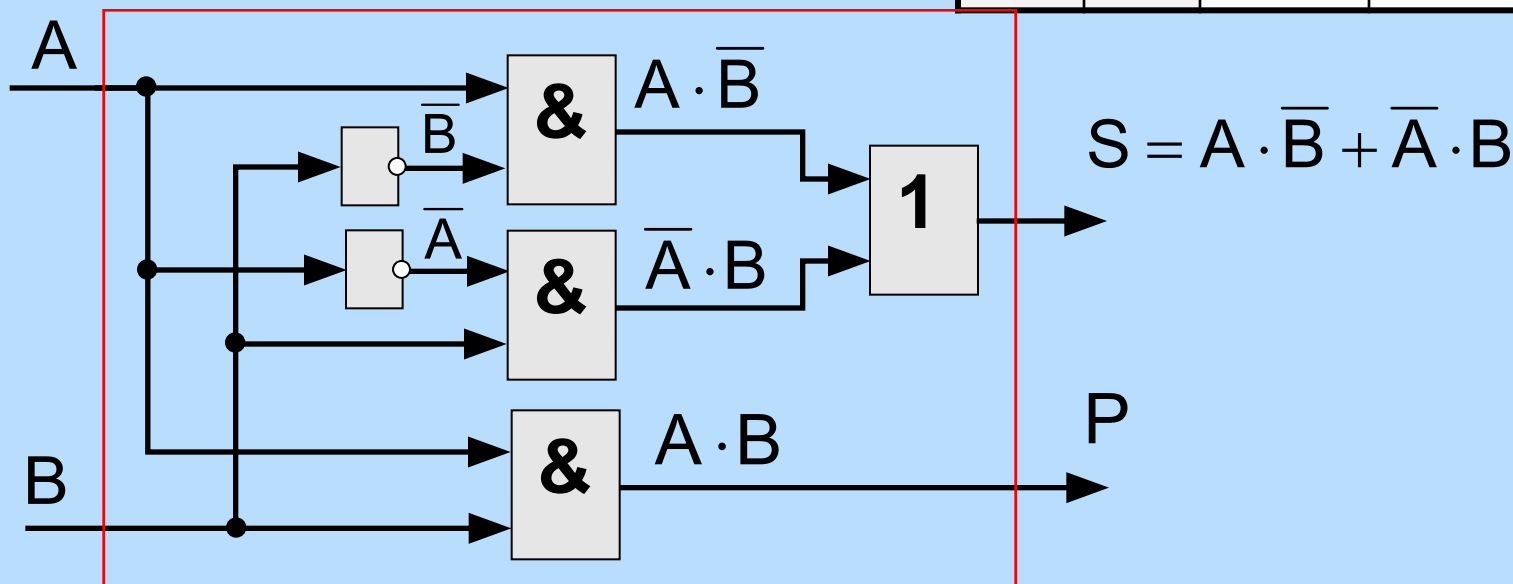
Полусумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.



$$P = A \cdot B$$

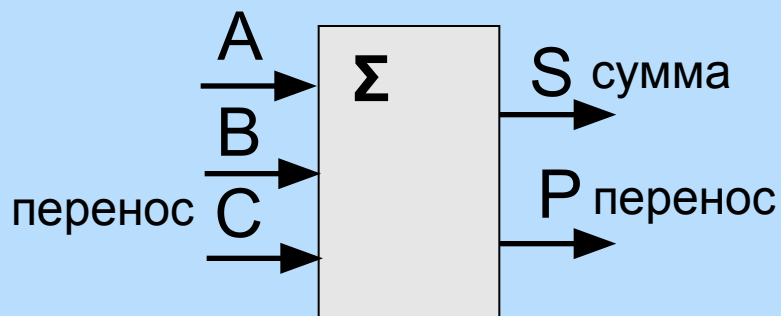
$$S = A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



Сумматор

Сумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.

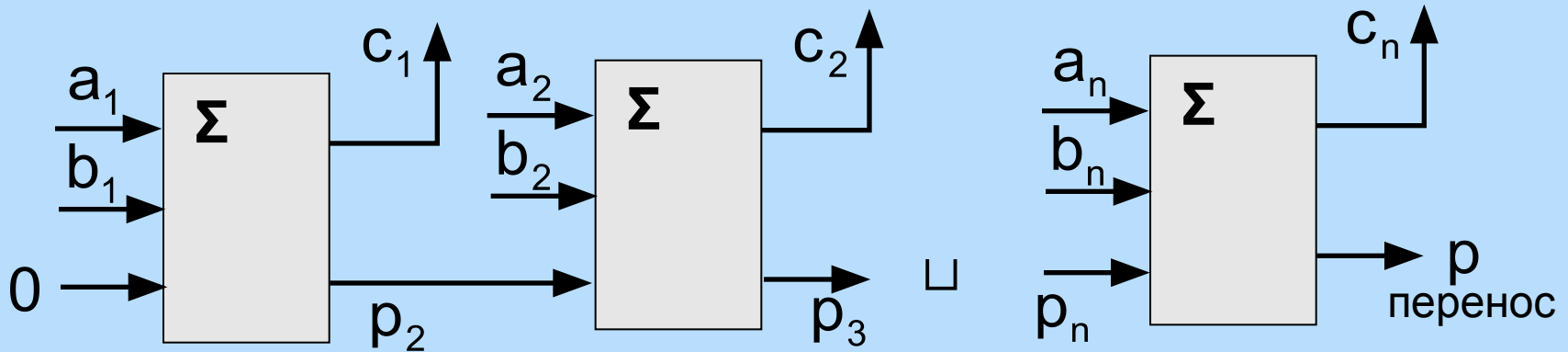


A	B	C	P	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Многоразрядный сумматор

это логическая схема, способная складывать два n -разрядных двоичных числа.

$$\begin{array}{r} A = a_n a_{n-1} \square a_1 \\ + B = b_n b_{n-1} \square b_1 \\ \hline C = \boxed{p} c_n c_{n-1} \square c_1 \\ \text{перенос} \end{array}$$



Вопросы

Вопрос 1

Как записывается десятичное число 11 в двоичной системе счисления?

- А) 1111
- Б) 1101
- В) 1011
- Г) 1001

Вопрос 2

Операционная система – это ...

- А) программа, обеспечивающая управление базами данных
- Б) антивирусная программа
- В) программа, управляющая работой компьютера
- Г) система программирования

Вопрос 3

Какие пары объектов находятся в отношении "объект - модель"?

- А) компьютер - данные
- Б) компьютер - его функциональная схема
- В) компьютер - программа
- г) компьютер - алгоритм

Вопрос 4

Задан полный путь к файлу C:\DOC\PROBA.TXT. Каково расширение файла, определяющее его тип?

- А) C:\DOC\PROBA.TXT
- Б) DOC\PROBA.TXT
- В) PROBA.TXT
- Г) TXT

Использование материалов презентации

Использование данной презентации, может осуществляться только при условии соблюдения требований законов РФ об авторском праве и интеллектуальной собственности, а также с учетом требований настоящего Заявления.

Презентация является собственностью авторов. Разрешается распечатывать копию любой части презентации для личного некоммерческого использования, однако не допускается распечатывать какую-либо часть презентации с любой иной целью или по каким-либо причинам вносить изменения в любую часть презентации. Использование любой части презентации в другом произведении, как в печатной, электронной, так и иной форме, а также использование любой части презентации в другой презентации посредством ссылки или иным образом допускается только после получения письменного согласия авторов.