

Элементы математической логики



Логика в информатике и искусственном интеллекте.
Алгебра логики (алгебра высказываний) — раздел математической логики, в котором изучаются логические операции над **высказываниями**. Предполагается, что высказывания могут быть только истинными или ложными (т.н. бинарная или двоичная логика, в отличие от, например, троичной логики, когда есть три варианта истинности высказывания: «истина», «ложь» и «не определено»).

Логика высказываний — основной математический инструмент при создании компьютеров, легко преобразуется в **битовую**: (0 — ЛОЖЬ, 1 — ИСТИНА);

Историческая справка



Начало исследований в области формальной логики было положено греческим философом **Аристотелем**, 384-322 гг. до н.э. Он основоположник формальной логики.

Впервые перевести логику на язык математики предложил немецкий математик **Г. Лейбниц** в конце XVII века. Эту идею впервые реализовал англ. математик **Дж. Буль** (1815 – 1864г.).

Буль создал алгебру, в которой буквами обозначены высказывания, и это привело к алгебре высказываний.



Алгебра логики находит непосредственное и широкое применение при разработке средств электронной и вычислительной техники.

Определения



Высказывание — это повествовательное предложение,  которому можно поставить в соответствие одно из двух значений — истина или ложь. Высказывания строятся над **множеством** $\{B, \neg, \wedge, \vee, 0, 1\}$, где B — непустое множество, над элементами которого определены три **операции**: $\neg$ - *отрицание* (унарная операция), $\wedge$ - *конъюнкция* (бинарная), $\vee$ - *дизъюнкция* (бинарная), а также константы — логический ноль **0** и логическая единица **1**.

$B = \{\text{Ложь, Истина}\}$. Для B можно задать четыре унарные и шестнадцать бинарных отношений и все они могут быть получены через суперпозицию трёх выбранных операций.

Отрицание



Отрицанием высказывания A называется  новое высказывание, которое является истинным, если высказывание A ложно, и ложным, если высказывание A истинно. Обозначается отрицание $\bar{A}$ или $\neg A$ и читается “не A ” или “неверно, что A ”. Логические значения высказываний можно описать с помощью таблицы истинности, где 0 означает ложь, а 1 – истину. Таблица истинности для отрицания имеет вид:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Двойное отрицание высказывания A совпадает с самим высказыванием A .

Конъюнкция



Логическое умножение. Конъюнкцией двух высказываний A , B называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания A , B истины, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Обозначается конъюнкция по-разному. Например, $A \times B$, AB , $A \wedge B$, $A \& B$, $A \cdot B$, читается “ A и B ”. Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое сложение. Дизъюнкцией двух высказываний A , B называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний A , B обозначается символом $A \vee B$, $(A + B)$ читается « A или B ». Высказывания A , B при этом называются членами дизъюнкции. Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация

Импликацией двух высказываний A , B называется новое высказывание, которое считается ложным, если A истинно, а B - ложно, и истинным во всех остальных случаях. Обозначается символом $A \rightarrow B$, читается «Если A , то B » или «из A следует B ». При этом высказывание A называется *условием* или *посылкой*, высказывание B – следствием или заключением, высказывание $A \rightarrow B$ *следованием* или *импликацией*.

Таблица истинности:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция



Эквиваленцией (или эквивалентностью)  **двух** высказываний A , B называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания A , B либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквиваленция высказываний A , B обозначается символом $A \leftrightarrow B$, читается «для того, чтобы B , необходимо и достаточно, чтобы A », или « A тогда и только тогда, когда B ».

Таблица истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Формулы алгебры логики

Приоритеты при выполнении операций алгебры логики:



- 1.Выполнение операций в скобках
- 2.Операция логического отрицания
- 3.Операция логического умножения
- 4.Операция логического сложения
- 5.Операция импликации
- 6.Операция эквивалентности

Операции с равным приоритетом выполняются слева направо.

$$((A \cdot B) \vee (\overline{A \vee C})) \vee A$$

$$A \cdot B \vee \overline{A \vee C} \vee A$$

$$(\overline{A} \vee B) \cdot C \cdot A \rightarrow \overline{(B \cdot (A \vee C))}$$

$$(\overline{A} \vee B) \cdot C \cdot A \rightarrow \overline{B \cdot (A \vee C)}$$

Пример. Высказывание «Треугольник ABC с вершиной в точке C и основанием AB равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle B$ » является истинным, так как высказывания «Треугольник ABC с вершиной в точке C и основанием AB равнобедренный» и «В равнобедренном треугольнике ABC с вершиной в точке C и основанием AB $\angle A = \angle B$ » либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в *математических доказательствах*. Известно, что значительное число теорем математики формулируется в форме *необходимых и достаточных условий*, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух элементов эквивалентности и доказав истинности самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.



Пример. Пусть A - высказывание «Вася изучает программирование», B - высказывание «Вася любит математику». Рассмотрим словесную формулировку высказываний: 1) $A \vee B$; 2) $\bar{A} \& \bar{B}$; 3) $A \rightarrow B$;

4) $\overline{A \rightarrow B}$; 5) $\overline{\bar{A} \cdot B}$; 6) $\bar{B} \leftrightarrow \bar{A}$.

Решение:

1) «Вася изучает программирование или любит математику».

2) «Вася не изучает программирование и не любит математику».

3) «Если Вася изучает программирование, то он любит математику».

4) «Неверно, что если Вася изучает программирование, то он любит математику».

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности. Например, для формулы

$$X \cdot \bar{Y} \rightarrow X \vee Y$$

таблица истинности имеет вид:

X	Y	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$X \cdot \bar{Y}$	$\bar{X} \vee Y$	$X \cdot Y \rightarrow \bar{X} \vee Y$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1

Для формулы, содержащей три переменные, таблица истинности будет иметь $2^3 = 8$ строк, и формула принимает 8 значений, состоящих из нулей и единиц. Например, для формулы $(X \cdot \bar{Y}) \vee Z$ таблица истинности имеет вид:

X	Y	Z	$\bar{Y}$	$(X \cdot \bar{Y})$	$(X \cdot \bar{Y}) \vee Z$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

Равносильные формулы алгебры логики



Две формулы алгебры логики A и B называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений элементарных высказываний, входящих в формулу. Запись $A=B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Например, очевидно, что равносильны формулы:

$$\begin{aligned} X=X; \quad X \& X=X; \quad X \& 0=0; \quad X \vee 1=1; \quad \overline{\overline{X}} \quad X \vee \quad =1; \\ X \vee X=X; \quad X \& 1=X; \quad X \overline{\overline{X}} 0=X; \quad X \& \quad =0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что если $A=B$, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Тавтология



Формула A называется **тождественно истинной** (или **тавтологией**), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных. Например, тождественно истинной является формула $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$, что можно проверить, построив таблицу истинности.

Формула называется **тождественно ложной**, если она принимает значение ноль при всех значениях входящих в нее переменных. Как уже отмечалось $A \cdot \bar{A} = 0$, то есть формула тождественно ложная.

Свойства отношений равносильности



- $A=A$ (рефлексивно);
- Если $A=B$, то $B=A$ (симметрично);
- Если $A=B$ и $B=C$, то $A=C$ (транзитивно).

Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ тавтология (то есть тождественно истинная), и, обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ тавтология, то формулы A и B равносильны.

Равносильности, выражающие одни логические операции через другие

$$1. X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \cdot (Y \rightarrow X)$$

или $X \leftrightarrow Y = X \cdot Y \vee \bar{X} \cdot \bar{Y}$

$$2. X \rightarrow Y = \bar{X} \vee Y$$

$$3. \overline{X \cdot Y} = \bar{X} \vee \bar{Y}$$

$$4. \overline{X \vee Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

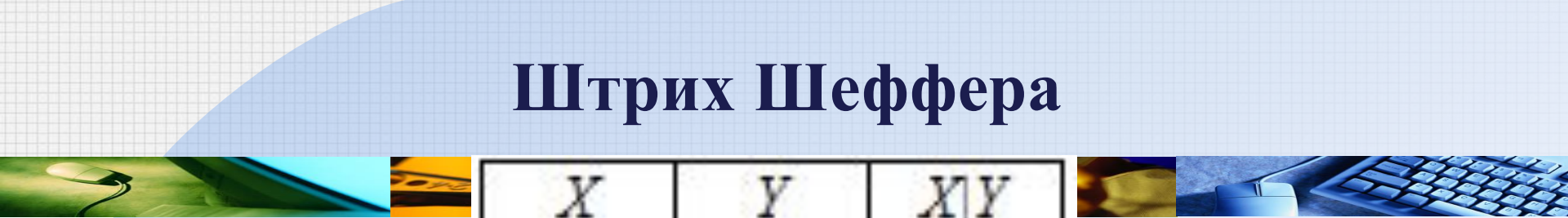
$$5. X \cdot Y = \overline{\bar{X} \vee \bar{Y}}$$

$$6. X \vee Y = \overline{\bar{X} \cdot \bar{Y}}$$



Всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логических операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

Штрих Шеффера



X	Y	$X Y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1



Очевидно, что имеют место равносильности: $\bar{X} = X|X$, $X \cdot Y = (X|Y)|(X|Y)$. Из этих двух равносильностей следует, что всякая формула алгебры логики может быть заменена равносильной формулой, содержащей только операцию «штрих Шеффера». Отметим, что $X|Y = \overline{X \cdot Y}$. Аналогично операции «штрих Шеффера» может быть использована операция, называемая «стрелкой Пирса»:

$$X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$$

Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики



Название	Дизъюнктивная форма	Конъюнктивная форма
1. Коммутативный закон	$A \vee B = B \vee A$	$A \cdot B = B \cdot A$
2. Ассоциативный закон	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. Дистрибутивный закон	$A \vee (B \cdot C) = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$	$A \cdot (B \vee C) = (A \cdot B) \vee (A \cdot C)$
4. Закон поглощения	$A \vee A \cdot B = A$	$A \cdot (A \vee B) = A$
5. Закон слияния	$A \vee \bar{A} \cdot B = A \vee B$	$A \cdot (\bar{A} \vee B) = AB$
6. Закон идемпотентности	$A \vee A = A$	$A \cdot A = A$
7. Законы исключения констант	$A \vee 1 = 1; \quad A \vee 0 = A$	$A \cdot 1 = A; \quad A \cdot 0 = 0$
Законы отрицания	$\overline{A \vee B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} \vee \bar{B}$

Закон двойственности



Следует отметить, что между равносильностями, записанными в дизъюнктивной форме и в конъюнктивной форме, существует свойство симметрии: если дизъюнкцию заменить конъюнкцией, а конъюнкцию заменить дизъюнкцией, 0 заменить на 1, а 1 заменить на 0, при этом отрицания сохранить без изменений, то записанные слева и справа равносильности перейдут друг в друга. Следовательно, с помощью указанных замен можно из одних равносильностей получить другие. Это называется *законом двойственности*.

Многие законы можно обобщить на случай большого числа переменных



$$\overline{(A \vee B \vee C \vee D \vee \dots \vee P)} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} \cdot \dots \cdot \bar{P}$$

$$\overline{(A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \dots \cdot P)} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \dots \vee \bar{P}$$

$$A \vee B \cdot C \cdot D \cdot \dots \cdot P = (A \vee B) \cdot (A \vee C) \cdot (A \vee D) \cdot \dots \cdot (A \vee P) \text{ и}$$

$$A \cdot (B \vee C \vee D \vee \dots \vee P) = A \cdot B \vee A \cdot C \vee A \cdot D \vee \dots \vee A \cdot P$$

$$(A \vee B) \cdot (C \vee D) = A \cdot C \vee A \cdot D \vee B \cdot C \vee B \cdot D$$

$$A \cdot B \vee C \cdot D = (A \vee C) \cdot (A \vee D) \cdot (B \vee C) \cdot (B \vee D)$$

$$A \vee A \cdot B \vee A \cdot B \cdot C \cdot D = A;$$

$$A \cdot (A \vee C \vee D \vee \dots \vee P) = A;$$

$$(A \vee C) \vee (A \vee C)D = A \vee C \vee D$$

$$\overline{(A \vee C)} \vee (A \vee C)D = \overline{(A \vee C)} \vee D$$

$$AB \vee AC \vee \bar{B}C = AB \vee AC \cdot (B \vee \bar{B}) \vee \bar{B}C = ABC \vee A\bar{B}C \vee AB \vee \bar{B}C = AB \vee \bar{B}C$$

$$AB \vee A\bar{C} \vee \bar{B}C = A(B \vee \bar{C}) \vee \bar{B}C = A \cdot \overline{\bar{B}C} \vee \bar{B}C = A \vee \bar{B}C$$

Пример. Упростить выражение $(ABD \vee A\bar{B} \vee B\bar{A}\bar{D}) \cdot (AD \vee \bar{A}BD \vee \bar{A}\bar{B}\bar{D})$.

Решение. Упростим выражения в скобках:

$$ABD \vee A\bar{B} \vee B\bar{A}\bar{D} = B(AD \vee \bar{A}\bar{D}) \vee A\bar{B} = B \vee A\bar{B} = B \vee A$$

$$\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}\bar{D} = \bar{A}B \vee \bar{A}(\bar{B} \vee \bar{D}) = \bar{A}B \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{D} = \bar{A}(B \vee \bar{B}) \vee \bar{A} \cdot \bar{D} = \bar{A} \vee \bar{A} \cdot \bar{D} = \bar{A}$$

1. Перемножим полученные выражения.

$$(B \vee A) \cdot \bar{A} = \bar{A}B \vee A \cdot \bar{A} = \bar{A}B$$

2. Таким образом, $(ABD \vee A\bar{B} \vee B\bar{A}\bar{D}) \cdot (AD \vee \bar{A}BD \vee \bar{A}\bar{B}\bar{D}) = \bar{A}B$.

Равносильные формулы алгебры логики



Две формулы алгебры логики A и B называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений элементарных высказываний, входящих в формулу. Запись $A=B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Например, очевидно, что равносильны формулы:

$$\begin{aligned} X &= X; & X \& X &= X; & X \& 0 &= 0; & X \vee 1 &= 1; & \overline{\overline{X}} &= X; & X \vee \overline{X} &= 1; \\ X \vee X &= X; & X \& 1 &= X; & X \& \overline{X} &= 0; & X \vee \overline{X} &= 1; & \overline{\overline{A}} &= A; & \overline{A \& B} &= \overline{A} \vee \overline{B}; \end{aligned}$$

Легко видеть, что если $A = B$, то $\overline{A} = \overline{B}$.

Нормальные формы логических выражений



Совершенная дизъюнктивно нормальная форма (**СДНФ**):
ДНФ, удовлетворяющая условиям:

- Все элементарные конъюнкции различны;
- Нет нулевых конъюнкций;
- Ни одна из элементарных конъюнкций не повторяется;
- Каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные или их отрицания.

Аналогичны условия для **СКНФ**.

СДНФ и **СКНФ** используются при проектировании элементов и узлов компьютера



- **СДНФ.** Для всех наборов переменных, на которых функция принимает единичные значения, записываются конъюнкции этих переменных, инвертируя те переменные, которым соответствуют нулевые значения. Затем конъюнкции соединяют знаком дизъюнкции.

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\bar{A}B \vee A\bar{B}$$

- **СКНФ.** Для всех наборов переменных, на которых функция принимает нулевые значения, записываются конъюнкции этих переменных, инвертируя те переменные, которым соответствуют единичные значения. Затем дизъюнкции соединяют знаком конъюнкции.

$$(\bar{A} \vee \bar{B})(A \vee B)$$



$$(C \xrightarrow{3} (\bar{A} \xleftrightarrow{2} B \vee 0)) \xrightarrow{*} (A \overset{4}{C} \vee B \xleftrightarrow{6} A \overset{5}{B})$$

A	B	C	①	②	③*	④	⑤	⑥	⑦*	$A \overset{4}{C} \vee B \xleftrightarrow{6} A \overset{5}{B}$		
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1

* "из правды не может следовать ложь."



$$\begin{aligned} & \overline{C} \vee \overline{A}(B \vee C) \vee A \overline{B} \vee C \vee (A \vee B) A B C \vee A \vee B \cdot \overline{A B C} = \\ & = C \cdot (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee A B C \vee A \vee B \cdot (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) = \\ & = (A \vee \underbrace{C \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}_0) \cdot (\overline{A} \vee B \vee C) \vee A B C \vee (\overline{A} \vee \overline{C}) \cdot \underbrace{\overline{B} \cdot (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C})}_B = \end{aligned}$$

$$= \cancel{A B C} \vee A \vee C \vee \overline{A} \overline{B} \vee \overline{B} \overline{C} = \overline{B} \vee A \vee C$$

симметричная трехгласная каноническая по 2-м переменным

Контрольные задания

6. Привести формулу к минимальной ДНФ:

$$[(A\bar{B} \rightarrow C) \rightarrow B] \rightarrow (C \leftrightarrow A \vee B).$$

Ответы: 1) $B\bar{A} \vee \bar{B}C$ 2) $C \vee \bar{B} \cdot \bar{A}$ 3) $A\bar{C} \vee CB$
4) $C \vee B\bar{A}$ 5) $AB \vee AC \vee BC$

6. Привести формулу к минимальной ДНФ:

$$[AB \rightarrow (A \vee \bar{C} \rightarrow \bar{B})] \rightarrow (A \vee C \leftrightarrow B \vee \bar{C}).$$

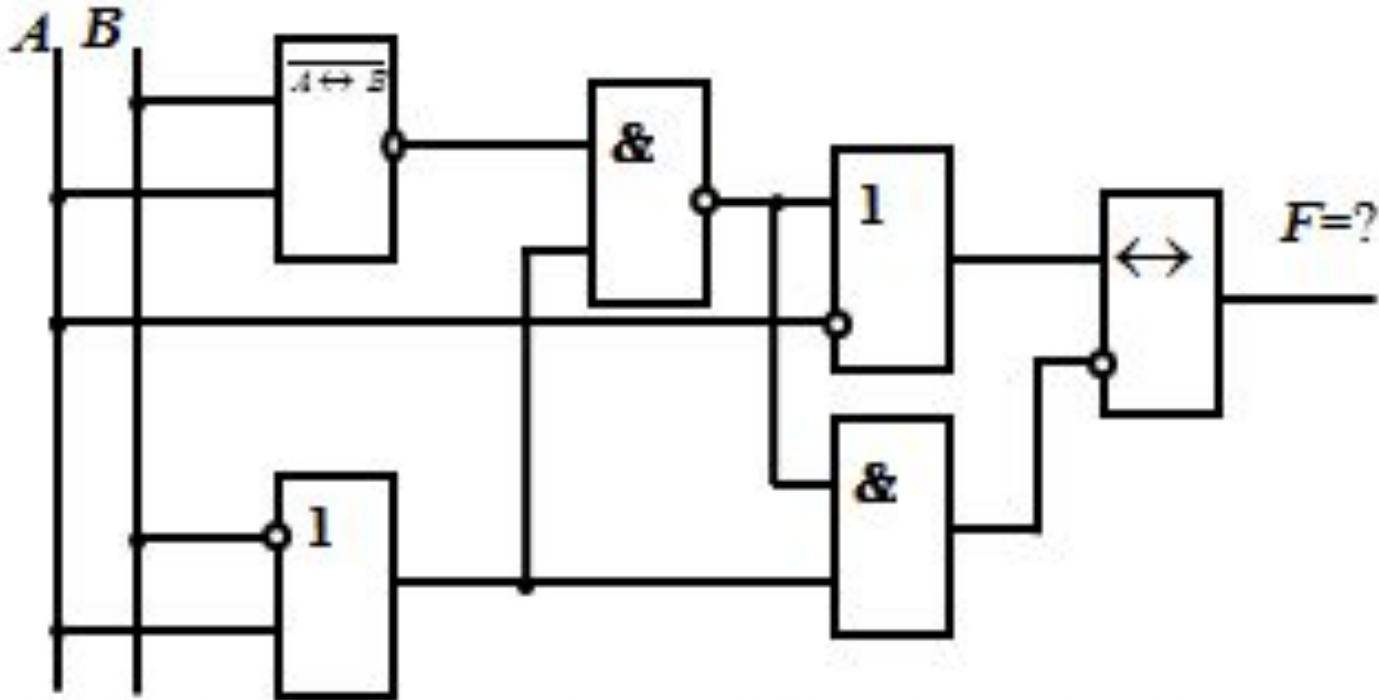
Ответы: 1) $B\bar{A} \vee \bar{B}C$ 2) $C \vee \bar{B} \cdot \bar{A}$ 3) $A\bar{C} \vee CB$
4) $C \vee B\bar{A}$ 5) $AB \vee AC \vee BC$

Контрольные задания

- 
1. Представить в МДНФ: $\overline{A \vee B \rightarrow \bar{B} \vee C} \leftrightarrow (\bar{A} \cdot B \vee \overline{A \cdot C}) \cdot (A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C)$
 2. Даны три числа в различных системах счисления: $A=16_{(10)}$, $B=21_{(8)}$, $C=12_{(10)}$. Выполните следующие логические операции: $AB+C$. Ответ напишите в шестнадцатеричной системе счисления и в десятичной системе.
 3. Постройте таблицу истинности для логической функции $(C \rightarrow (\bar{A} \leftrightarrow B+C)) \rightarrow (AC+B \leftrightarrow \bar{A}BC)$.
 4. Построить логическую функцию по заданной таблице истинности, которая имеет нулевые значения при следующих наборах переменных A, B, C : (001), (010), (011), (110).

Контрольные задания

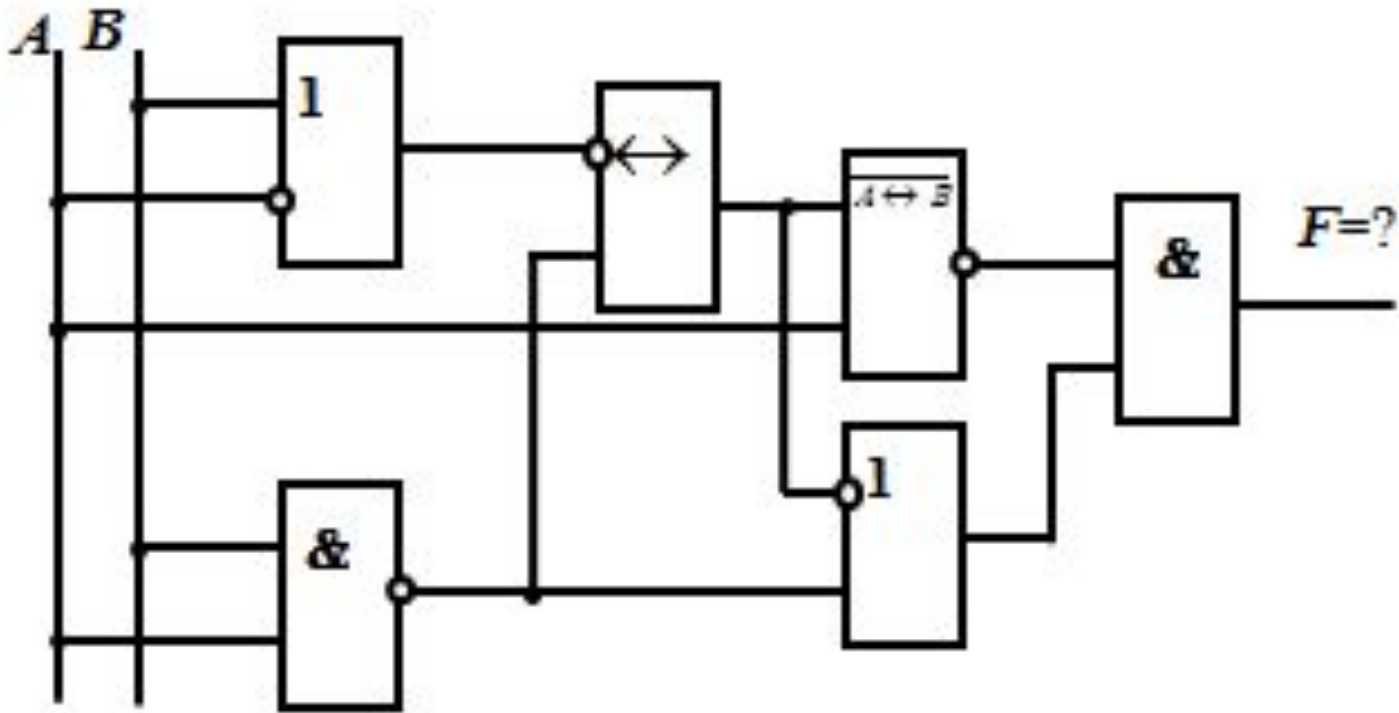
7. Какую логическую функцию $F(A, B)$ реализует приведенная комбинационная схема?



Ответы: 1) $A \leftrightarrow B$ 2) B 3) $A \cdot \overline{B}$ 4) $\overline{A}$ 5) $\overline{A \vee B}$

Контрольные задания

7. Какую логическую функцию $F(A, B)$ реализует приведенная комбинационная схема?



Ответы: 1) $A \leftrightarrow B$ 2) $\overline{A \leftrightarrow B}$ 3) $A \cdot \overline{B}$ 4) $\overline{A}$ 5) $\overline{A \vee B}$