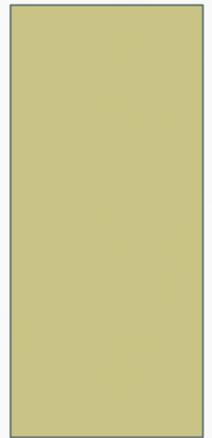


ИСТОРИЯ ЧИСЕЛ И СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ



ИСТОРИЯ ЧИСЕЛ

- История записи чисел и систем счисления ведётся с появления счета у людей. Люди изображали количество различных предметов с помощью засечек или черточек. Их наносили на поверхности, служившие в то время «бумагой»: глиняные дощечки, древесную кору или камни. Первые сведения о таких записях археологи относят к периоду палеолита, то есть к 10-11 тысячелетию до нашей эры. Маленькие дети показывают свой возраст на пальцах. Лётчик сбил самолёт, ему за это рисуют звёздочку, Робинзон Крузо считал дни зарубками.
- Числом обозначали некоторые реальные объекты, свойства которых были одинаковы. Когда мы что-то считаем или пересчитываем, мы как бы обезличиваем предметы, т.е. подразумеваем, что их свойства одинаковы. Но самым главным свойством числа является наличие объекта, т.е. единица и его отсутствие, т.е. ноль.

- Система, которой пользовались древние греки, называлась аттической. Первые четыре числа записывались черточками. Для числа пять существовал свой знак – «пи», как и для числа десять – первая буква слова «дека». Сотня, тысяча и десять тысяч на письме обозначались как Н, Х, М.
- На смену этой системе в третьем веке до нашей эры пришла ионийская система. Числа от одного до девяти в ней обозначались буквами греческого алфавита: с первой по девятую. Буквами с десятую по восемнадцатую обозначались десятки – от десяти до девяноста. И последними девятью записывались сотни – от ста до девятисот.
- С помощью алфавита также записывали числа восточные и южные славяне. Часть из них пользовалась славянским алфавитом, наделяя каждую букву числовым значением. Другая – только теми буквами, которые встречаются в греческом алфавите. Отличать буквы от цифр позволял специальный значок, который ставился над числом – «титло». Такая нумерация применялась в России до XVIII века.

ПОНЯТИЕ ЦИФРЫ

- Что такое цифра?
- Это алфавит чисел, набор символов, с помощью которых мы кодируем числа. Цифры – числовой алфавит. Цифры и числа – это разные вещи! Рассмотрим два числа 52 и 25. Цифры одни и те же – 5 и 2. А чем эти числа отличаются? Порядком цифр? – Да! Но лучше сказать - позицией цифры в числе. Положение цифры в записанном числе в непозиционных системах не влияют на величину, которая ей обозначается. Это, к примеру, системы, использующие буквы для записи цифр – славянская и римская.
- Положение цифры в позиционных системах определяет значение величины, которая ей записана. При этом позиция – место, которое занимает эта цифра в числе. А количество цифр, которые используются для записи, называются основанием системы. Примерами такой системы – вавилонская шестидесятеричная и современная десятичная.

•

•

ПОНЯТИЕ ЧИСЛА

- Первоначально понятие отвлечённого числа отсутствовало, число было "привязано" к тем конкретным предметам, которые пересчитывали. Отвлечённое понятие натурального числа появляется вместе с развитием письменности. Дробные же числа изобрели тогда, когда возникла необходимость производить измерения. Измерение, как известно, это сравнение с другой величиной того же рода, выбираемой в качестве эталона.
- Эталон называется ещё единицей измерения. Понятно, что единица измерения не всегда укладывалась целое число раз в измеряемой величине. Отсюда и возникла практическая потребность ввести более "мелкие" числа, чем натуральные. Дальнейшее развитие понятия числа было обусловлено уже развитием математики.
- Понятие числа - фундаментальное понятие как математики, так и информатики. В дальнейшем при изложении материала под числом мы будем понимать его величину, а не его символьную запись.

ПОНЯТИЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

- Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с использованием особых знаковых систем, которые называются системами счисления. Алфавит систем счисления состоит из символов, которые называются цифрами. Например, в десятичной системе счисления числа записываются с помощью десяти всем хорошо известных цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Система счисления — это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.
- Все системы счисления делятся на две большие группы: позиционные и непозиционные системы счисления.
- В позиционных системах счисления значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных — не зависит.
- Непозиционные системы счисления возникли раньше позиционных, поэтому рассмотрим сначала различные непозиционные системы счисления.

НЕПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА

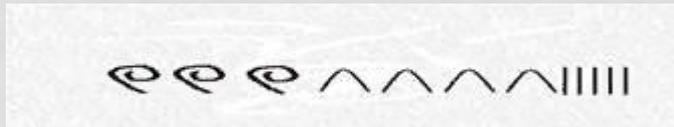
- Непозиционной системой счисления называется такая система счисления, у которой количественный эквивалент («вес») цифры не зависит от ее местоположения в записи числа.
- К непозиционным системам относятся: римская система счисления, алфавитные системы счисления и другие.
- Сначала люди просто различали ОДИН предмет перед ними или нет. Если предмет был не один, то говорили «МНОГО».
- Первыми понятиями математики были "меньше", "больше", "столько же".
- Если одно племя меняло пойманных рыб на сделанные людьми другого племени каменные ножи, не нужно было считать, сколько принесли рыб и сколько ножей. Достаточно было положить рядом с каждой рыбой по ножу, чтобы обмен между племенами состоялся.
- Счет появился тогда, когда человеку потребовалось сообщать своим соплеменникам о количестве найденных им предметов.
- И, так как многие народы в древности не общались друг другом, то у разных народов возникли разные системы счисления и представления чисел и цифр.

ЕДИНИЧНАЯ СИСТЕМА

- Потребность в записи чисел появилась в очень древние времена, как только люди начали считать. Количество предметов, например овец, изображалось нанесением чёрточек или засечек на какой-либо твёрдой поверхности: камне, глине, дереве (до изобретения бумаги было ещё очень и очень далеко). Каждой овце в такой записи соответствовала одна чёрточка. Археологами найдены такие "записи" при раскопках культурных слоёв, относящихся к периоду палеолита (10 - 11 тысяч лет до н.э.).
- Учёные назвали этот способ записи чисел единичной ("палочной") системой счисления. В ней для записи чисел применялся только один вид знаков - "палочка". Каждое число в такой системе счисления обозначалось с помощью строки, составленной из палочек, количество которых и равнялось обозначаемому числу.
- Неудобства такой системы записи чисел и ограниченность её применения очевидны: чем большее число надо записать, тем длиннее строка из палочек. Да и при записи большого числа легко ошибиться, нанеся лишнее количество палочек или, наоборот, не дописав их.
- Можно предложить, что для облегчения счёта люди стали группировать предметы по 3, 5, 10 штук. И при записи использовали знаки, соответствующие группе из нескольких предметов. Естественно, что при подсчёте использовались пальцы рук, поэтому первыми появились знаки для обозначения группа предметов из 5 и 10 штук (единиц). Таким образом, возникли уже более удобные системы записи чисел.

ДРЕВНЕЕГИПЕТСКАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ НЕПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА

- В древнеегипетской системе счисления, которая возникла во второй половине третьего тысячелетия до н.э., использовались специальные цифры для обозначения чисел 1, 10, 100, 1000. Числа в египетской системе счисления записывались как комбинации этих цифр, в которых каждая из них повторялась не более девяти раз.
- Пример. Число 345 древние египтяне записывали так:



- Единицы Десятки Сотни



- В основе как палочной, так и древнеегипетской системы счисления лежал простой принцип сложения, согласно которому значение числа равно сумме значений цифр, участвующих в его записи. Учёные относят древнеегипетскую систему счисления к десятичной непозиционной.



РИМСКАЯ СИСТЕМА

- Знакомая нам римская система не слишком принципиально отличается от египетской. В ней для обозначения чисел 1, 5, 10, 50, 100, и 1000 используются заглавные латинские буквы I, V, X, C, D и M соответственно, являющиеся цифрами этой системы счисления.
- Число в римской системе счисления обозначается набором стоящих подряд цифр. Значение числа равно:
 1. сумме значений идущих подряд нескольких одинаковых цифр (назовём их группой первого вида);
 2. разности значений двух цифр, если слева от большей цифры стоит меньшая. В этом случае от значения большей цифры отнимается значение меньшей цифры. Вместе они образуют группу второго вида. Заметим, что левая цифра может быть меньше правой максимум на один порядок: так, перед L(50) и C(100) из "младших" может стоять только X(10), перед D(500) и M(1000) - только C(100), перед V(5) - только I(1);
 3. сумме значений групп и цифр, не вошедших в группы первого или второго вида.
- Пример 1. Число 32 в римской системе счисления имеет вид XXXII=(X+X+X)+(I+I)=30+2 (две группы первого вида).
- Пример 2. Число 444, имеющее в своей десятичной записи 3 одинаковые цифры, в римской системе счисления будет записано в виде CDXLIV=(D-C)+(L-X)+(V-I)=400+40+4 (три группы второго вида).
- Пример 3. Число 1974 в римской системе счисления будет иметь вид MCMLXXIV=M+(M-C)+L+(X+X)+(V-I)=1000+900+50+20+4 (наряду с группами обоих видов в формировании числа участвуют отдельные "цифры").

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

- Позиционной системой счисления называется такая система счисления, у которой количественный эквивалент («вес») цифры зависит от ее местоположения в записи числа.
- Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.
- Основание позиционной системы счисления — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.
- За основание можно принять любое натуральное число — два, три, четыре, ..., образовав новую позиционную систему: двоичную, троичную, четверичную и ...

-

ВАВИЛОНСКАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА

- Впервые идея позиционной системы счисления возникла в Древнем Вавилоне.
- В позиционных системах счисления количественное значение, обозначаемое цифрой в записи числа, зависит от позиции цифры в числе.
- Основание позиционной системы счисления равно количеству используемых в системе цифр.
- Система счисления, применяемая в современной математике, является позиционной десятичной системой. Ее основание равно десяти, так как запись любых чисел производится с помощью десяти цифр:
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Хотя десятичную систему принято называть арабской, но зародилась она в Индии в V веке. В Европе об этой системе узнали в XII веке из арабских научных трактатов, которые были переведены на латынь. Этим и объясняется название «арабские цифры». Однако широкое распространение в науке и в обиходе десятичная позиционная система получила только в XVI веке. Эта система позволяет легко выполнять любые арифметические вычисления. Записывать сколь угодно большие числа. Распространение арабской системы дало мощный толчок развитию математики.
- С позиционной десятичной системой счисления вы знакомы с раннего детства, только, возможно, не знали, что она так называется.
- Что означает свойство позиционности системы счисления, легко понять на примере любого многозначного десятичного числа. Например, в числе 333 первая тройка означает три сотни, вторая — три десятка, третья — три единицы. Одна и та же цифра в зависимости от позиции в записи числа обозначает разные значения.
- $333 = 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3$.
- Еще пример:
- $32\,478 = 3 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.
- Отсюда видно, что всякое десятичное число можно представить как сумму произведений составляющих его цифр на соответствующие степени десятки. То же самое относится и к десятичным дробям.
- $26,387 = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.
- Очевидно, число «десять» — не единственно возможное основание позиционной системы. Известный русский математик Н. Н. Лузин так выразился по этому поводу: «Преимущества десятичной системы не математические, а зоологические. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмеричной системой».
- За основание позиционной системы счисления можно принять любое натуральное число, большее 1. Упомянутая выше вавилонская система имела основание 60. Следы этой системы сохранились до наших дней в порядке счета единиц времени (1 час = 60 минут, 1 минута = 60 секунд).
- Для записи чисел в позиционной системе с основанием n нужно иметь алфавит из n цифр. Обычно для этого при $n < 10$ используют n первых арабских цифр, а при $n > 10$ к десяти арабским цифрам добавляют буквы.