

Методы вычислений

Вычисление НОД

НОД = наибольший общий делитель двух натуральных чисел – это наибольшее число, на которое оба исходных числа делятся без остатка.

Перебор:

1. Записать в переменную k минимальное из двух чисел.
2. Если a и b без остатка делятся на k , то стоп.
3. Уменьшить k на 1.
4. Перейти к шагу 2.

это цикл с условием!



Где будет НОД?



Почему алгоритм обязательно закончится?

Вычисление НОД (перебор)

```
k := a; { или k := b; }  
while (a mod k <> 0) or  
      (b mod k <> 0) do  
  k := k - 1;  
writeln ('НОД(' , a , ', ' , b , ')=' , k);
```

ИЛИ

 Почему можно начинать с любого числа?

 Как начать с минимального?

 много операций для больших чисел

Алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a-b, b) \\ &= \text{НОД}(a, b-a)\end{aligned}$$

Заменяем большее из двух чисел **разностью** большего и меньшего до тех пор, пока они не станут равны. Это и есть НОД.



Евклид
(365-300 до. н. э.)

Пример:

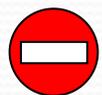
$$\begin{aligned}\text{НОД}(14, 21) &= \text{НОД}(14, 21-14) = \text{НОД}(14, 7) \\ &= \text{НОД}(7, 7) = 7\end{aligned}$$

Реализация алгоритма Евклида

```
пока  $a \neq b$  делай  
  если  $a > b$ , то  
     $a := a - b$   
  иначе  $b := b - a$ ;
```



Где будет НОД? Как его вывести?



много шагов при большой разнице чисел:

$$\text{НОД}(1998, 2) = \text{НОД}(1996, 2) = \dots = 2$$

Модифицированный алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a \bmod b, b) \\ &= \text{НОД}(a, b \bmod a)\end{aligned}$$

Заменяем большее из двух чисел **остатком от деления** большего на меньшее до тех пор, пока меньшее не станет равно нулю. Тогда большее — это НОД.

Пример:

$$\text{НОД}(14, 21) = \text{НОД}(14, 7) = \text{НОД}(0, 7) =$$

Еще ⁷ один вариант:

$$\text{НОД}(2 \cdot a, 2 \cdot b) = 2 \cdot \text{НОД}(a, b)$$

$$\text{НОД}(2 \cdot a, b) = \text{НОД}(a, b) \quad // \text{ при нечетном } b$$

Задания

«4»: Составить программу для вычисления НОД и заполнить таблицу:

N	64168	358853	6365133	17905514	549868978
M	82678	691042	11494962	23108855	298294835
НОД(N,M)					

«5»: То же самое, но сравнить для всех пар число шагов обычного и модифицированного алгоритмов (добавить в таблицу еще две строчки).

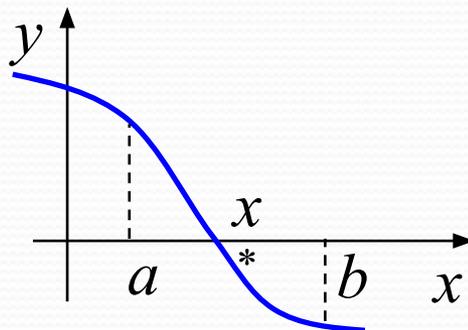
Методы вычислений

Тема 2. Решение уравнений

- Точные (аналитические)

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Приближенные
 - графические



- Численные

(методы последовательного приближения):

- 1) по графику найти интервал $[a, b]$, в котором находится x^* (или одно **начальное приближение** x_0)
- 2) по некоторому алгоритму уточнить решение, сужая интервал, в котором находится x^*
- 3) повторять шаг 2, пока не достигнута требуемая точность:

$$b - a < \varepsilon$$

Численные методы

Применение: используются тогда, когда точное (аналитическое) решение неизвестно или очень трудоемко.



- дают хотя бы какое-то **решение**

- во многих случаях можно оценить ошибку и найти решение **с заданной точностью**



- решение всегда приближенное, **неточное**

$$\sqrt{x+1} - 4 \sin(x-1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 1,3974 \quad \boxed{x \approx 1,3974}$$

Метод прямого перебора

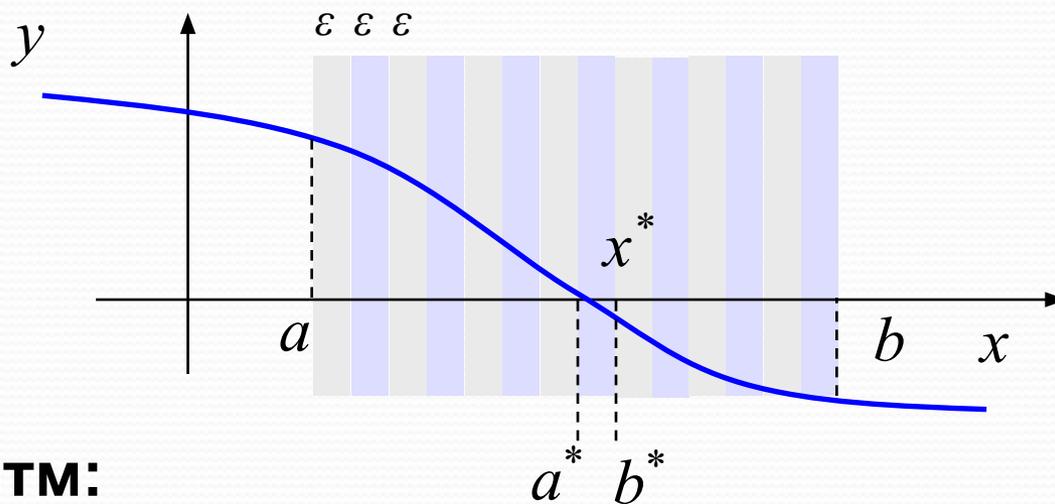
```
program qq;  
var ...: real;  
  
function f(x: real): real;  
begin  
    f := -x;  
end;  
  
begin  
    { основная программа }  
end.
```



Как найти все решения на $[a,b]$?

Метод прямого перебора

Задача: найти решение уравнения $f(x) = 0$ на интервале $[a, b]$ с заданной точностью ε (чтобы найденное решение отличалось от истинного не более, чем на ε).



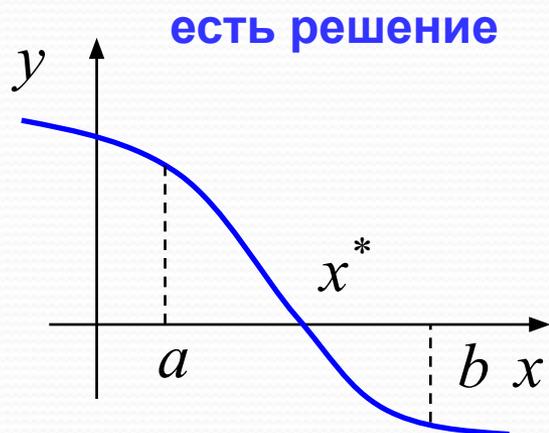
Алгоритм:

- разбить интервал $[a, b]$ на полосы шириной ε
- найти полосу $[a^*, b^*]$, в которой находится x^*
- решение – a^* или b^*



Как улучшить решение?

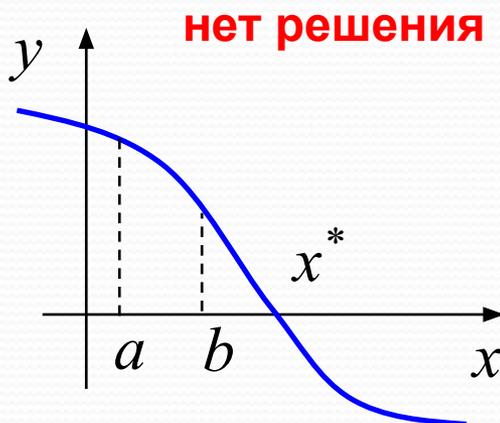
Есть ли решение на $[a, b]$?



$$f(a) > 0$$

$$f(b) < 0$$

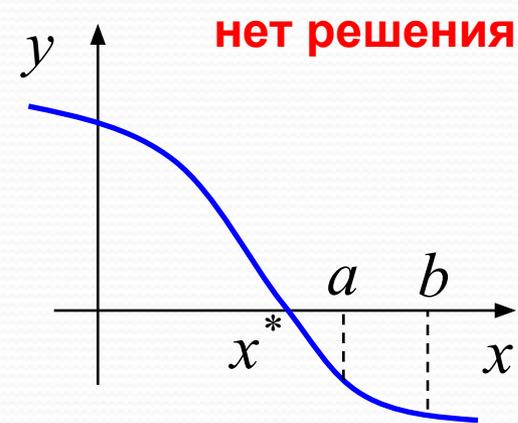
$$f(a)f(b) < 0$$



$$f(a) > 0$$

$$f(b) > 0$$

$$f(a)f(b) > 0$$



$$f(a) < 0$$

$$f(b) < 0$$



Если **непрерывная** функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервала $[a, b]$, то в некоторой точке x внутри $[a, b]$ она равна 0, то есть $f(x) = 0$!

Метод прямого перебора

```
eps := 0.001; { точность решения }
```

```
x := a;
```

```
пока  $f(x) * f(x+eps) > 0$  делай
```

```
  x := x + eps; { к следующему интервалу }
```

```
конец
```

```
ответ := x;
```



Как повысить точность без лишних вычислений?

```
eps := 0.001; { точность решения }
```

```
x := a;
```

```
while  $f(x) * f(x+eps) > 0$  do begin
```

```
  x := x + eps; { к следующему интервалу }
```

```
end;
```

```
x := x + eps/2;
```



Что опасно?

Метод дихотомии (деления пополам)



- простота
- можно получить решение с **любой** заданной **точностью**



- нужно знать **интервал** $[a, b]$
- на интервале $[a, b]$ должно быть только **одно** решение
- **большое число шагов** для достижения высокой точности
- только для функций **одной** переменной

Метод дихотомии (в программе)

```
пока  $b - a > \epsilon$  делай  
   $c := (a + b) / 2;$   
  если  $f(a) * f(c) < 0$  то  
     $b := c$   
  иначе  $a := c;$   
конец  
ответ  $:= (a + b) / 2;$ 
```

Задания

- «4»:** Найти все решения уравнения $x^2 = 5 \cos(x - 1)$ на интервале $[-5, 5]$ методом дихотомии и вывести их на экран.
- «5»:** Сделать задачу на «4» и сравнить число шагов цикла при использовании метода перебора и метода дихотомии.

Решение уравнений в Excel

Задача: найти все решения уравнения $x^2 = 5 \cos x$ на интервале $[-5, 5]$



Как решить математическими методами?

Методы решения уравнений:

- **аналитические:** решение в виде формулы $x = \dots$
- **численные:** *приближенное* решение, число
 - 1) выбрать *начальное приближение* x_0 «рядом» с решением



Как выбрать начальное приближение?

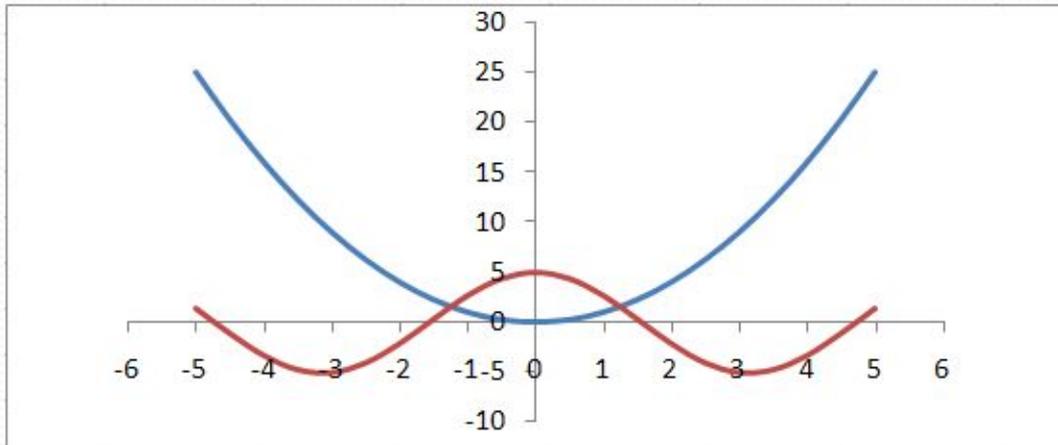
- 2) по некоторому алгоритму вычисляют первое приближение, затем – второе и т.д. $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$
- 3) вычисления прекращают, когда значение меняется очень мало (метод сходится) $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{15} \rightarrow x_{16} \approx x^*$

Решение уравнения $x^2 = 5 \cos x$

1. Таблица значений функций на интервале $[-5,5]$

	A	B	C	D
1	x	f1	f2	
2	-5	=A2^2	=5*COS(A2)	
3	-4,5			
4				

2. Графики функций (диаграмма «Точечная»)



2 решения:

начальные приближения

$$x_0 = -1,5$$

$$x_0 = 1,5$$

Решение уравнения $x^2 = 5 \cos x$

3. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,5	=E2^2	=5*COS(E2)	=F2-G2
3				

целевая ячейка

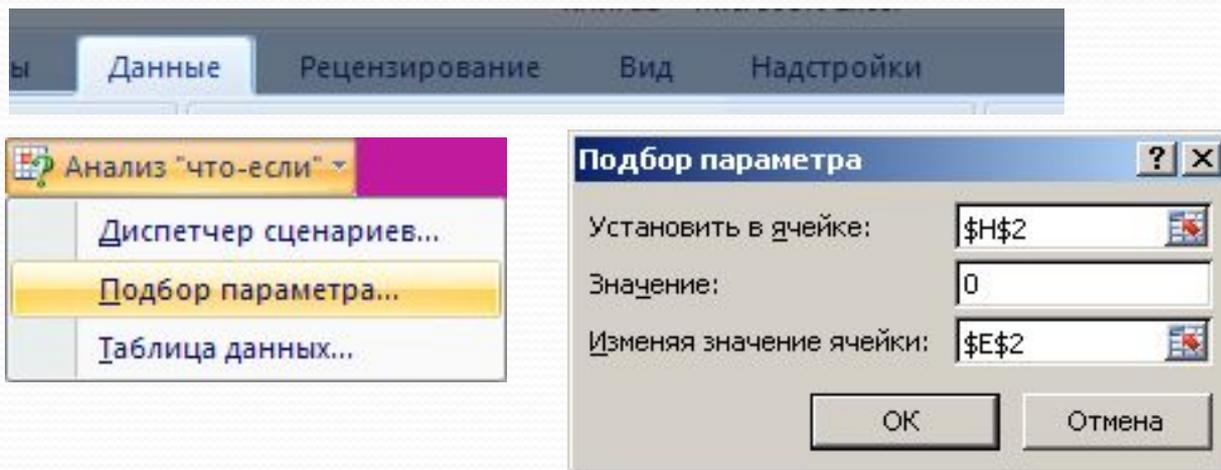
Цель: H2=0



Зачем нужна разность?

Решение уравнения $x^2 = 5 \cos x$

4. Подбор параметра



решение уравнения

	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,252	1,568	1,567	0,00053

ошибка



Почему не нуль?



Как найти второе решение?

Оптимизация

Оптимизация – это поиск оптимального (наилучшего) варианта в заданных условиях.

Оптимальное решение – такое, при котором некоторая заданная функция (*целевая функция*) достигает минимума или максимума.

Постановка задачи:

- **целевая функция**

$$f(x) \rightarrow \min \quad (\text{расходы, потери, ошибки})$$

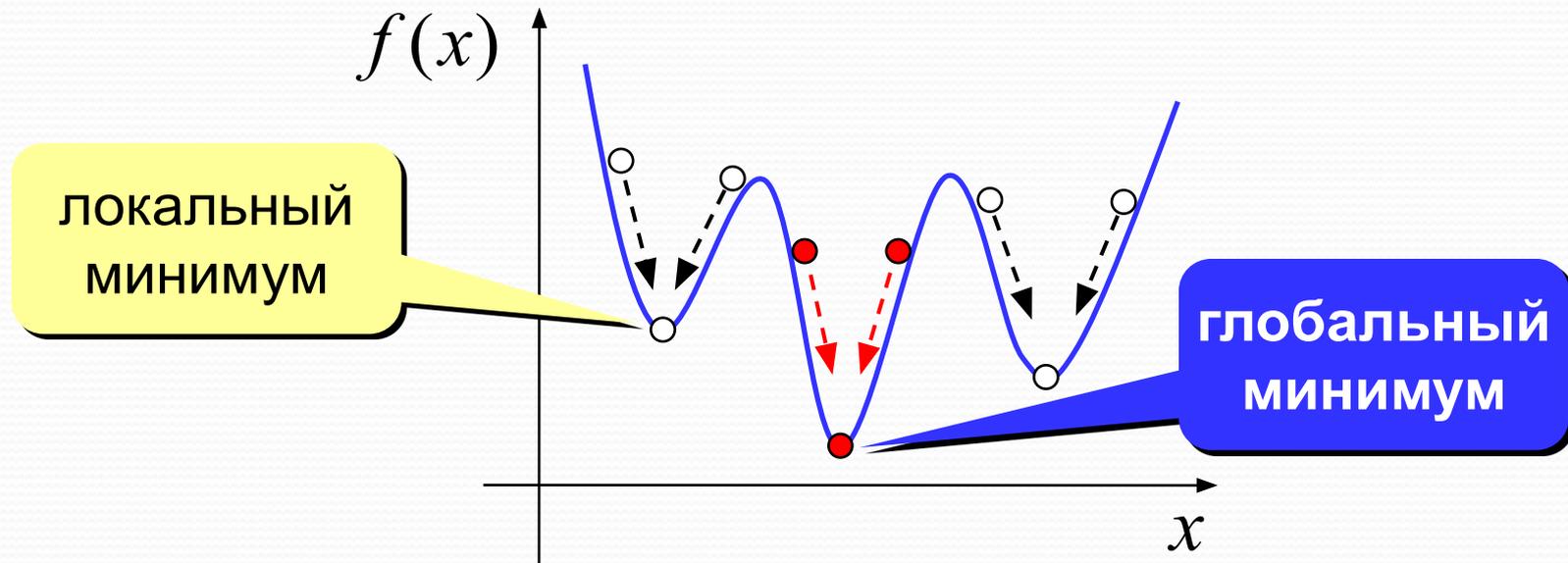
$$f(x) \rightarrow \max \quad (\text{доходы, приобретения})$$

- **ограничения**, которые делают задачу осмысленной

Задача без ограничений: построить дом
при минимальных затратах.

Решение: не строить дом вообще.

Оптимизация

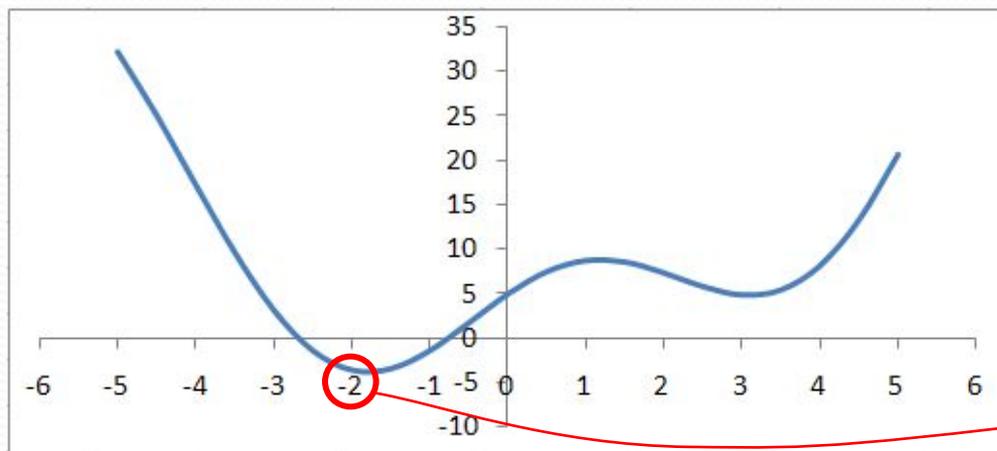


- обычно нужно найти **глобальный минимум**
- большинство численных методов находят только **локальный минимум**
- минимум, который найдет *Excel*, зависит от выбора начального приближения («шарик на горке скатится в ближайшую ямку»)

Поиск минимума функции

$$y = x^2 + 6 \sin x + 5 \cos x$$

1. Строим график функции (диаграмма «Точечная»)



Зачем нужен график?

начальное приближение

$$x_0 = -2$$

2. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

целевая ячейка



Изменение E2 должно влиять на F2!

Поиск минимума функции

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

3. Настройка «Поиск решения»

изменяемые
ячейки:

E2

D2:D6

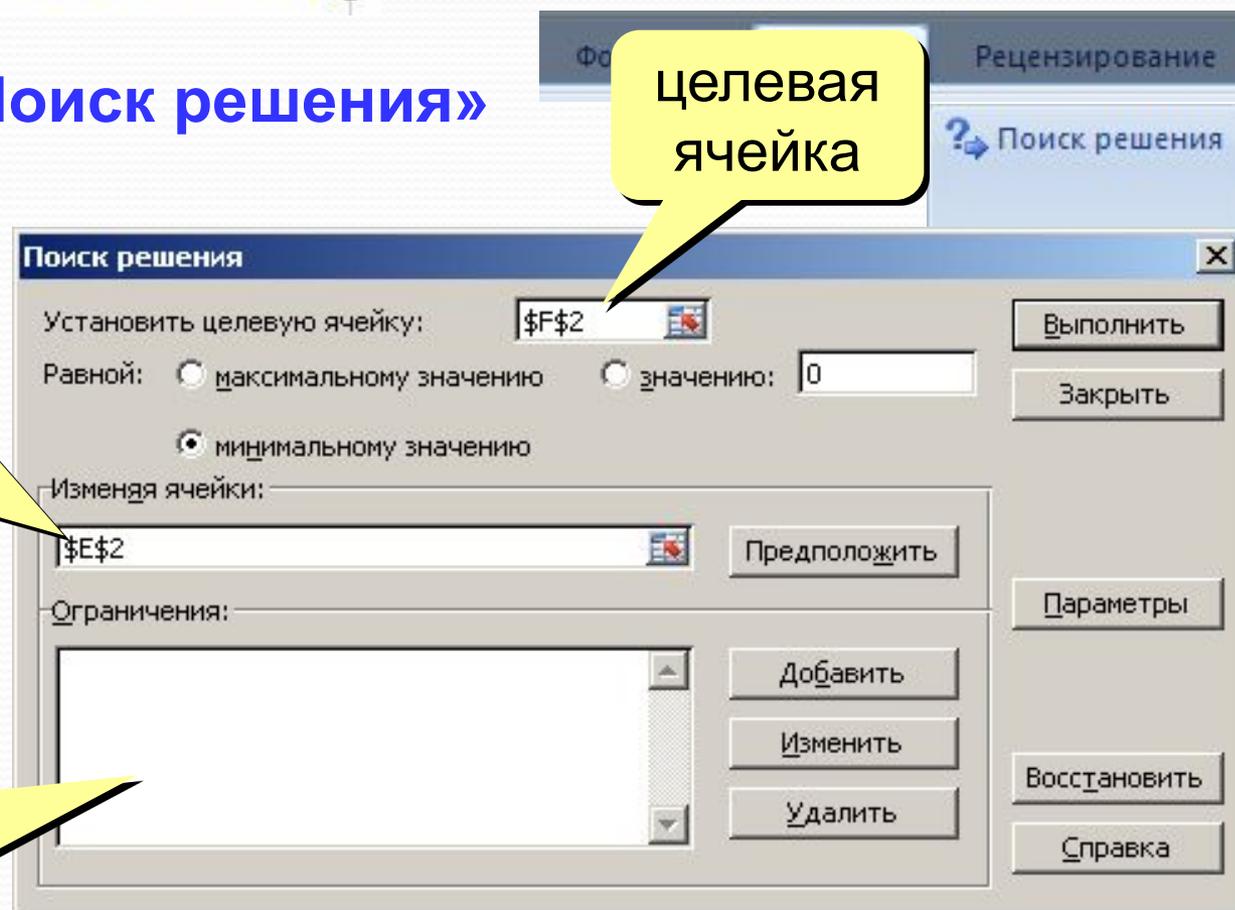
D2:D6; C5:C8

ограничения

A1 <= 20

B2:B8 >= 5

A1 = целое



Параметры оптимизации

Параметры поиска решения [X]

Максимальное время: секунд

Предельное число итераций:

Относительная погрешность:

Допустимое отклонение: %

Сходимость:

Линейная модель Автоматическое масштабирование

Неотрицательные значения Показывать результаты итераций

Оценки линейная квадратичная

Разности прямые центральные

Метод поиска Ньютона сопряженных градиентов