

Работа в Excel 2007

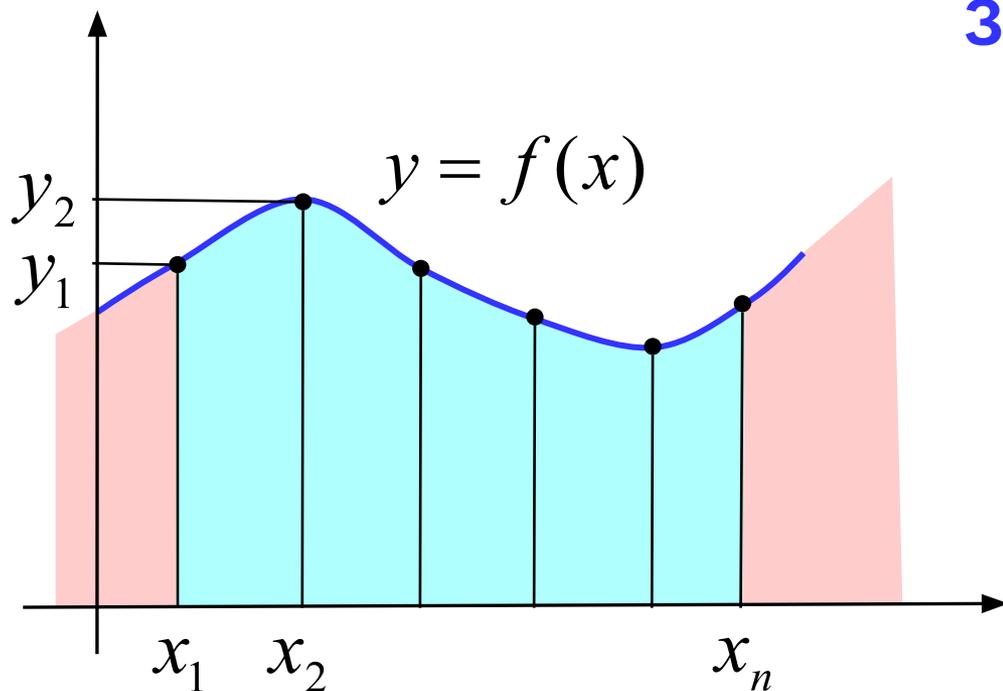
Восстановление зависимостей

Восстановление зависимостей

Два ряда одинаковой длины:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

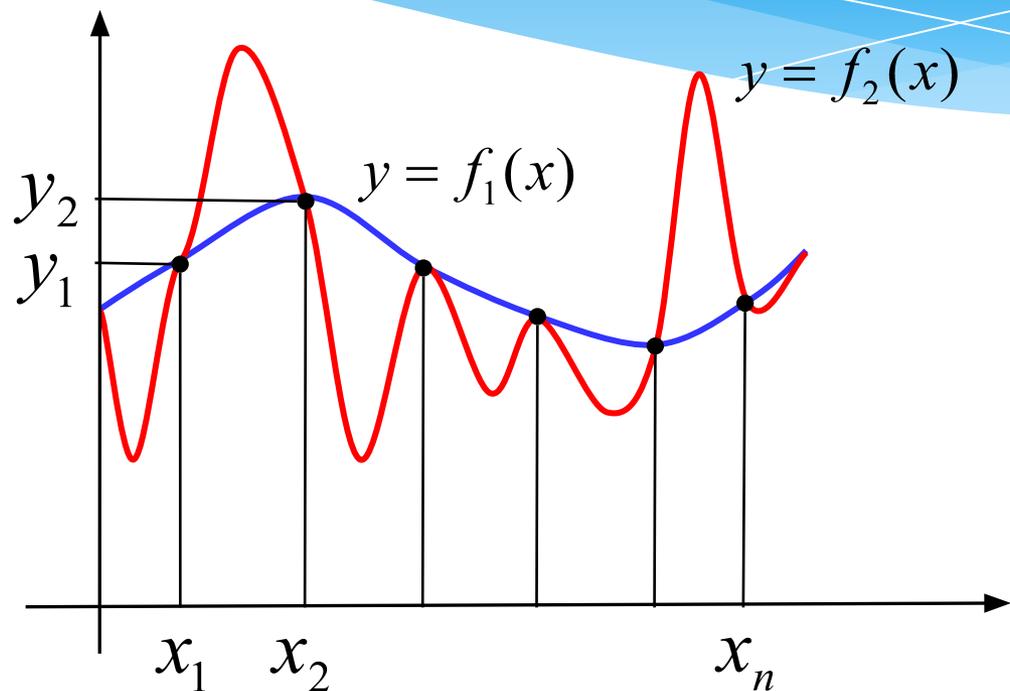
задают некоторую неизвестную функцию $y = f(x)$



Зачем:

- найти y в промежуточных точках (интерполяция)
- найти y вне диапазона измерений (экстраполяция, прогнозирование)

Какое решение нам нужно?

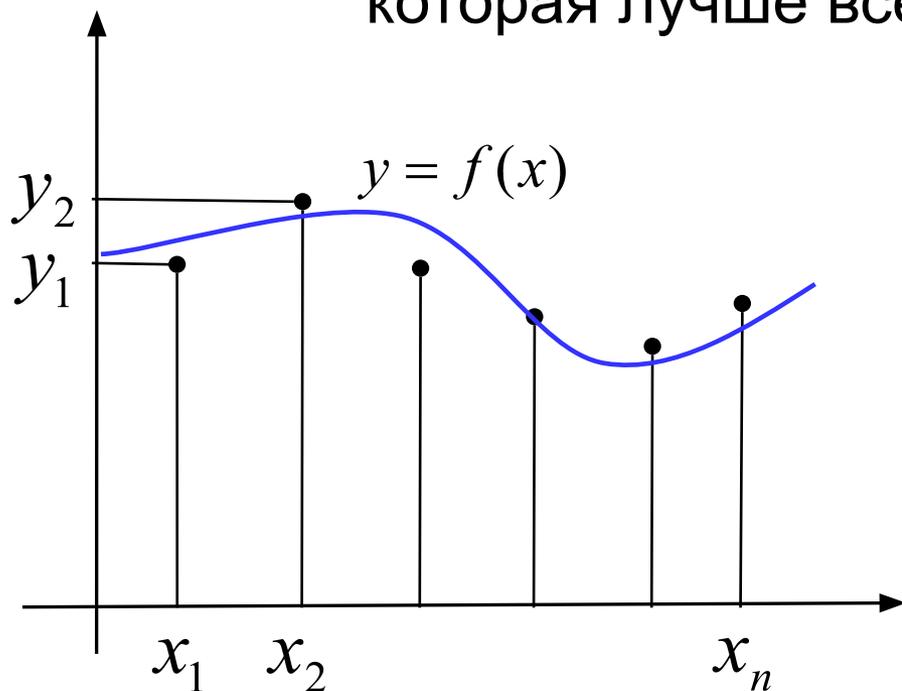


Через заданный набор точек проходит бесконечно много разных кривых!

Вывод: задача некорректна, поскольку решение неединственно.

Восстановление зависимостей

Корректная задача: найти функцию заданного вида, которая лучше всего соответствует данным.



Примеры:

•линейная $y = a \cdot x + b$

•полиномиальная
 $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

•степенная $y = a \cdot x^b$

•экспоненциальная

$$y = a \cdot e^{bx}$$

•логарифмическая

$$y = a \cdot \ln x + b$$



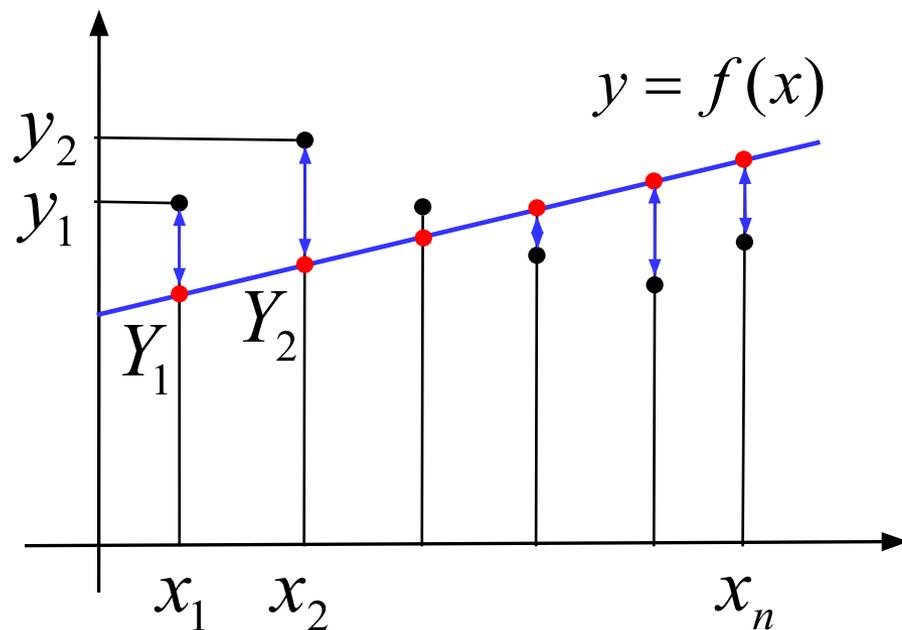
График функции не обязательно проходит через заданные точки!



Как выбрать функцию?

Что значит «лучше всего соответствует»?

Метод наименьших квадратов (МНК):



(x_i, y_i) заданные пары значений

$$Y_i = f(x_i)$$

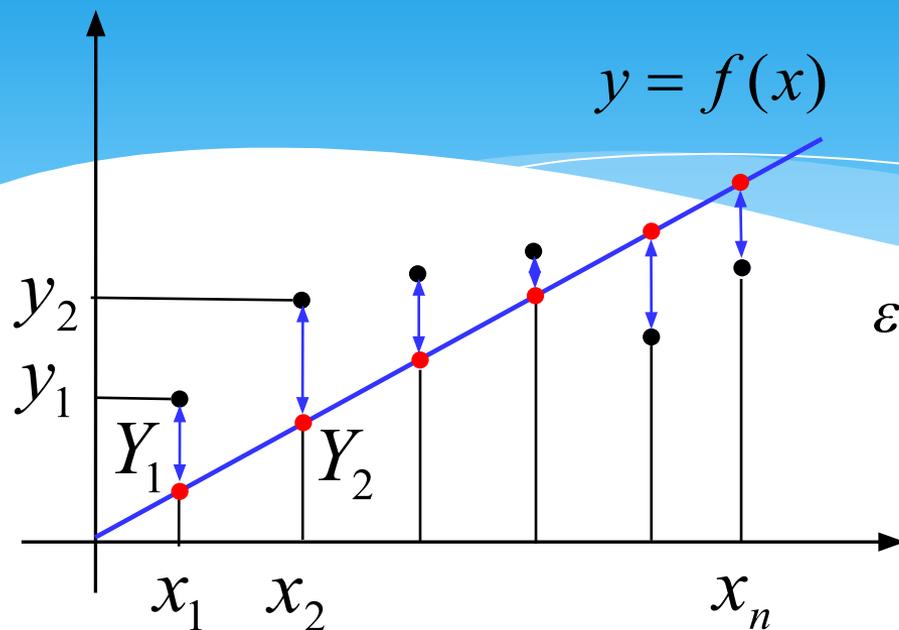
$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \rightarrow \min$$



Зачем возведение в квадрат?

- 1) чтобы складывать положительные значения
- 2) решение сводится к системе линейных уравнений (просто решать!)

МНК для линейной функции



НЕИЗВЕСТНО!

$$Y_i = k \cdot x_i$$

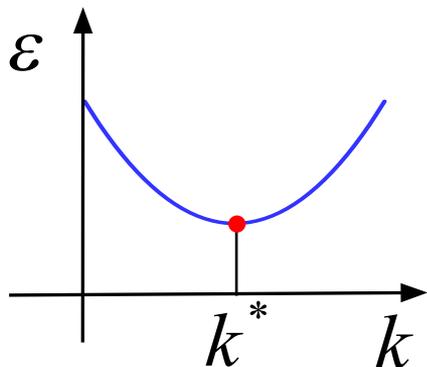
$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2 \\ &= k^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - k \cdot 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned}$$

a

$-b$

c

$$\varepsilon(k) = ak^2 + bk + c \rightarrow \min$$



$$k^* = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Коэффициент достоверности

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

(x_i, y_i) заданные пары значений

$$Y_i = f(x_i)$$

\bar{y} – среднее значение y_i

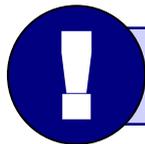
Крайние случаи:

- если график проходит через точки:

$$R^2 = 1$$

- если считаем, что y не меняется и $Y_i = \bar{y}$.

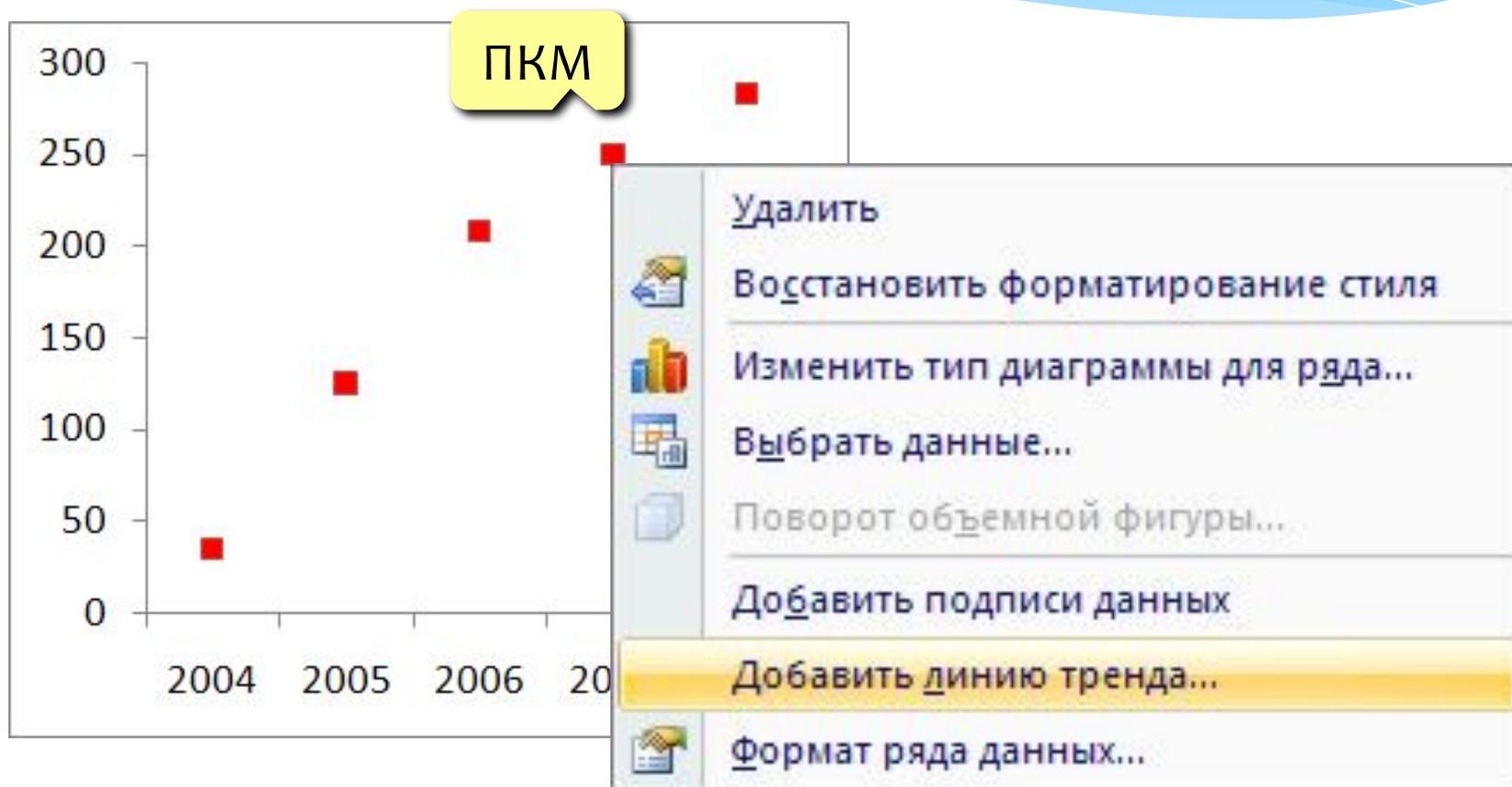
$$R^2 = 0$$



Фактически – метод наименьших квадратов!

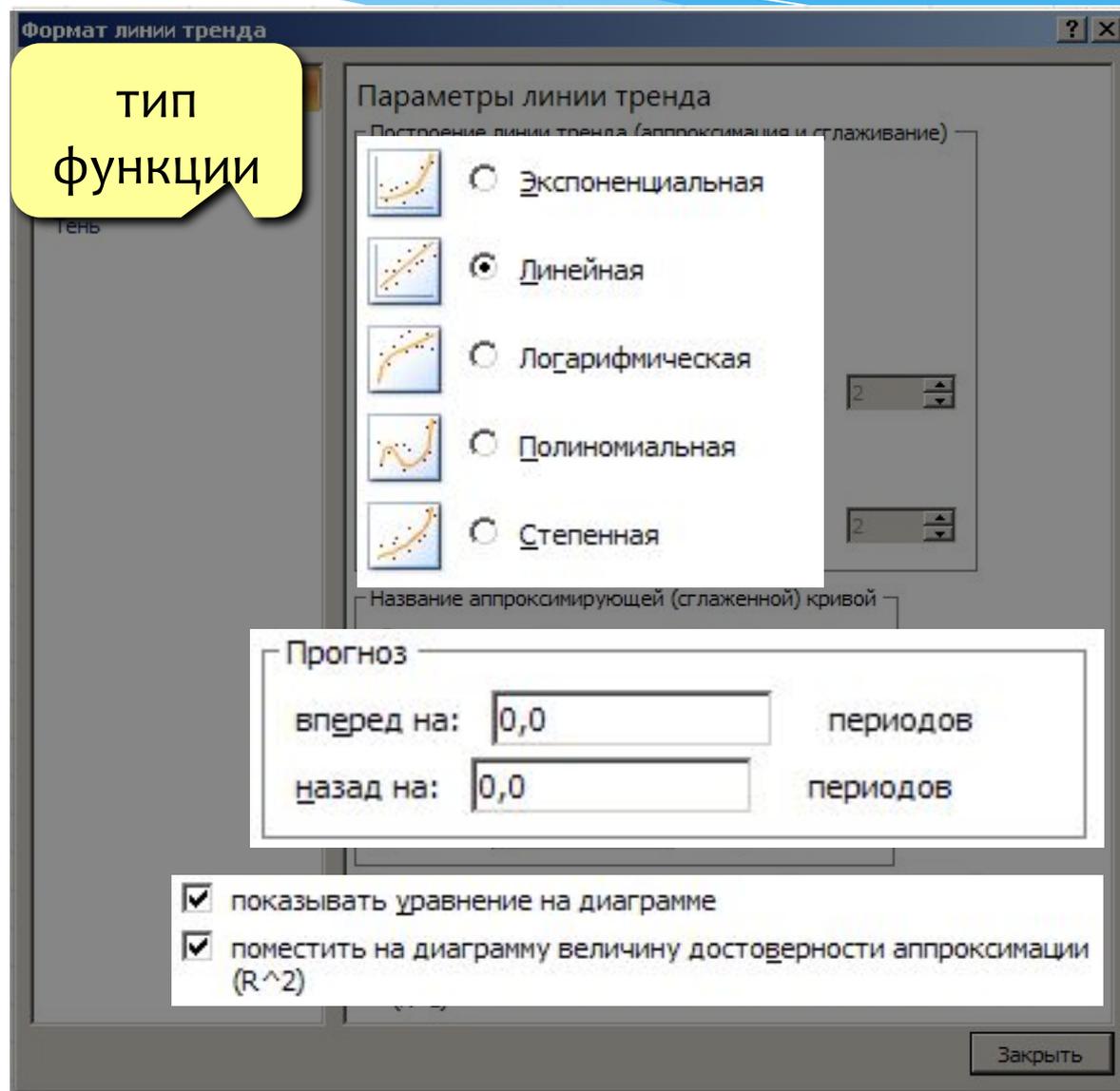
Восстановление зависимостей

Диаграмма «График»:

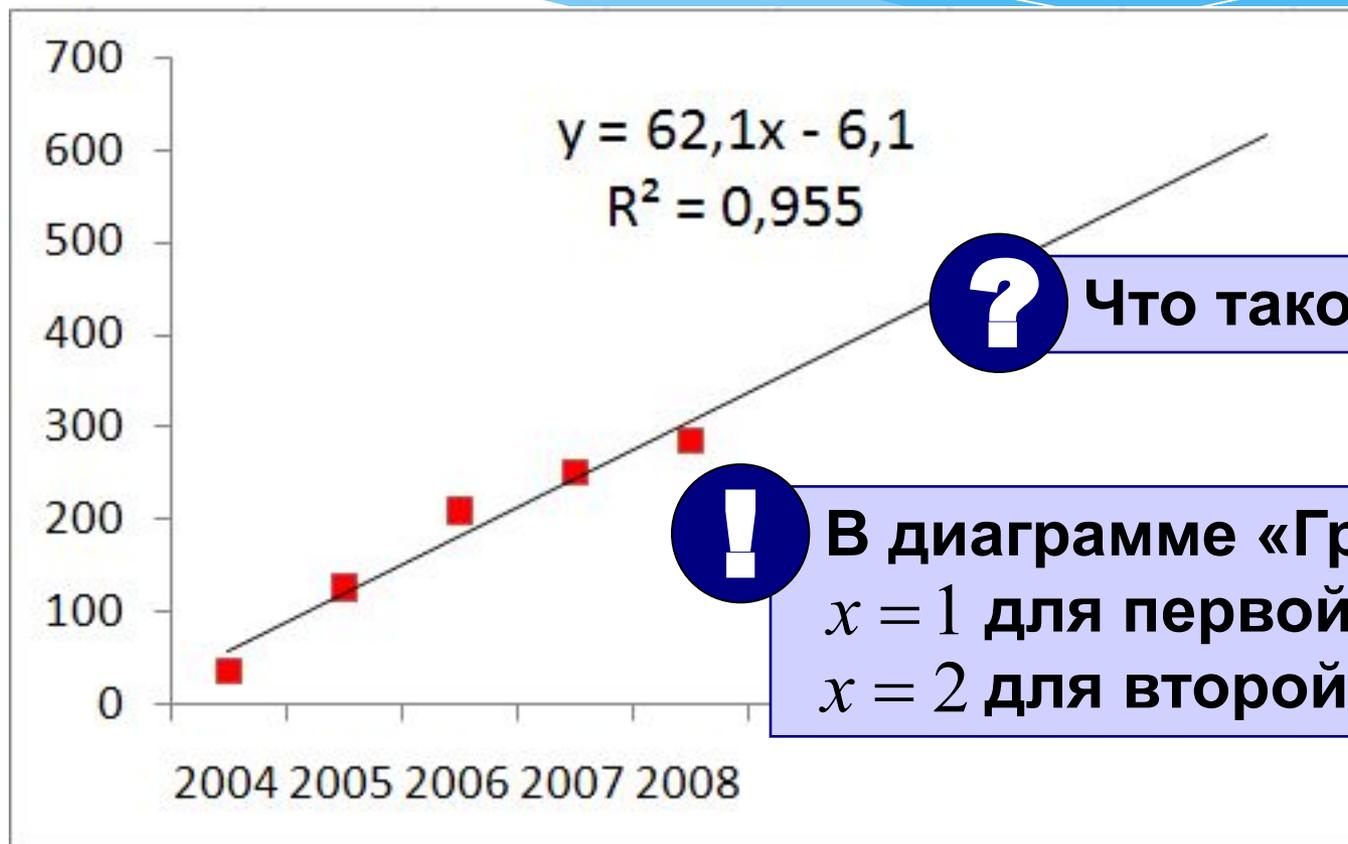


Восстановление зависимостей

ТИП
функции



Восстановление зависимостей



Что такое x ?



В диаграмме «График»
 $x = 1$ для первой точки,
 $x = 2$ для второй и т.д.



Насколько хорошо выбрана функция?