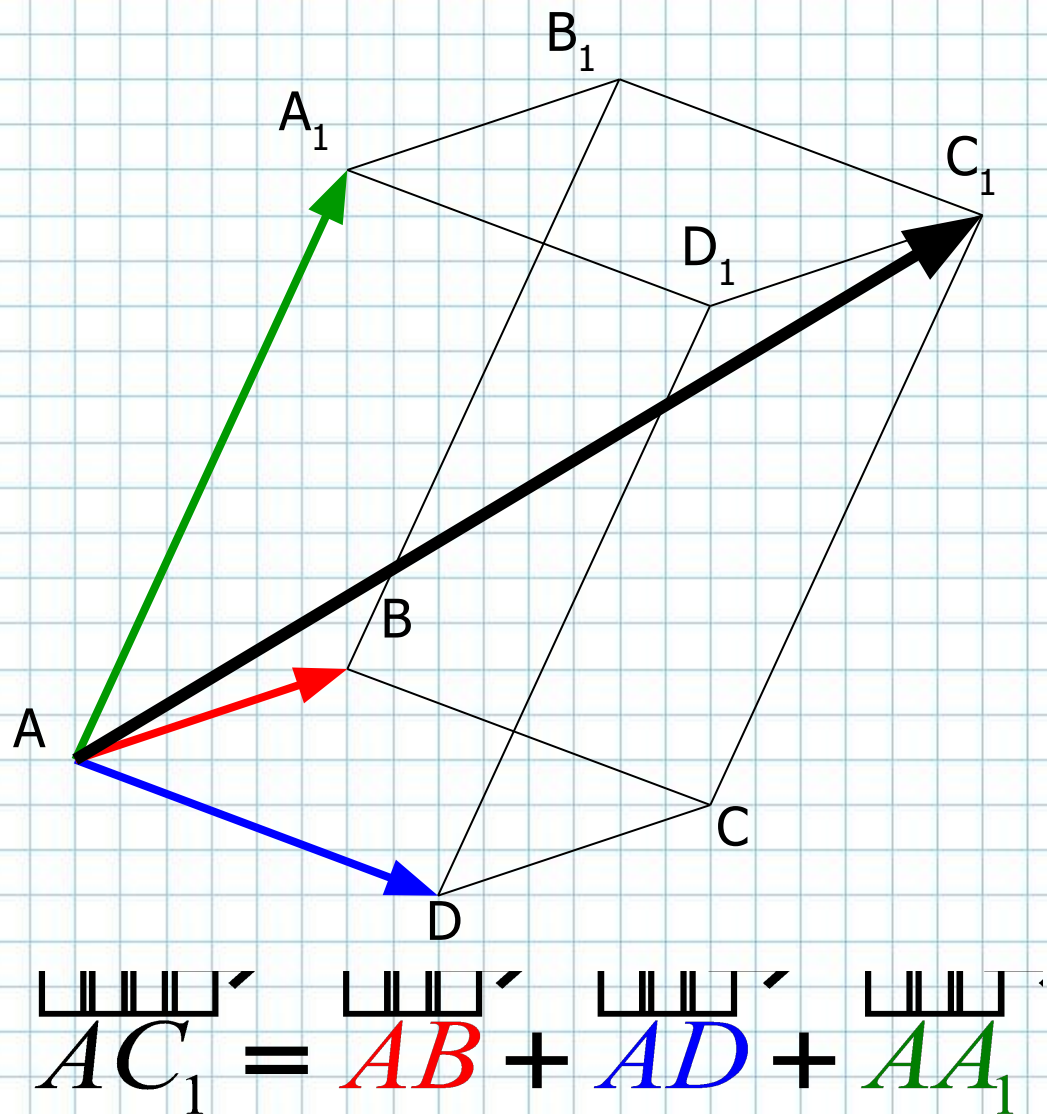


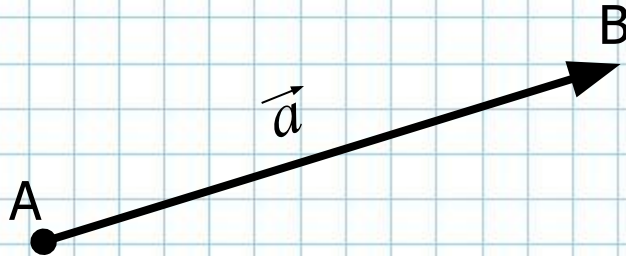
Векторы в пространстве.

Геометрия,
11 класс.



I. Определение вектора. Основные понятия, связанные с векторами.

Как и в плоскости, в пространстве вектор определяется как **направленный отрезок**:



Точка A – начало вектора, B – конец вектора. Записывают: $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Обычную точку в пространстве мы также можем считать вектором, у которого начало совпадает с конечной точкой. Такой вектор называется **нулевым** и обозначается: $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$.



Длина отрезка, изображающего вектор, называется **модулем** (или абсолютной величиной) вектора, т.е.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \text{ (модуль вектора)}.$$

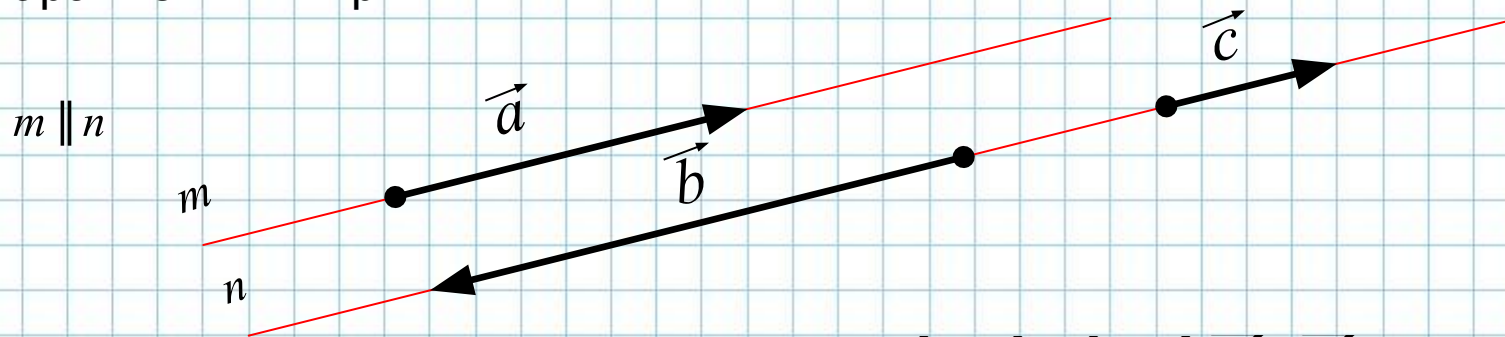
Естественно, что $|\overrightarrow{AA}| = 0$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ являются **противоположными**. Очевидно, что:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых:



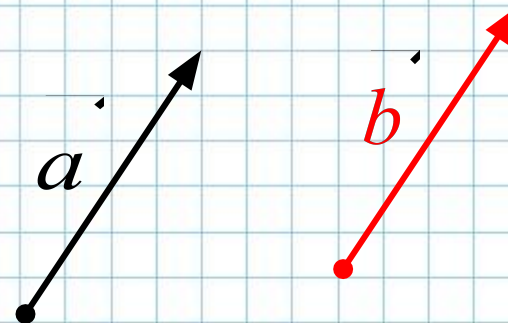
Обозначение коллинеарных векторов: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{c} \parallel \vec{b}$.

Коллинеарные векторы, в свою очередь, бывают одинаково направленными (или сонаправленными) и противоположно направленными. В нашем случае:

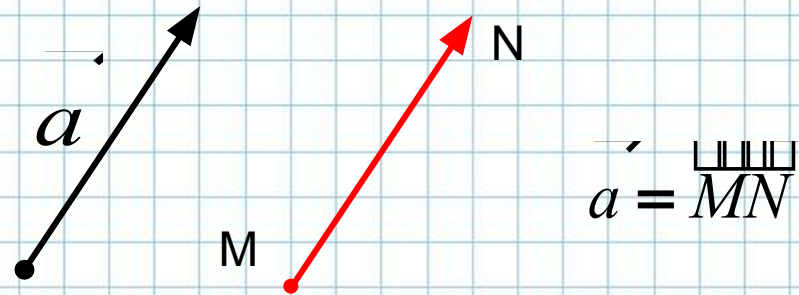
$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ – сонаправленные векторы, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – противоположно направленные векторы.

Два вектора называются **равными**, если: 1) они сонаправлены; и 2) их модули равны, т.е.

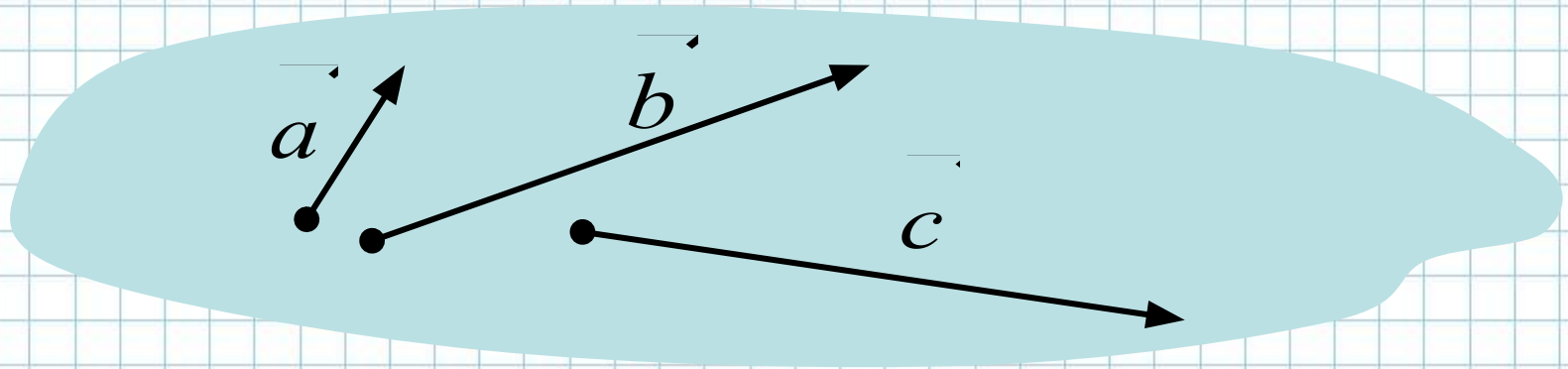
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|$$



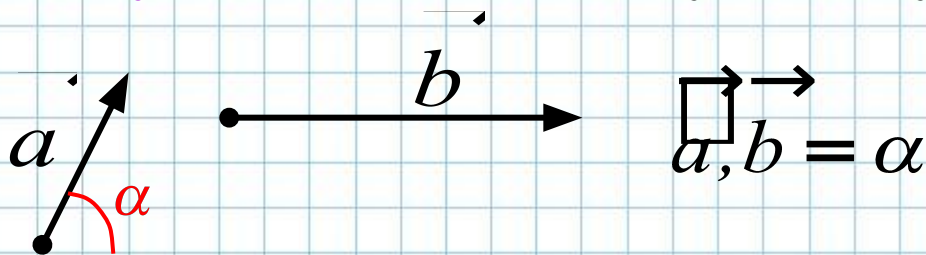
От произвольной точки пространства можно отложить единственный вектор, равный данному:



Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости:



Углом между векторами называется угол между их направлениями:



Величина угла между векторами может изменяться от 0° до 180° . Подумайте, когда:

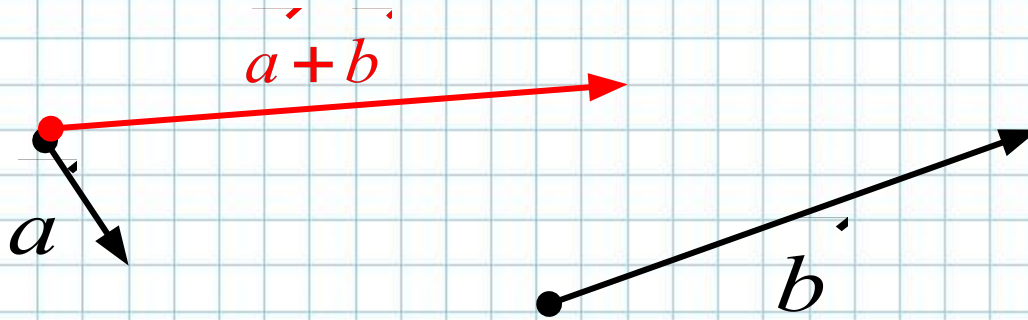
а) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ и б) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$?

Ответ: а) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; б) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

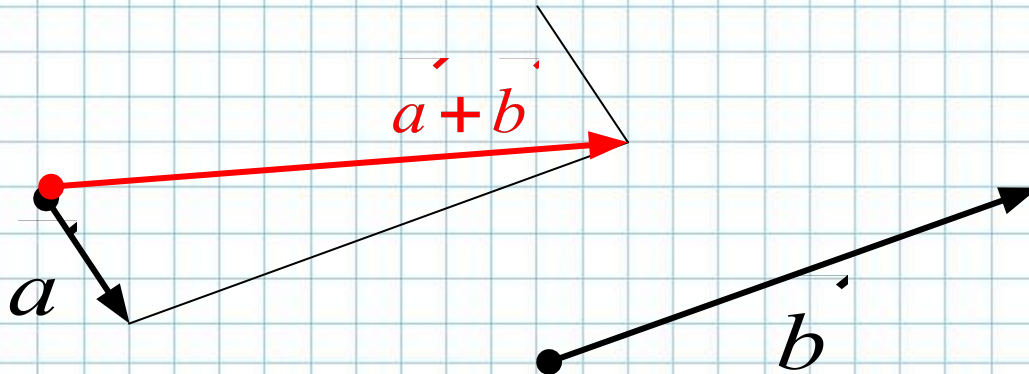
II. Действия с векторами.

Векторы можно **складывать** – в результате получается **вектор**. При сложении двух векторов применяются **правила треугольника или параллелограмма**:

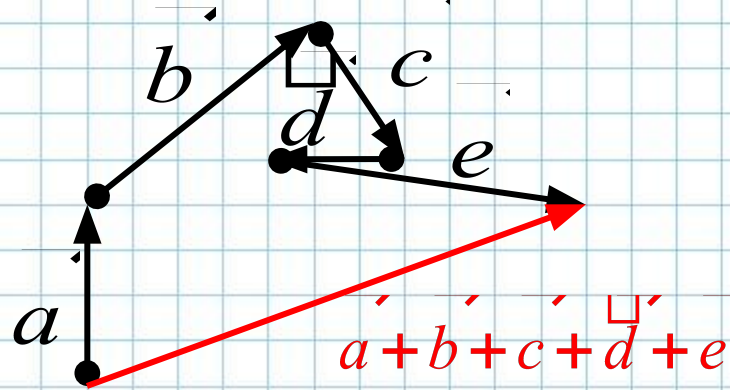
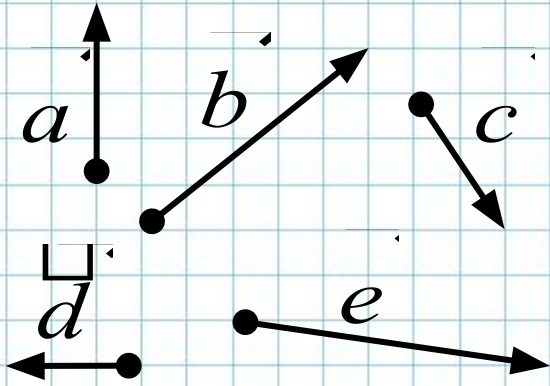
1) При применении правила треугольника один из векторов откладывают от конца другого, т.е. $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{MF}$:



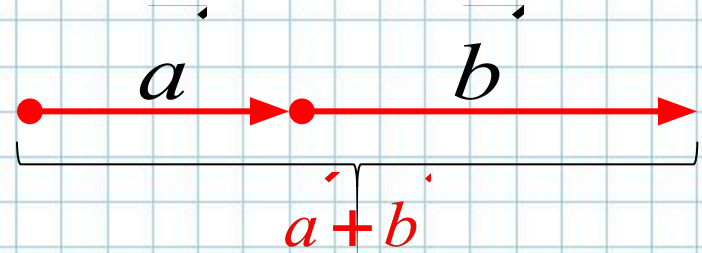
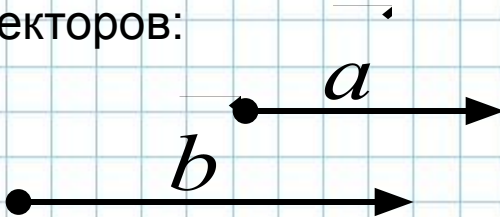
2) При применении правила параллелограмма оба вектора откладывают из общей начальной точки, т.е. $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF}$, где F – вершина параллелограмма, противоположная общей начальной точке векторов.



При сложении трех и более векторов применяют **правило многоугольника**:

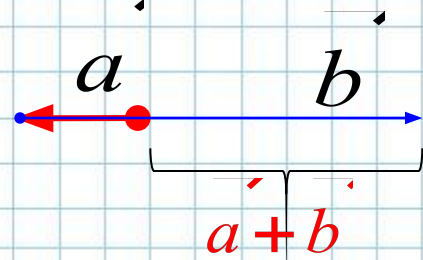
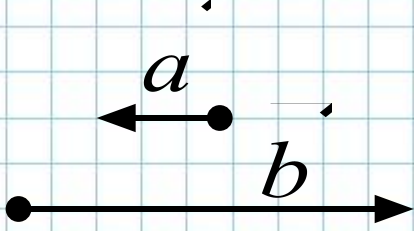


Обратим внимание, что при сложении сонаправленных векторов получается вектор, сонаправленный с данными и его модуль равен сумме модулей слагаемых векторов:



$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

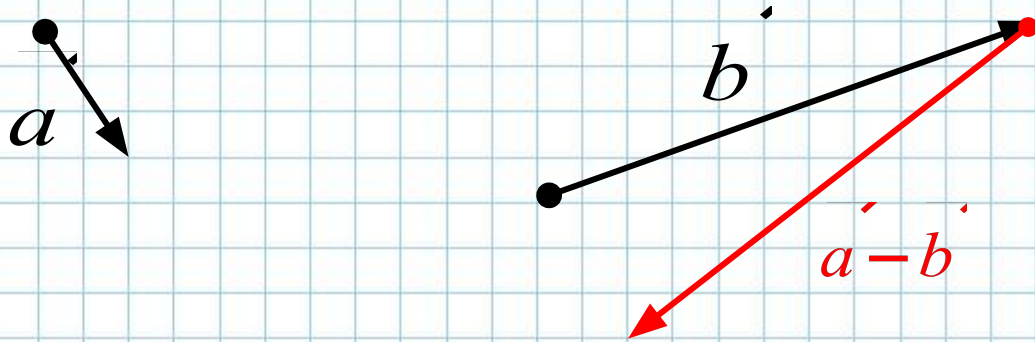
При сложении противоположно направленных векторов получается вектор, сонаправленный с вектором, имеющим бóльшую длину и его модуль равен ... (подумайте, чему?):



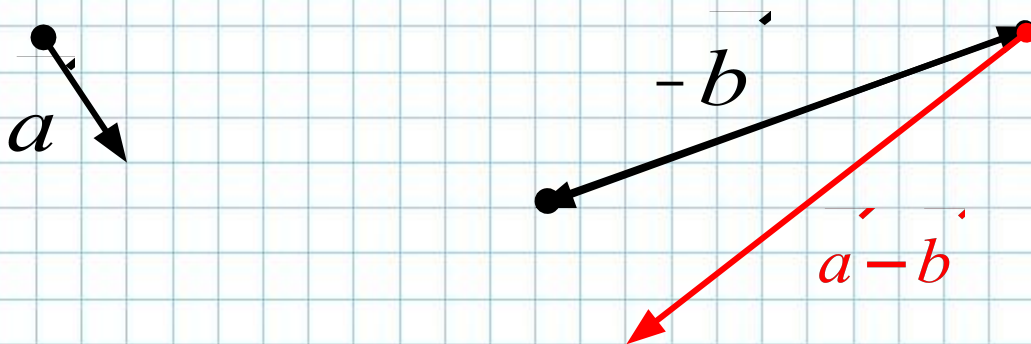
$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$$

$$|\vec{b}| > |\vec{a}|$$

Также можно найти **разность** двух векторов – в результате получается **вектор**. При вычитании двух векторов применяется видоизмененное **правило треугольника** – вначале оба вектора строятся с общей начальной точкой, затем соединяются концы этих векторов с выбором направления к «уменьшаемому» вектору:



Или: т.к. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, то можно вначале построить вектор, противоположный вектору b , а затем оба вектора сложить по правилу треугольника.

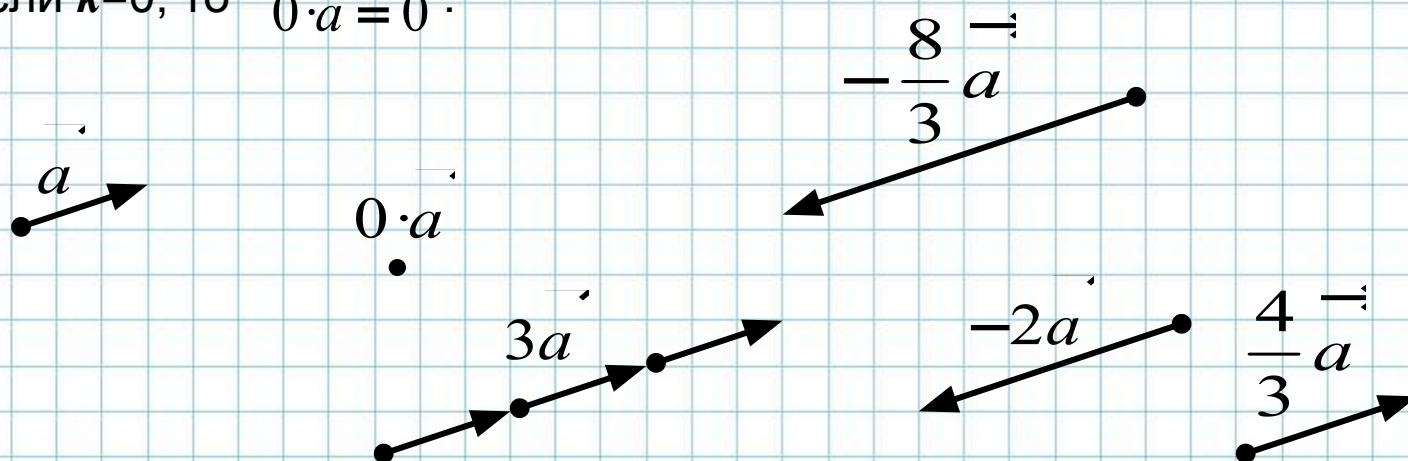


Сложение векторов, как и сложение чисел подчиняется законам:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – переместительный закон сложения;
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ – сочетательный закон сложения;
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Следующее действие с векторами – **умножение вектора на число k** . В результате этого действия получается **вектор**, причем:

- 1) если $k > 0$, то $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) если $k < 0$, то $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
- 3) если $k = 0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

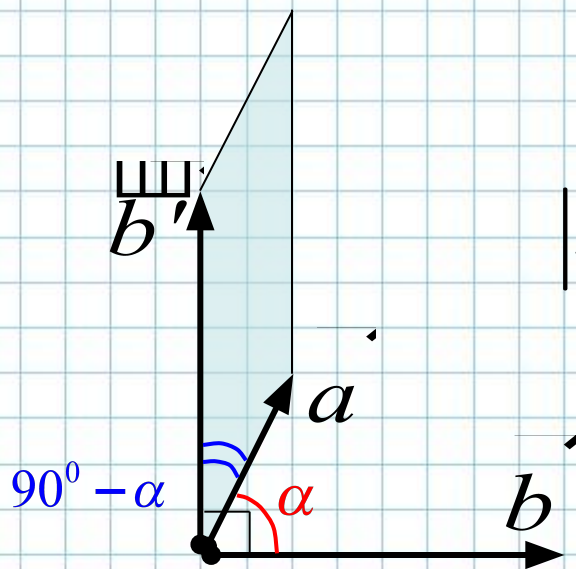


И еще одно действие с векторами – умножение двух векторов. В школьном курсе геометрии изучается **скалярное произведение** векторов. В результате этого действия (в отличие от предыдущих действий с векторами) получается **число**, равное произведению модулей двух данных векторов на косинус угла между этими векторами, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle \vec{a}, \vec{b}.$$

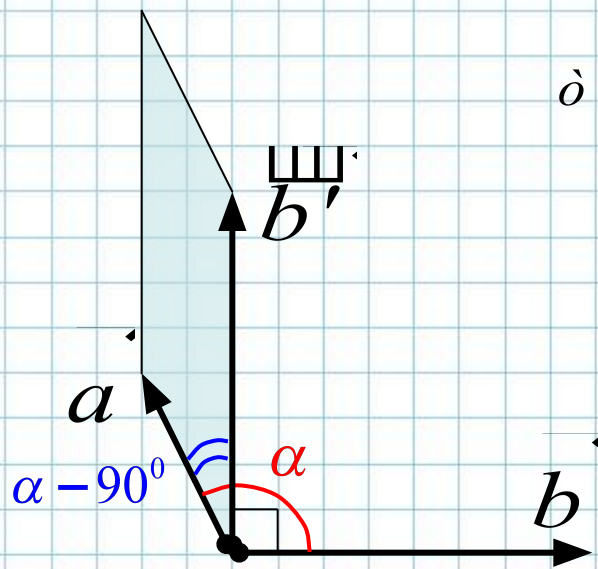
Геометрически скалярное произведение векторов можно понимать как площадь параллелограмма (или противоположная ей величина), стороны которого образуются одним из данных векторов и вектором, перпендикулярным второму с таким же модулем:

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}'| \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}'| \cdot \sin(\alpha - 90^\circ) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = -\vec{a} \cdot \vec{b}.$$



$$|\vec{b}| = |\vec{b}'|$$

α – острый угол

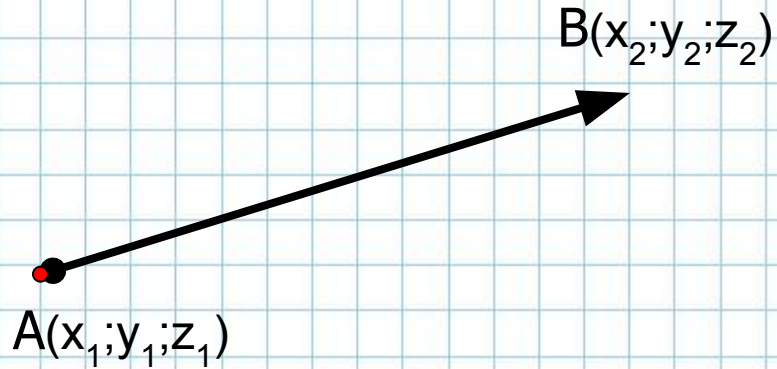


α – тупой угол

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = S$$

III. Координаты вектора. Действия в координатах.

Теперь рассмотрим все эти понятия и действия с точки зрения координатного пространства. Вспомним, что любая точка пространства задается тремя координатами $A(x; y; z)$.



Если принять вектор за параллельный перенос начальной точки $A(x_1; y_1; z_1)$ в конечную точку $B(x_2; y_2; z_2)$, то **координаты вектора** показывают: *на сколько изменяются соответствующие координаты начальной точки при параллельном переносе в конечную*, т.е.

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Естественно, что $\overrightarrow{AA}(0; 0; 0)$ и $\overrightarrow{BA}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Т.к. **модуль вектора** равен длине изображающего его отрезка, то:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}, \text{ где } \overrightarrow{AB}(m; n; k) \text{ — координаты вектора.}$$

Два вектора, заданные координатами $\vec{a}(m_1; n_1; k_1)$ и $\vec{b}(m_2; n_2; k_2)$ будут **равны**, если (подумайте) ...

...равны их соответствующие координаты, т.е. $m_1 = m_2, n_1 = n_2, k_1 = k_2$.

Для **сложения** двух векторов, заданных координатами, нужно просто сложить их соответствующие координаты, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1; n_1; k_1)} + \overrightarrow{(m_2; n_2; k_2)} = \overrightarrow{(m_1 + m_2; n_1 + n_2; k_1 + k_2)}.$$

При **вычитании** векторов, заданных координатами, нужно найти разности их соответствующих координат, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1; n_1; k_1)} - \overrightarrow{(m_2; n_2; k_2)} = \overrightarrow{(m_1 - m_2; n_1 - n_2; k_1 - k_2)}.$$

Умножение вектора, заданного координатами, **на число** выполняется так:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{(m; n; k)} = \overrightarrow{(\alpha m; \alpha n; \alpha k)}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

Скалярное произведение двух векторов, заданных координатами, равно сумме произведений соответствующих координат, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1; n_1; k_1)} \cdot \overrightarrow{(m_2; n_2; k_2)} = m_1 m_2 + n_1 n_2 + k_1 k_2.$$

Условием **коллинеарности** двух векторов, заданных координатами, будет пропорциональность их соответствующих координат:

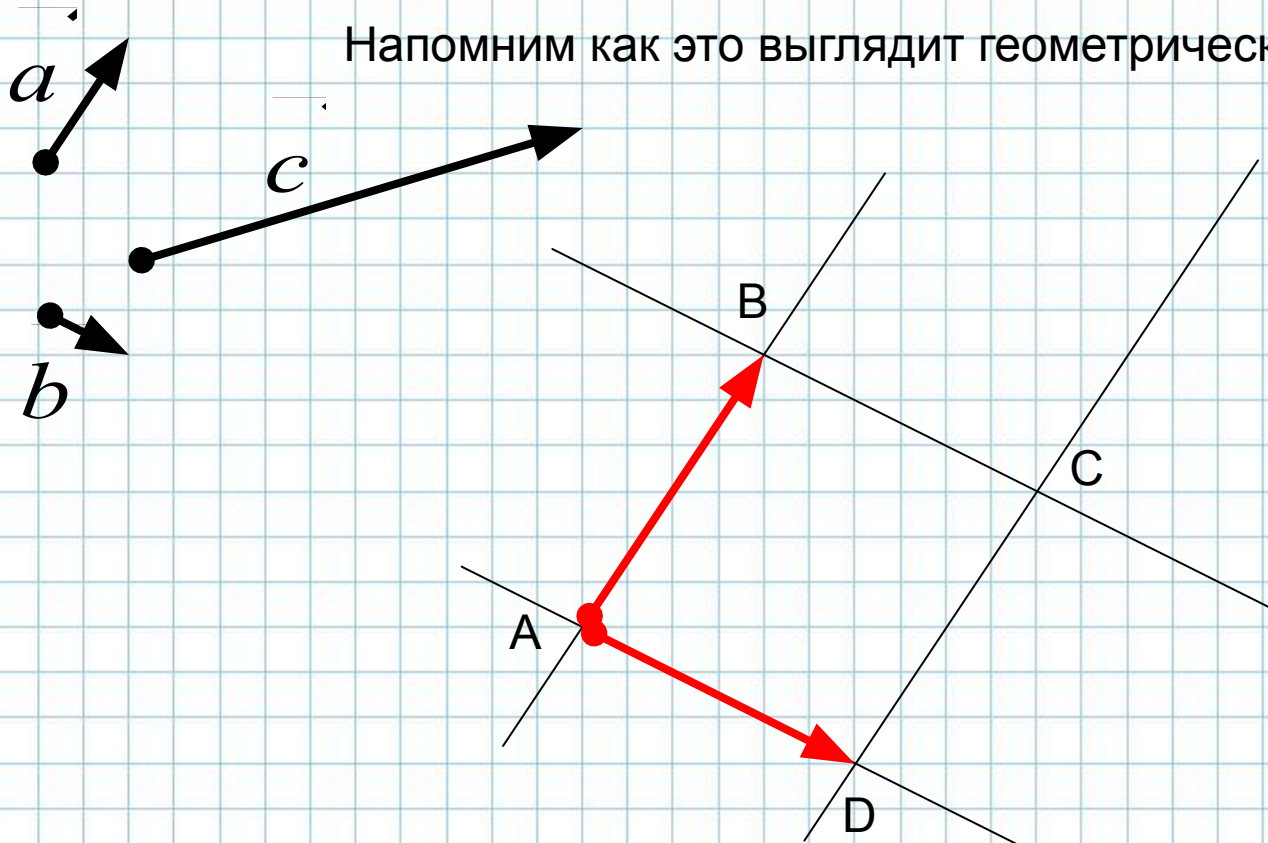
$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Самостоятельно разберитесь, когда $\overrightarrow{a} \uparrow \uparrow \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} \uparrow \downarrow \overrightarrow{b}$.

Для выяснения **компланарности** трех векторов необходимо, чтобы любой из этих векторов можно было разложить по двум оставшимся, т.е.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \alpha \Leftrightarrow \vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Напомним как это выглядит геометрически:



По правилу параллелограмма: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Но $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AB} \parallel \vec{a}$, $\vec{AD} \parallel \vec{b}$.
Значит, $\vec{AB} = x \cdot \vec{a}$, $\vec{AD} = y \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$
В данном конкретном случае: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если аппликаты всех точек равны.

Аналитически выяснить компланарность трех векторов, заданных координатами, можно решая систему:

$$\begin{cases} m_3 = xm_1 + ym_2, & \vec{a}(m_1; n_1; k_1) \\ n_3 = xn_1 + yn_2, & \vec{b}(m_2; n_2; k_2) \\ k_3 = xk_1 + yk_2, & \vec{c}(m_3; n_3; k_3) \end{cases}$$

Если система имеет единственное решение, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Любой вектор пространства можно разложить по трем некомпланарным векторам, т.е.

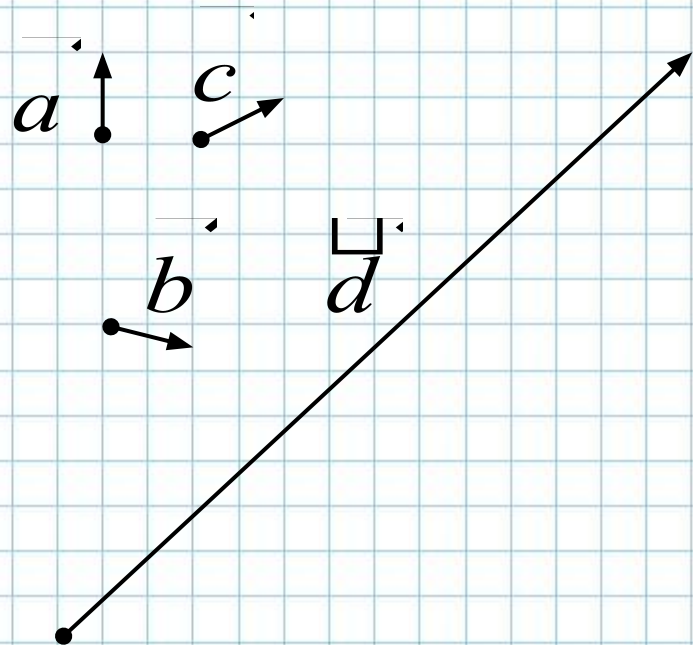
$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}, \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \notin \alpha; \quad x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Аналитически разложение любого вектора $\vec{d}(m_4; n_4; k_4)$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}(m_1; n_1; k_1)$, $\vec{b}(m_2; n_2; k_2)$ и $\vec{c}(m_3; n_3; k_3)$ сводится к решению системы:

$$\begin{cases} m_4 = xm_1 + ym_2 + zm_3, \\ n_4 = xn_1 + yn_2 + zn_3, \\ k_4 = xk_1 + yk_2 + zk_3, \end{cases}$$

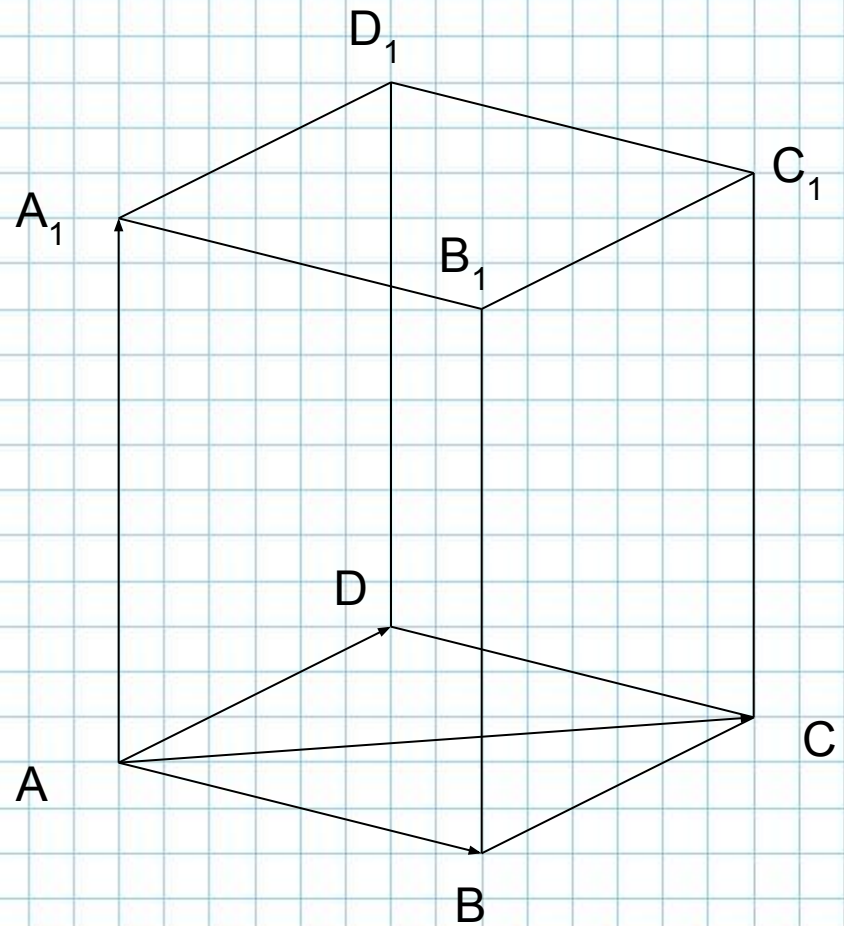
А решение этой системы – числа x, y и z являются коэффициентами разложения вектора $\vec{d}$ по трем векторам $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Геометрически это означает возможность построения параллелепипеда, в котором диагональ задается вектором $\vec{d}$, а все три измерения – векторами, коллинеарными векторам $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

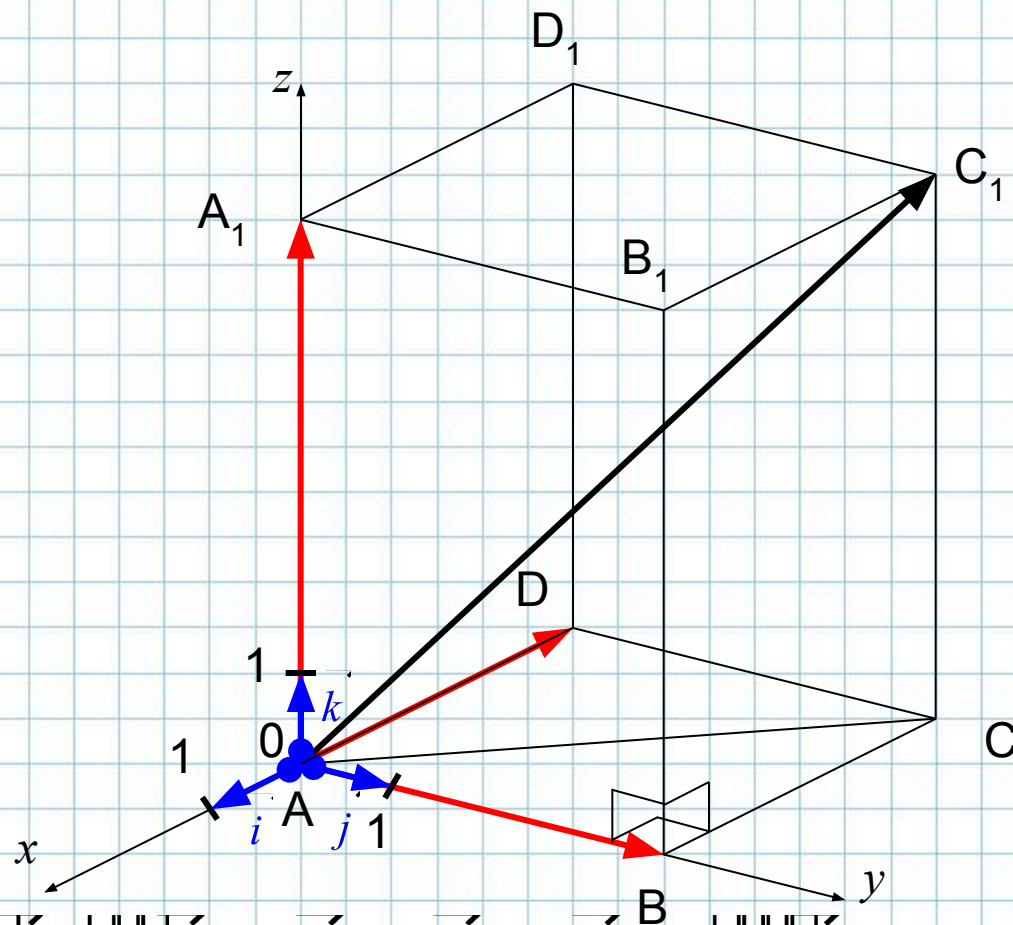


$$\vec{AC_1} = \vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{AD}$$

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$$



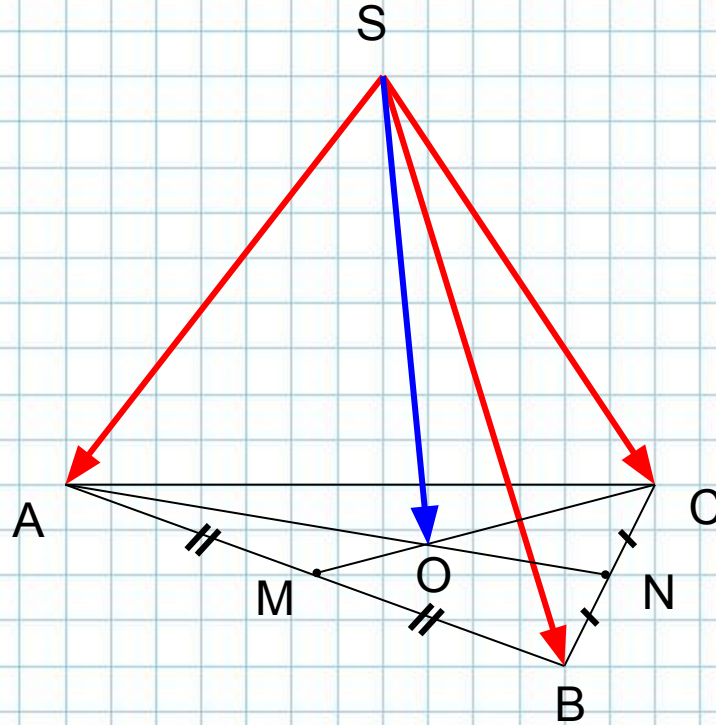
В прямоугольной системе координат в пространстве векторы $i(1;0;0)$, $j(0;1;0)$ и $k(0;0;1)$ называются **единичными координатными векторами** (или **ортами**). Т.к. эти векторы являются некомпланарными, то любой вектор пространства можно разложить по ортам. При этом образуется прямоугольный параллелепипед, а коэффициенты разложения – координаты данного вектора.



$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AC_1}(x; y; z)$$

В данном случае $x=-3$; $y=4$; $z=6$, т.е. координаты вектора $\overrightarrow{AC_1}(-3; 4; 6)$.

Умение выполнять действия с векторами и понимание вышеизложенного материала позволяет решать некоторые геометрические задачи с помощью векторов. Этот способ получил название **векторного способа решения задач**. Мы познакомимся с ним на следующих уроках... .



Для любого тетраэдра: $\vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC})$