Математика

Лекция 5

Аналитическая геометрия

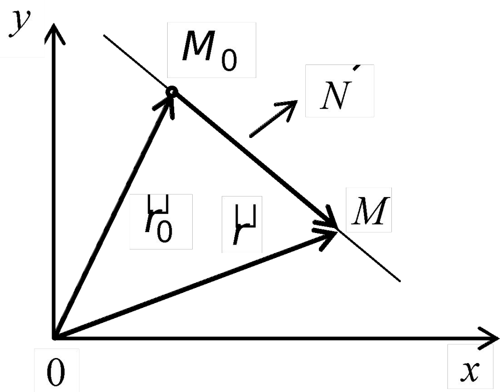
Алгебраические поверхности и линии на плоскости первого порядка

- **Опр**. Геометрическое место точек
  в пространстве (*на плоскости*) определяет плоскость (*прямую на плоскости*)
  тогда и только тогда, когда декартовы координаты x, y, z текущей точки M удовлетворяют алгебраическому уравнению первого порядка

В пространстве	На плоскости
$F(x,y,z)=0$ поверхность	$F(x,y)=0$ линия
плоскость $Ax+By+Cz+D=0$	прямая $Ax+By+C=0$
Введем вектор $\vec{N}$	
$\vec{N}=(A,B,C)$	$\vec{N}=(A,B)$
Вектор $\vec{N}$ называется *нормальным вектором* (*нормалью*) плоскости и прямой на плоскости	
Введем радиус-вектор текущей точки	
$\vec{r}=(x,y,z)$	$\vec{r}=(x,y)$
$(\vec{r},\vec{N})+D=0$	$(\vec{r},\vec{N})+C=0$

Геометрический смысл нормального вектора

- **Задача 1**. На плоскости дана точка $M_0(\vec{r_0}) = M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{N} = (A, B)$. Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору.



- Рассмотрим текущую точку прямой $M(\vec{r}) = M(x, y)$

тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0, y - y_0)$ лежит на данной прямой.

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N} \Rightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}) = 0$$

$$(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{N}) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

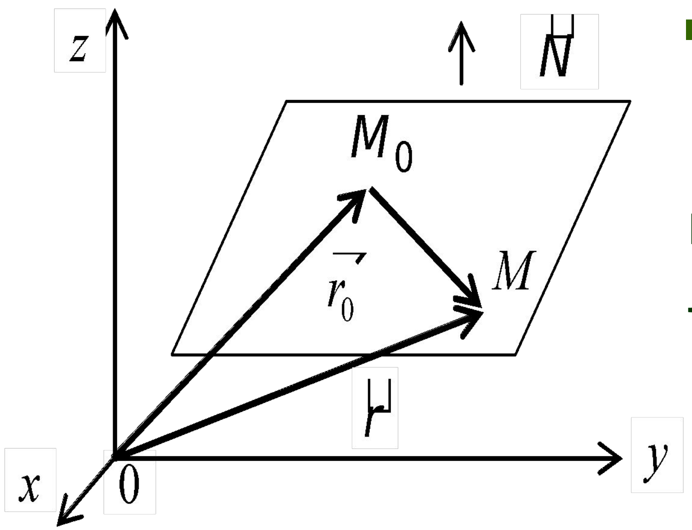
Э

$$(\vec{r}, \vec{N}) - (\vec{r_0}, \vec{N}) = 0$$

$$Ax + By + (-x_0 A - y_0 B) = 0$$

- **Нормальный вектор** – вектор, перпендикулярный прямой.

- **Задача 2**.
- В пространстве дана точка $M_0(\vec{r}_0) = M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{N} = (A, B, C)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору.



- Рассмотрим текущую точку прямой

$$M(\vec{r}) = M(x, y, z)$$

вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ лежит на плоскости.

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N} \Rightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}) = 0$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

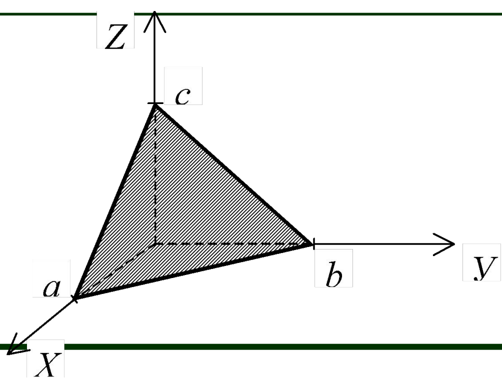
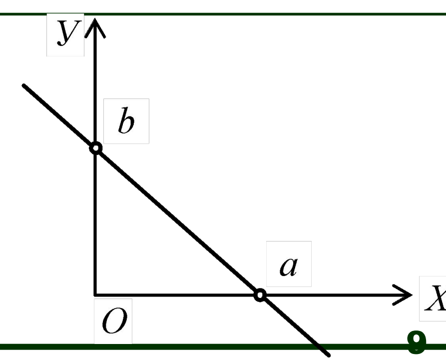
$$(\vec{r}, \vec{N}) - (\vec{r}_0, \vec{N}) = 0$$

$$Ax + By + Cz + (-x_0A - y_0B - z_0C) = 0$$

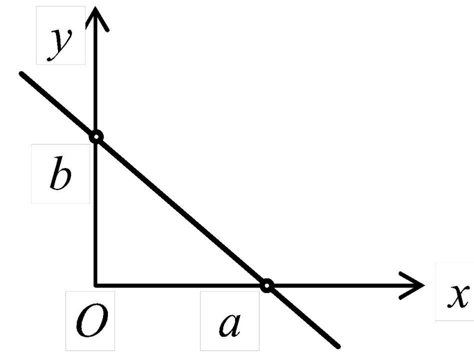
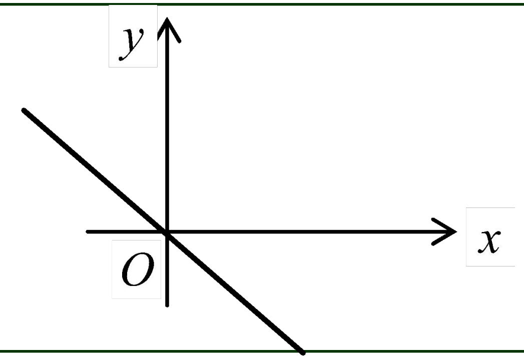
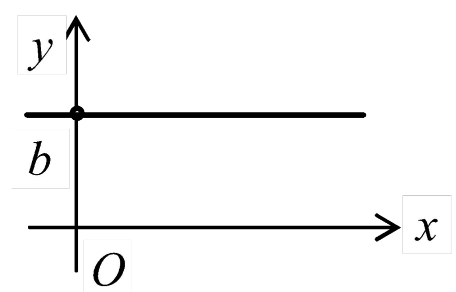
D

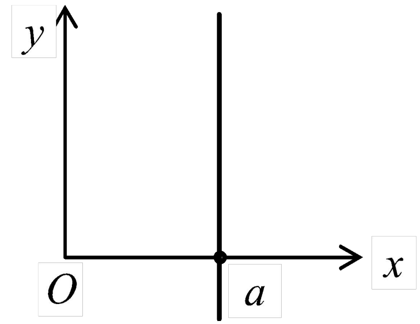
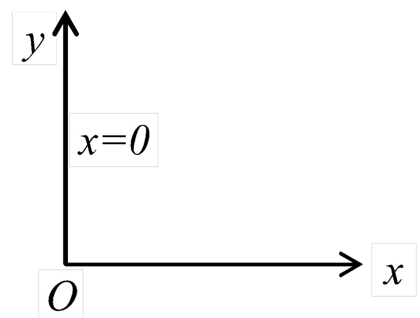
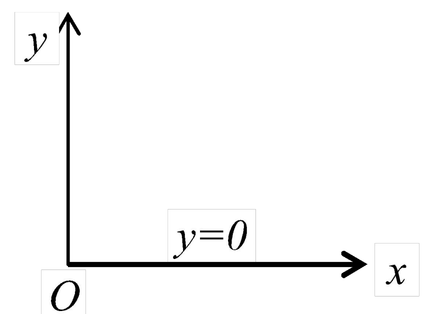
- **Нормальный вектор** – вектор, перпендикулярный плоскости.

Уравнения в отрезках

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$	Общее уравнение прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$
Пусть $D \neq 0$ тогда $\dfrac{x}{-D/A} + \dfrac{y}{-D/B} + \dfrac{z}{-D/C} = 1$	Пусть $C \neq 0$ тогда $\dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$
Обозначим $a = -\dfrac{D}{A}, b = -\dfrac{D}{B}, c = -\dfrac{D}{C}$	$a = -\dfrac{C}{A}, b = -\dfrac{C}{B}$
Получим $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
	

Исследование уравнения прямой

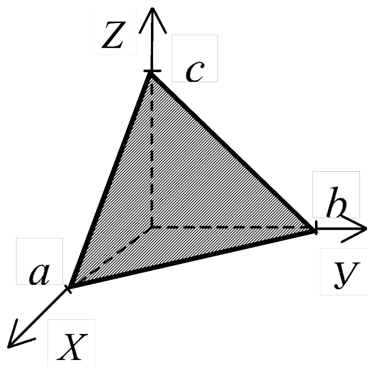
1. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$	$Ax + By + C = 0$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	
2. $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$	$Ax + By = 0,$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad y = -\frac{b}{a}x$	
3. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$	$By + C = 0$ $y = b$	

4. $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$	$Ax + C = 0$ $x = a$	
5. $A \neq 0, B = 0, C = 0$	$Ax = 0$ $x = 0$	
6. $A = 0, B \neq 0, C = 0$	$By = 0$ $y = 0$	

Исследование общего уравнения плоскости

- 1. $Ax + By + Cz + D = 0$

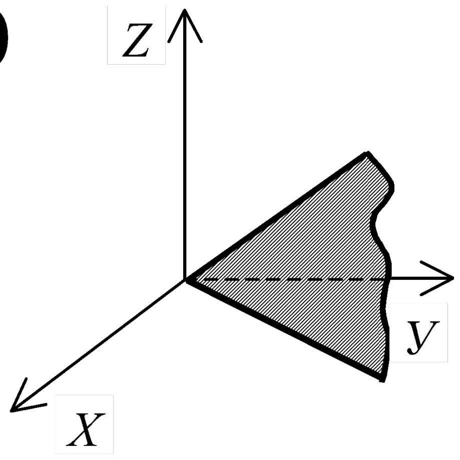
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



- 2. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$

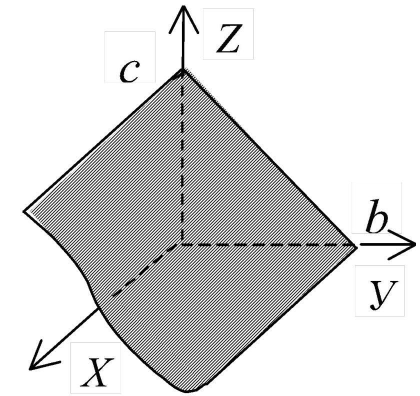
$Ax + By + Cz = 0$

O(0,0,0)∈P



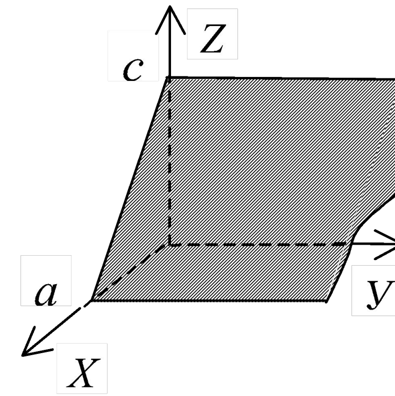
- 3а. $A = 0$ $\quad By + Cz + D = 0$

  P||OX $\quad \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$



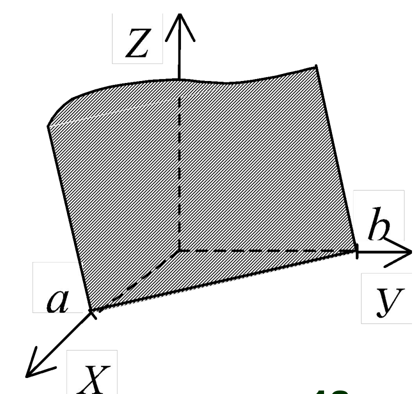
- 3б. $B = 0$ $\quad Ax + Cz + D = 0$

  P||OY $\quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1$

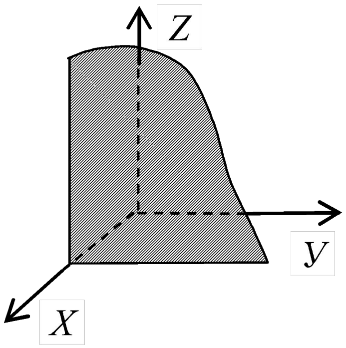


- 3в. $C = 0$ $\quad Ax + By + D = 0$

  P||OZ $\quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

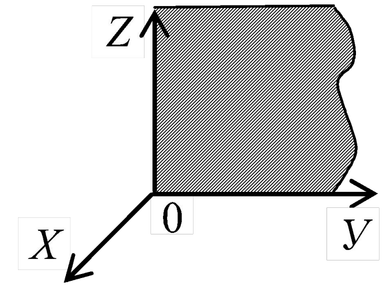


- 4а. $A = 0, B = 0$ $\quad Cz + D = 0$
  P||XOY
- 4б. $A = 0, C = 0$ $\quad By + D = 0$
  P||XOZ
- 4в. $B = 0, C = 0$ $\quad Ax + D = 0$
  P||YOZ



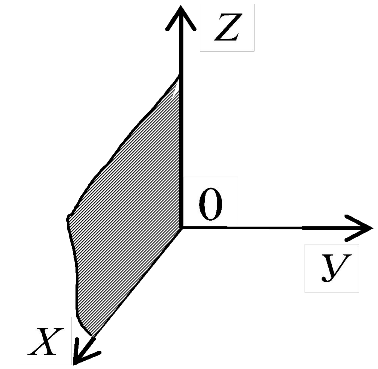
- 5а. $B = 0, C = 0, D = 0$

  $x = 0$ плоскость YOZ



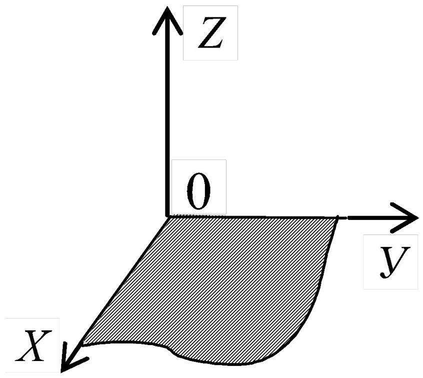
- 5б. $A = 0, C = 0, D = 0$

  $y = 0$ плоскость XOZ



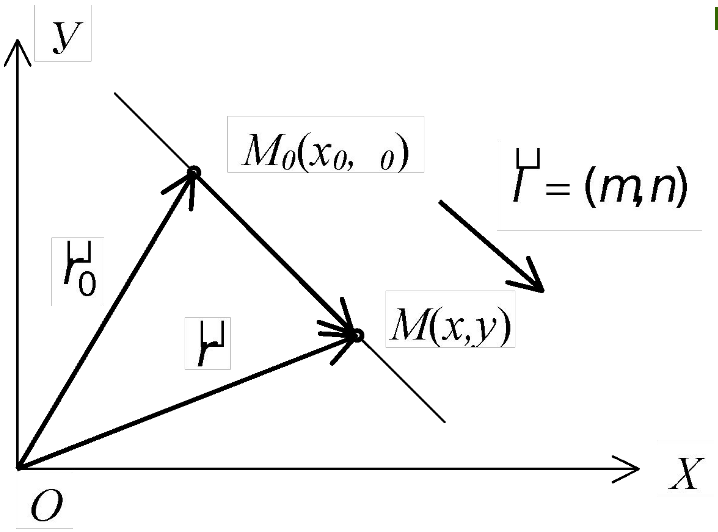
- 5в. $A = 0, B = 0, D = 0$

  $z = 0$ плоскость XOY



Параметрическое уравнение прямой на плоскости и в пространстве

- Дана точка M_0 и вектор $\vec{l}$. Записать уравнение прямой, проходящей через эту точку параллельно вектору $\vec{l}$.



- **Опр.** Вектор, параллельный данной прямой или лежащий на этой прямой, называется направляющим вектором прямой.

$$\overline{M_0M} \parallel \vec{l} \quad \Rightarrow \quad \overline{M_0M} = t \cdot \vec{l}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{l}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{l}$$, где t – параметр

Прямая на плоскости	Прямая в пространстве
$M_0(x_0, y_0)$ $\vec{l} = (m, n)$ $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases}$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\vec{l} = (m, n, p)$ $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$

Каноническое уравнение прямой на плоскости и в пространстве

- Если исключить параметр *t* из параметрического уравнения, то получим *каноническое* уравнение прямой.

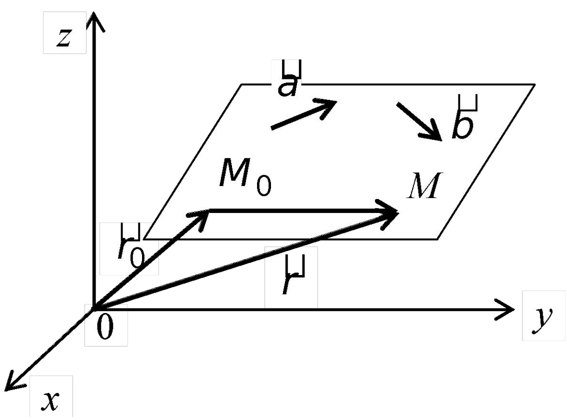
на плоскости	в пространстве
$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

Уравнение прямой проходящей через две точки M_1 и M_2

на плоскости	в пространстве
$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ $M(x, y)$	$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M(x, y, z)$
$\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$	
$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$	$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Параметрическое уравнение плоскости

- Дана точка $M_0(\vec{r_0})$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



- Векторы $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ *компланарны*, ⇒ линейно зависимы ⇒ один из них является линейной комбинацией остальных, т.е.

$$\vec{r} - \vec{r_0} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

p, q – параметры

$$\vec{r} = \vec{r_0} + p\vec{a} + q\vec{b}$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + pa_1 + qb_1, \\ y = y_0 + pa_2 + qb_2, \\ z = z_0 + pa_3 + qb_3. \end{cases}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум векторам

- Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны, то

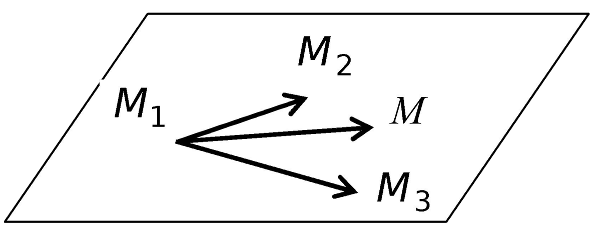
$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \quad M_3(x_3, y_3, z_3)$$

- Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны



$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$