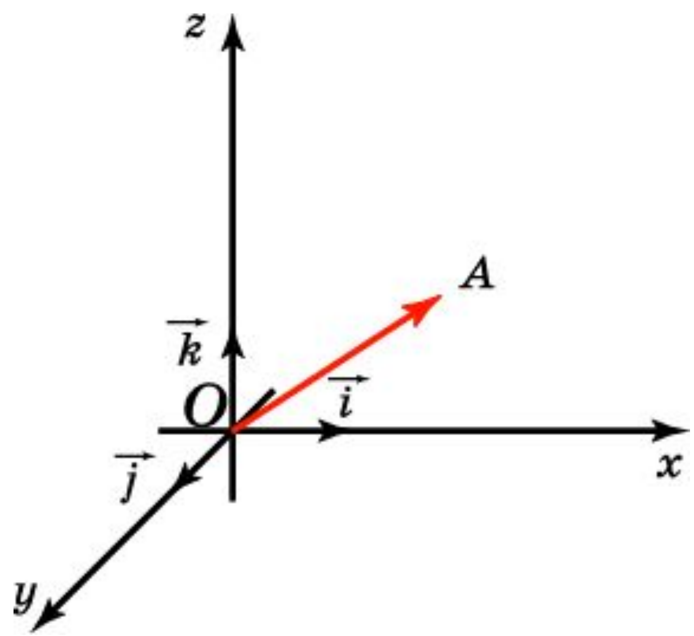
# КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора. Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



# КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты ($x$, $y$, $z$) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

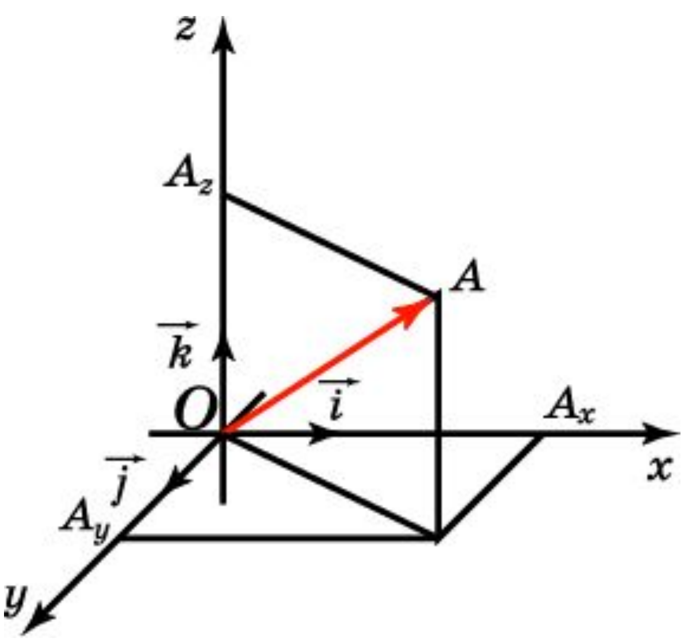
Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через $A$. Имеет место равенство

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}.$$

Точка $A$ имеет координаты ($x$, $y$, $z$) тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i},\ \overrightarrow{OA_y} = y\vec{j},\ \overrightarrow{OA_z} = z\vec{k},$$

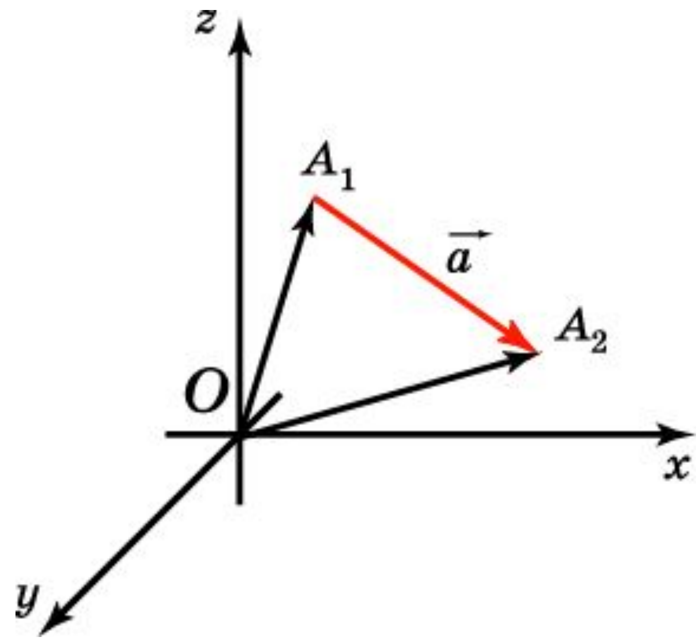
и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



# ДЛИНА ВЕКТОРА

Если вектор $a$ задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



# Упражнение 1

Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$;

б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$;

в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$;

г) $\vec{d} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$.

Ответ: а) (-2, 6, 1); б) (1, 3, 0); в) (0, -3, 2); г) (-5, 0, 5).

# Упражнение 2

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2, -6, 9)$, $B(-5, 3, -7)$; б) $A(1, 3, -8)$, $B(6, -5, -10)$; в) $A(-3, 1, -20)$, $B(5, 1, -1)$.

Ответ: а) (-7, 9, -16); б) (5, -8, -2); в) (8, 0, 19).

# Упражнение 3

Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(a,b,c)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$ .

Ответ: $(-a, -b, -c)$.

# Упражнение 4

В прямоугольном параллелепипеде $OABCO_1A_1B_1C_1$ вершина $O$ – начало координат, ребра $OA$, $OC$, $OO_1$ лежат на осях координат $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно и $OA$=2, $OC$=3, $OO_1$=4. Найдите координаты векторов:

а) $\overrightarrow{OA_1}$ ;

б) $\overrightarrow{OB_1}$ ;

в) $\overrightarrow{OO_1}$ ;

г) $\overrightarrow{OC}$ .

Ответ: а) (2, 0, 4);

б) (2, 3, 4);

в) (0, 0, 4);

г) (0, 3, 0).

# Упражнение 5

На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$, у которого вершина $O$ совпадает с началом координат. Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{OO_1}$ ; д) $\overrightarrow{BC_1}$ ; е) $\overrightarrow{B_1C_1}$ ; ж) $\overrightarrow{AA_1}$ ; з) $\overrightarrow{OB_1}$ ; и) $\overrightarrow{O_1B}$ .

Ответ: а) (0, 8, 0);

б) (-5, 0, 0);

в) (-5, 8, 0);

г) (0, 0, 6);

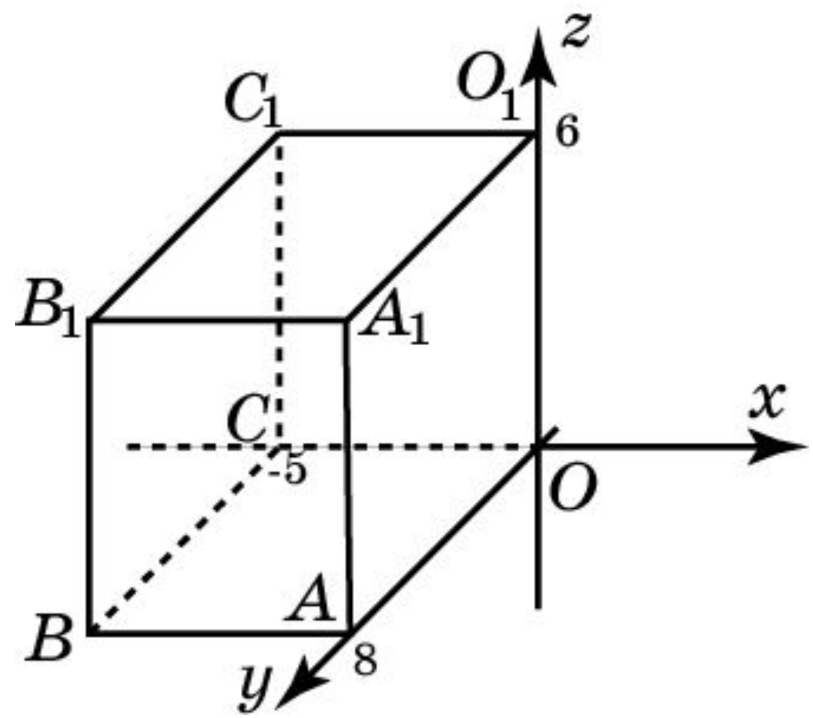
д) (0, -8, 6);

е) (0, -8, 0);

ж) (0, 0, 6);

з) (-5, 8, 6);

и) (-5, 8, -6).



# Упражнение 6

Найдите координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}$ (1, 0, 2), $\vec{b}$(0,3,-4).

Ответ: (1, 3, -2); (1, -3, 6).

# Упражнение 7

Даны векторы $\vec{a}$ (-1,2,8) и $\vec{b}$ (2,-4,3). Найдите координаты векторов:

а) $3\vec{a}+2\vec{b}$ ;

б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\bar{b}$ ;

в) $-\vec{a}+5\vec{b}$ .

Ответ: а) (1, -2, 30);

б) (-1, 2, $3\frac{1}{4}$ );

в) (11, -22, 7).

# Упражнение 8

Найдите координаты точки $N$, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4, -3, 0) и точка $M$ - (1, -3, -7).

Ответ: (5, -6, -7).

# Упражнение 9

Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости $Oxy$; б) параллелен координатной прямой $Ox$?

Ответ: а) Первая и вторая координаты равны нулю;

б) вторая и третья координаты равны нулю.

# Упражнение 10

Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке $A(1, 2, 3)$ и: а) перпендикулярного плоскости $Oxy$; б) параллельного прямой $Ox$.

Ответ: а) (1,2,4), (1,2,2);

б) (2,2,3), (0,2,3).

# Упражнение 11

Найдите длину вектора:

а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

б) $8\vec{i} + \vec{k}$;

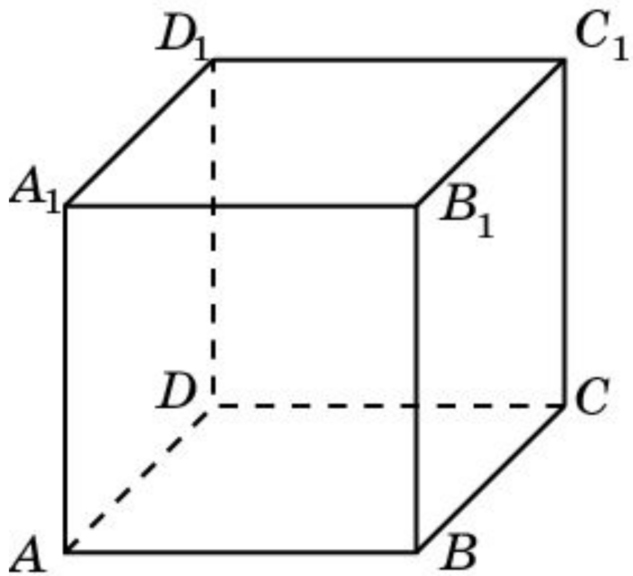
в) $-\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответ: а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{65}$; в) $\sqrt{5}$.

# Упражнение 12

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора:

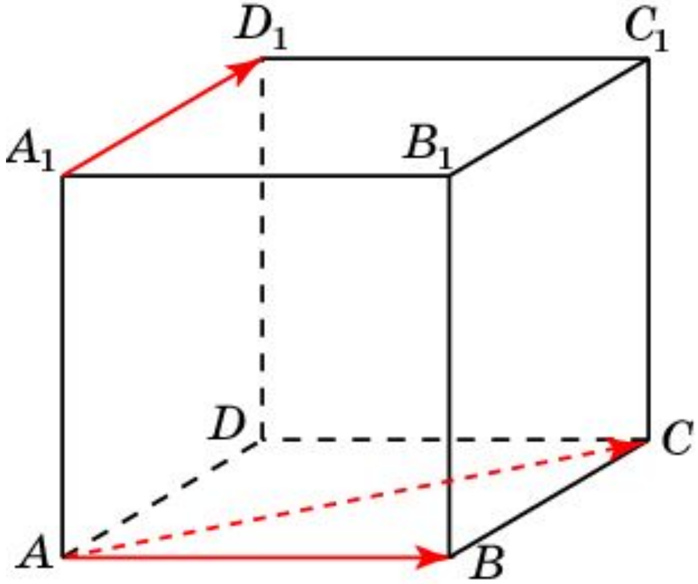
а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$.




Ответ. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$.

# Упражнение 13

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$.



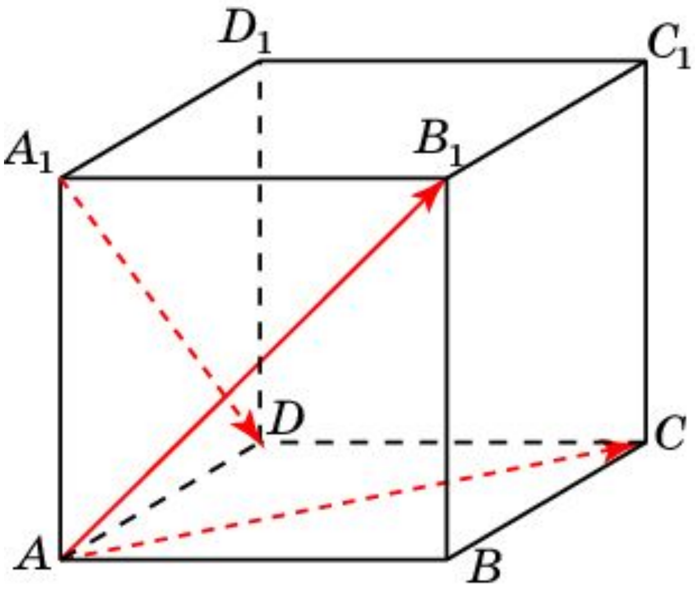

Решение. Данная сумма векторов равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

Его длина равна $\sqrt{2}$ .

Ответ. $\sqrt{2}$ .

# Упражнение 14

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите длину вектора $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1D}$.



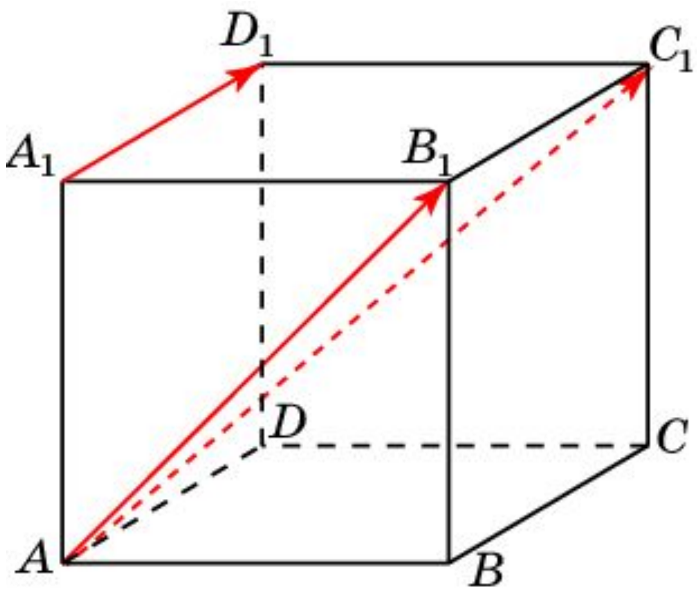

Решение. Данная сумма векторов равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

Его длина равна $\sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

# Упражнение 15

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1D_1}$.



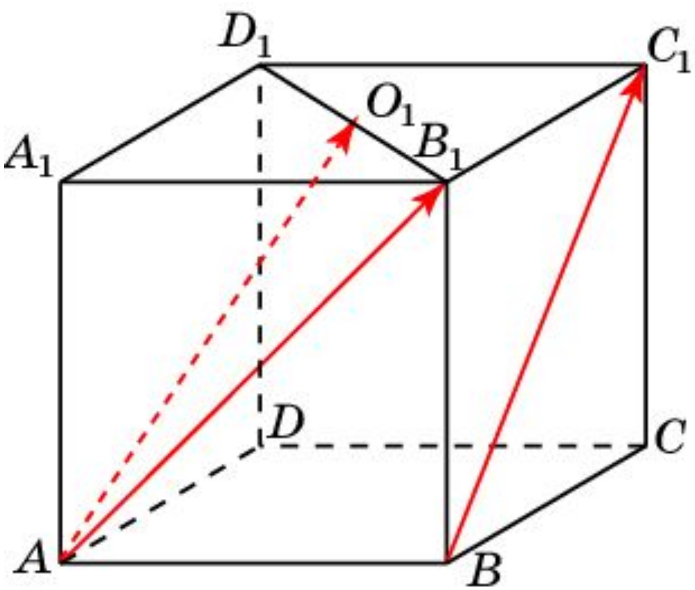

**Решение.** Данная сумма векторов равна вектору $\overrightarrow{AC_1}$.

Его длина равна $\sqrt{3}$.

**Ответ.** $\sqrt{3}$.

# Упражнение 16

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1}$.



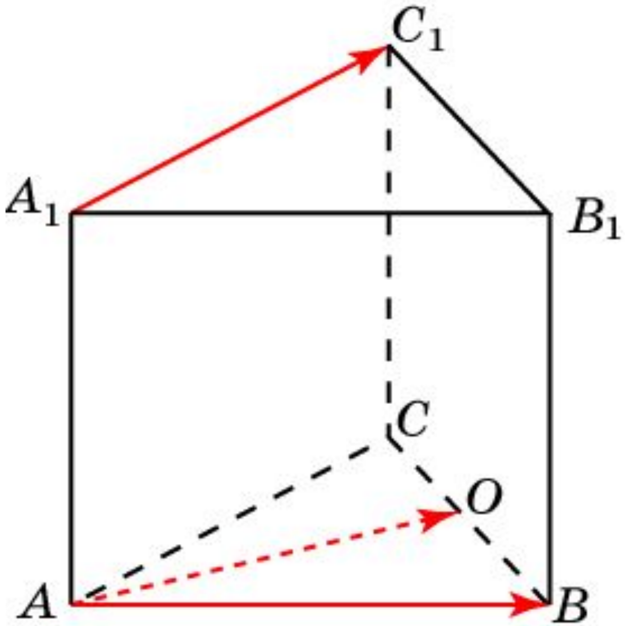

**Решение.** Данная сумма векторов равна удвоенному вектору $\overrightarrow{AO_1}$, где $O_1$ – середина отрезка $B_1D_1$.

Его длина равна $\sqrt{7}$ .

**Ответ.** $\sqrt{7}$ .

# Упражнение 17

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1C_1}$.



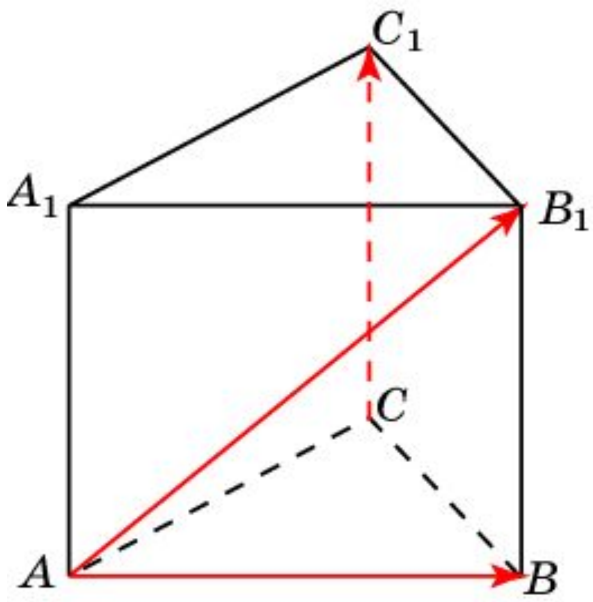

**Решение.** Длина данного вектора равна длине вектора удвоенного вектора $\overrightarrow{AO}$, где $O$ – середина отрезка $BC$.

Его длина равна $\sqrt{3}$.

**Ответ.** $\sqrt{3}$.

# Упражнение 18

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$.

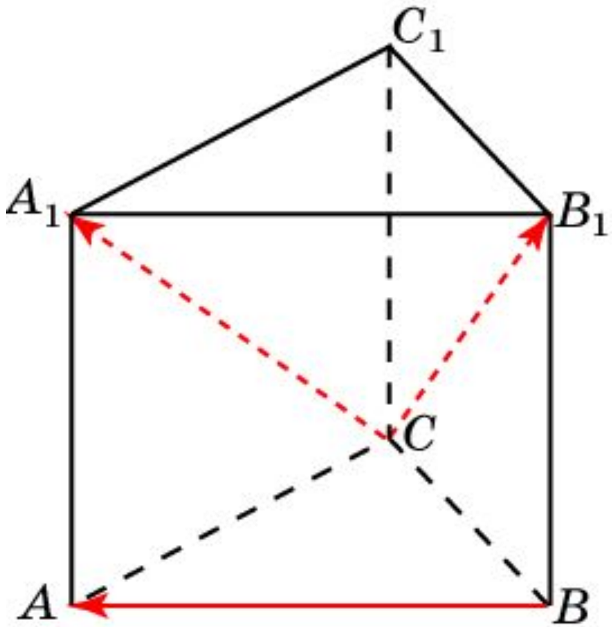



Решение. Длина данного вектора равна длине вектора вектора $\overrightarrow{AB_1}$, т.е. равна $\sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

# Упражнение 19

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB_1}$.




Решение. Длина данного вектора равна длине вектора вектора $\overrightarrow{CA_1}$, т.е. равна $\sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

# Упражнение 20

В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора:

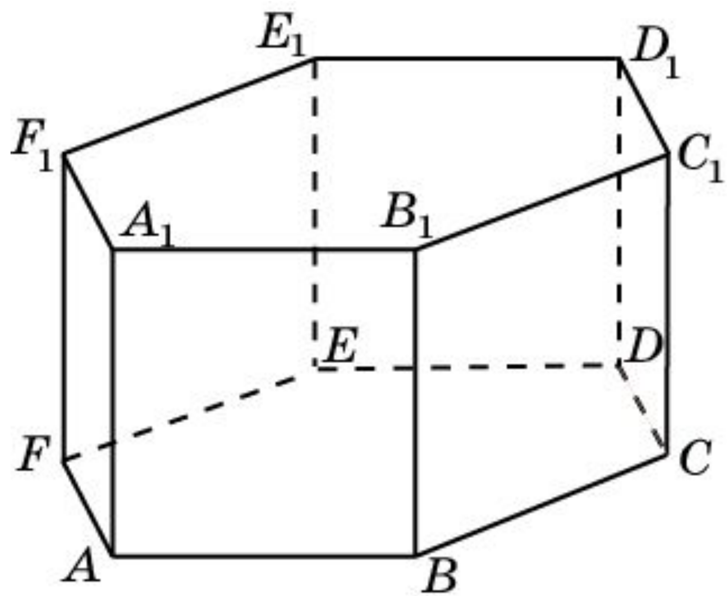
а) $\overrightarrow{AB_1}$;

б) $\overrightarrow{AC_1}$;

в) $\overrightarrow{AD_1}$;

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1E_1}$;

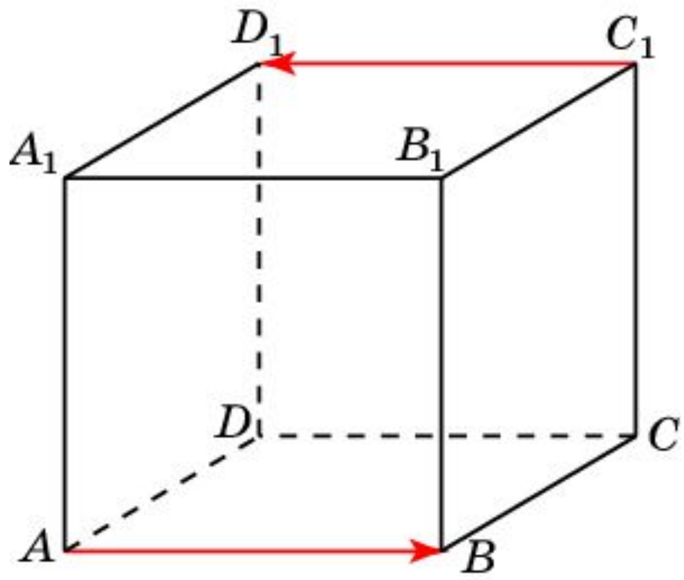
д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1F_1}$.




Ответ. а) $\sqrt{2}$; б) 2; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{5}$; д) 1.

# Упражнение 21

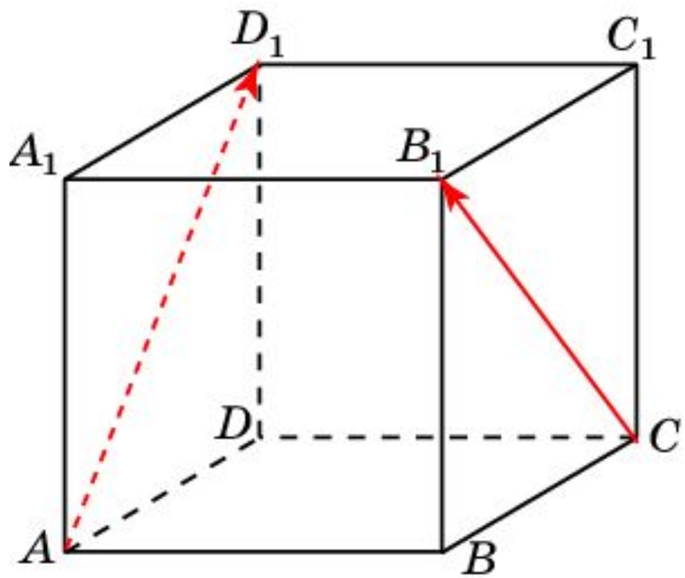
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$.




Ответ. $180^\circ$.

# Упражнение 22

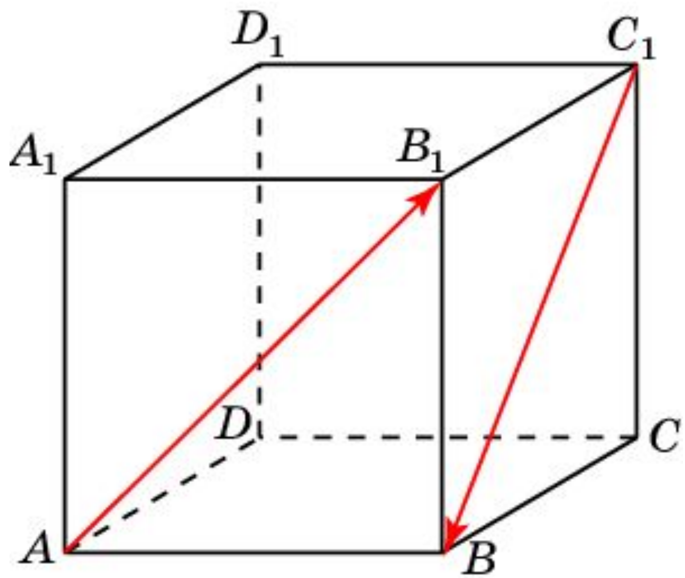
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.




Ответ. 90º.

# Упражнение 23

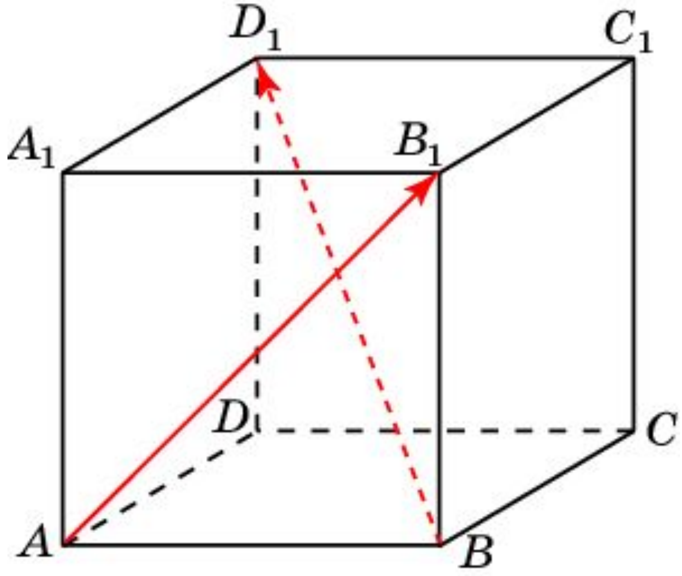
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{C_1B}$.




Ответ. 120°.

# Упражнение 24

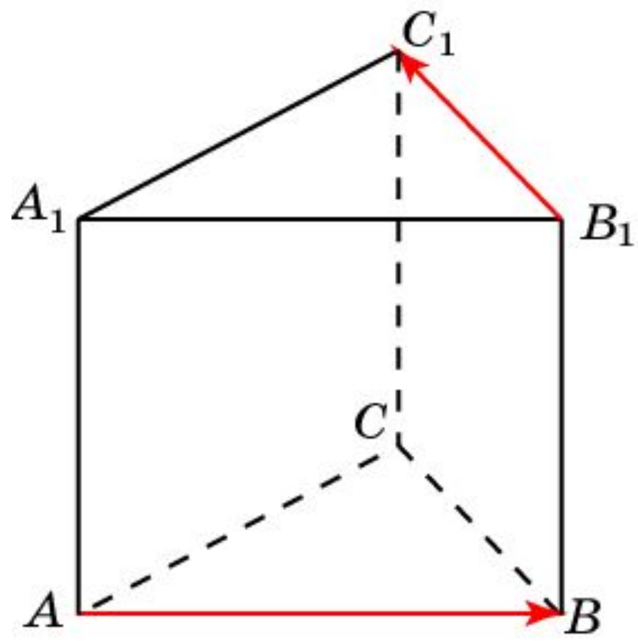
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.




Ответ. $90^{o}$.

# Упражнение 25

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$.




Ответ. $120^{\circ}$.

# Упражнение 26

В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$ найдите угол между векторами:

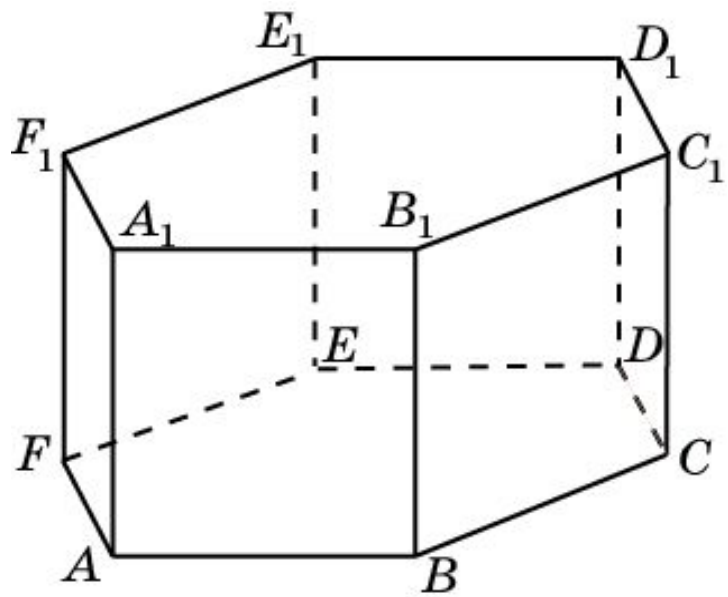
а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$;

в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$;

г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1E_1}$;

д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1E_1}$.




Ответ. а) 60°; б) 120°; в) 90°; г) 120°; д) 150°.