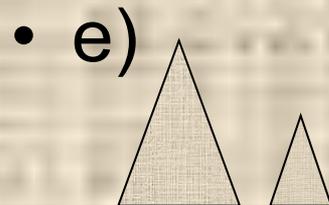
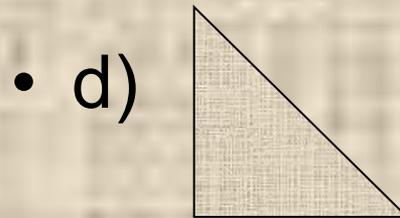
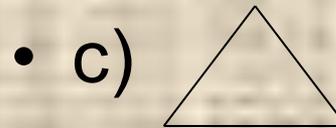
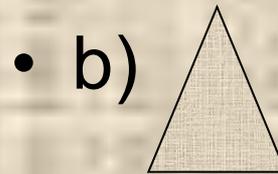
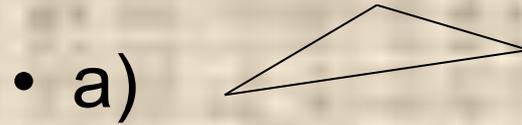


# Треугольники

**Треугольник**- плоская фигура, ограниченная тремя прямыми. У треугольника могут быть три неравные стороны (разносторонний треугольник), две равные стороны (равнобедренный треугольник) или три равные стороны (равносторонний треугольник). В равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны; в равностороннем треугольнике все углы равны.

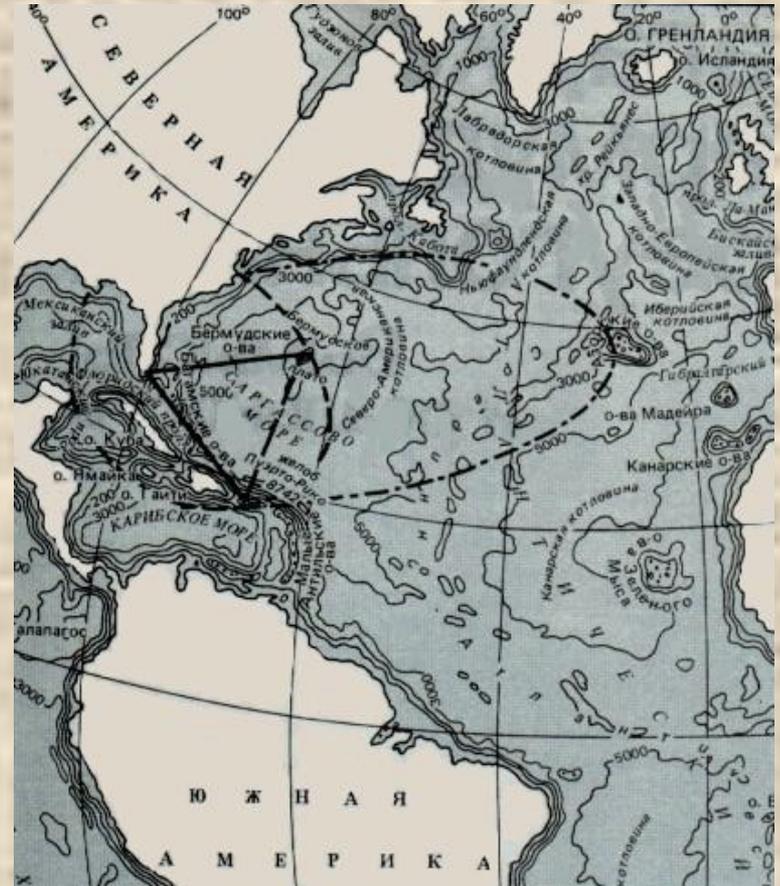
# Виды треугольников

- Разносторонний (a)
- Равнобедренный (b)
- Равносторонний (c)
- Прямоугольный (d)
- Подобные треугольники (e)



# Бермудский треугольник

- «...Здесь бесследно исчезало множество кораблей и самолётов – большинство из них после 45 года. Здесь же в течении последних 26 лет погибло более 1000 человек. Однако при поисках не удалось обнаружить ни одного трупа или обломка...» Этими словами начинается описание таинственного Бермудского треугольника у американского писателя Ч.Берлитца, теперь эту фразу с удовольствием цитируют как противники, так и сторонники гипотезы существования между Флоридой, Кубой и Бермудами некоего странного загадочного места, иначе говоря - аномальной зоны.



# Астрономия

- **Маленькое созвездие к юго-востоку от Андромеды. У его западной границы видна спиральная галактика М 33, или Туманность Треугольника (5,7 зв. вел.), повёрнутая к нам почти плашмя. Её английское прозвище Pinwheel переводится как «цветочное колесо»-разновидность зубчатого колеса со стерженьками вместо зубьев; оно довольно точно передаёт видимую форму галактики. Она, как и Туманность Андромеды (М 31), член Местной группы галактик. Обе они расположены симметрично относительно звезды Мирах (В Андромеды), что существенно облегчает поиск более слабой М 33. Обе галактики находятся от нас примерно на одинаковом расстоянии, но Туманность Треугольника чуть дальше, на расстоянии 2,6 млн. световых лет.**

# Теорема Пифагора

- Как известно, «Теорема Пифагора» является едва ли не самой знаменитой теоремой геометрии, которую помнит каждый человек, который когда-либо учился в средней школе и, возможно, сумел «начисто забыть» всю математику. Суть этой теоремы чрезвычайно проста. Теорема утверждает, что в прямоугольном треугольнике катеты  $a$  и  $b$  связаны с гипотенузой с следующим простым соотношением:

- $a^2 + b^2 = c^2$

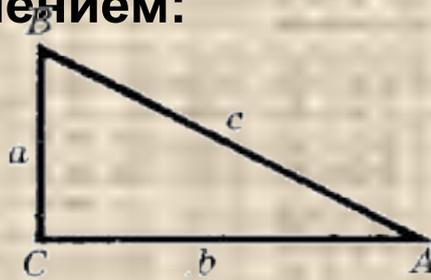


Рис. 24

- Несмотря на ее предельную простоту, теорема Пифагора, по мнению многих математиков относится к разряду наиболее выдающихся математических теорем за всю историю математики. Гениальный астроном Иоганн Кеплер выразил свое восхищение теоремой Пифагора в следующих словах:
- *«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».*

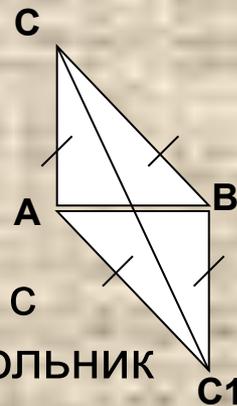
# Базовая задача геометрии треугольника

В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катеты  $AB$  и  $AC$  равны соответственно 3 и 4 (5 и 12).

**Найти:**

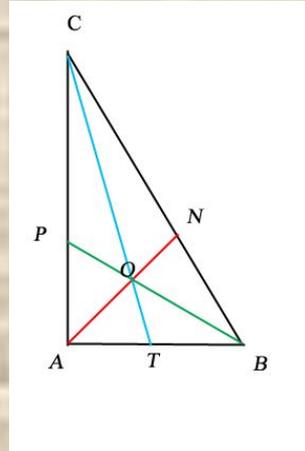
1.  $BC$
2.  $S_{ABC}$
3.  $АН$  – высоту, опущенную на гипотенузу. (Вывести формулу для вычисления высоты, опущенной на гипотенузу: )
4.  $СН:НВ$  (можно провести вычислительную работу  $СН$  и  $НВ$  по Пифагору, но обязательно закрепить теорему: проекции катетов на гипотенузу относятся, как квадраты катетов)
5.  $S_{АНС}$  и  $S_{АНВ}$ . (опять-таки, можно и нужно вычислить их площади, как половина произведения катетов, но очень важно из геометрии площадей обосновать, что  $S_{АНС}: S_{АНВ} = НС:НВ = АС^2:АВ^2 = 16:9$ .)  
Далее воспользоваться делением площади  $\Delta ABC$  в данном отношении.
6.  $R$  – радиус описанной окружности. ( $R = \frac{1}{2}BC$ ).
7.  $r$  – радиус вписанной окружности. ( $S = p \times r$ , ). Обе формулы доказываются, показывается универсальность первой (для любого описанного многоугольника – метод “долек”) и принадлежность второй только к классу прямоугольных треугольников.

# Базовая задача геометрии треугольника



- 8. Длины медиан  $AM$  и  $CK$ . Задача о медиане  $AM$  связана с задачами определения  $R$ ,  $S_{abc}$ , умением достроить треугольник  $ABC$  до прямоугольника и сделать с помощью этой конструкции необходимые выводы. Медиана  $CK$  определяется по теореме Пифагора. Так как в произвольном треугольнике это правило не срабатывает, то необходимо "притянуть за уши" формулу длины медианы произвольного треугольника:  $4CK^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2$ . Эта формула тяжеловата для запоминания, поэтому более эффективно запомнить её "первообразные" – достраивание треугольника до параллелограмма (что очень важно для выработки конструкторских умений) и следствие из этой теоремы косинусов: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Ну и вместо этого просто пошаговая работа теоремой косинусов "туда и обратно". Из треугольника  $ABC$  по теореме косинусов (если это произвольный треугольник) определяем косинус угла  $B$ , и, зная его, опять таки по теореме косинусов из  $\triangle CKB$  находим  $CK$ .

# Базовая задача геометрии треугольника



- 9. Длины отрезков  $AP$ ,  $PC$ ,  $CN$ ,  $NB$ ,  $TB$  и  $AT$ , где  $AN$ ,  $BP$  и  $CT$  – биссектрисы  $\triangle ABC$  (отрабатывается одно из основных свойств биссектрис и работа в делении величины в данном отношении)
- 10. Отношения  $PO:OB$ ,  $AO:ON$ ;  $CO:OT$  (теорема об отношении, в котором делятся биссектрисы точкой их пересечения –  $AO:ON = (AC + AB) : CB$ ).
- 11. Длины биссектрис  $AN$ ,  $CT$  и  $BP$ . Здесь можно отработать три метода:

# Базовая задача геометрии треугольника

1)  $\triangle ANB: AB=3; BN=5 \cdot 3/7=15/7; \cos \angle B = 3/5$ . По теореме косинусов:  $AN^2=9+225/49-2 \cdot 3 \cdot 15/7 \cdot 3/5=(9 \cdot 16 \cdot 2)/49; AN = \frac{12\sqrt{2}}{7}$

2) Геометрия площадей:  $S_{can} + S_{sanb} = S_{cab}$

$$1/2 AN \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ + 1/2 AN \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = 6; AN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 = 12 \quad AN = \frac{24}{7\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

3) И формула (теорема) о длине биссектрисы:

$$AN^2 = AC \cdot AB - CN \cdot BN$$

$$AN^2 = 3 \cdot 4 - (5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4) / 7 \cdot 7 = 12(1 - 25/49) = 12 \cdot 24/49; AN = \frac{12}{7} \sqrt{2}$$

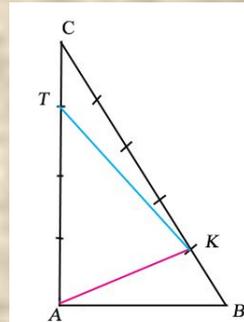
**12.** Длины отрезков CO, OT, AO, ON, BO, OP. Эта задача является следствием 10 и 11. Зная длины биссектрис и отношения, в которых они делятся точкой пересечения, закрепляем действие деления в данном отношении.

**13.** Площади шести треугольников, образовавшихся при проведении биссектрис:

1) Если учитывать предшествующие задачи, то мы знаем в каждом треугольнике основания – отрезки CP, PA, AT, TB, BN, NC и высоту – r.

# Базовая задача геометрии треугольника

- **2)** Если задача решается изолированно, без предшествующих, то из геометрии площадей следует  $S_{aot}:S_{tob}=AT:TB=4:5$ ,  $S_{tbo}:S_{boc}:S_{coa}=3:5:4$ . (опять ссылка на равенство высот в этих треугольниках). И далее вновь отрабатывается действие деления величины в данном отношении. Ну и любопытное замечание – площади численно будут равны длинам соответствующих оснований  $AT$ ,  $TB$ ,  $BN$ ,  $NC$ ,  $PC$ ,  $PA$ . Распространится ли это на прямоугольный треугольник:  $5, 12, 13$ ? На другие треугольники? Как, используя полученные результаты, определить синусы любого из углов этой геометрической конструкции?
- **14.** Площади треугольников, получившихся при пересечении медиан (получившиеся шесть треугольников равновелики в любом треугольнике).
- **15.** а) длина  $AK$ , если  $BK:CK=1:4$   
б) длину  $TK$ , если  $AU:TC=3:1$   
в) косинус  $\angle TKA$  – одношаговые упражнения с использованием теоремы косинусов.



# Базовая задача геометрии треугольника

- **16.** а) площадь  $\Delta CTK$   
б) площадь  $\Delta TKA$

Здесь уместно кроме вычислительного метода:

$$S_{ctk} = \frac{1}{2} CT * CK * \sin \angle C = \frac{1}{2} * 1 * 4 * \frac{3}{5} = \frac{6}{5}, \quad S_{ctk} = S_{abc} - S_{tck} - S_{akb}$$

отработать применение теоремы об отношении площадей треугольников с равными углами.

$$S_{ctk}/S_{abc} = CT * CK / CA * CB = \frac{1}{4} * \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$S_{ctk} = \frac{1}{5} * 6 = \frac{6}{5}$$

$$S_{akb}/S_{abc} = 1 * \frac{3}{5} * \frac{3}{5} = \frac{1}{5}, \quad S_{akb} = \frac{1}{5} * 6 = \frac{6}{5}$$

$$S_{tka} = 6 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

- **17.** Радиус окружности, вписанной в  $\Delta CTK$  (формула  $S = r * p$ )
- **18.** Радиус окружности, описанной около  $\Delta CTK$  (следствие из теоремы синусов –  $AK / \sin \angle ATK = 2R$ ,  $\sin \angle ATK = \sin \angle CTK$ )
- **19.** Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей для  $\Delta ABC$  (Формула Эйлера:  $d^2 = R^2 - 2Rr$ ) в произвольном треугольнике и отдельно для прямоугольного треугольника:

# Базовая задача геометрии треугольника

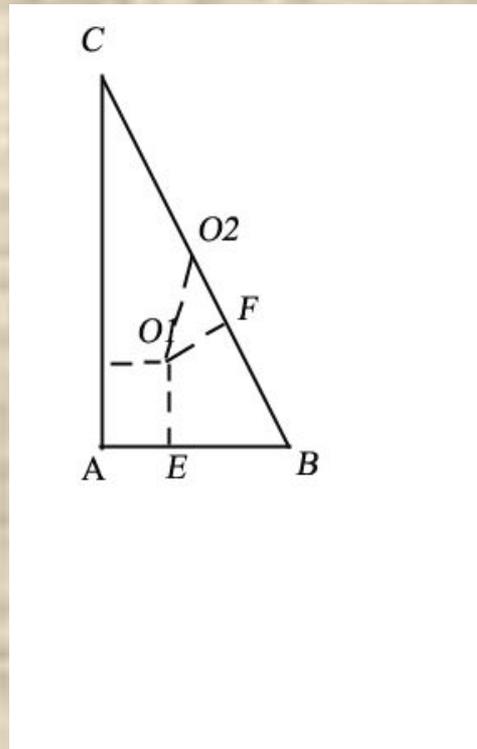
- $O_1F=1=r$ ,  $O_2B=R=2,5$ ,  $FB=EB=3-1=2$ ;  $O_2F=2,5-2=0,5$

$$O_1O_2^2=0,5^2+1=0,25+1=5/4$$

$$O_1O_2= \frac{\sqrt{5}}{2}$$

И по формуле Эйлера:  $d^2=R^2-2Rr=2,5(2,5-2)=2,5*0,5=5/4$ ;

$$d= \frac{\sqrt{5}}{2}$$



# Формула Герона

$$s/p = r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$h_a = \frac{2 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$R = \frac{abc}{4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

# СИММЕТРИЧНЫЙ ВЫВОД формулы Герона

Точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника обозначим через  $A_1, B_1, C_1$ . Треугольники  $AB_1C_1$  и  $A_1C_1B$  и  $BC_1A_1$  и  $BA_1C$  попарно равны, как прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу и равные углы.

Обозначим  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$ . Тогда  $AB_1 = b - CB_1$ ,  $AC_1 = c - BC_1$

$$AB_1 + AC_1 = 2AB_1 = 2AC_1 = b + c - (CB_1 + BC_1) = b + c - (CA_1 + BA_1) = b + c - a$$

откуда  $AB_1 = AC_1 = \frac{b+c-a}{2}$

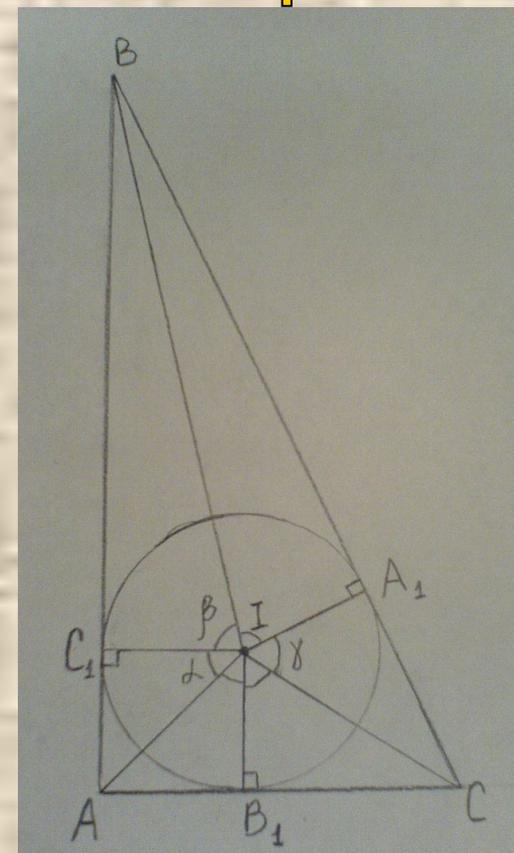
аналогично  $CA_1 = CB_1 = \frac{a+b-c}{2}$

и  $BA_1 = BC_1 = \frac{a+c-b}{2}$

Обозначим углы  $\angle C_1B_1A_1 = \alpha$ ,  $\angle C_1A_1B_1 = \beta$ ,  $\angle A_1B_1C_1 = \gamma$ .

В треугольнике  $AB_1C_1$  катеты связаны соотношением:  $r = \frac{AB_1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c-a}{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$

Откуда  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{2r}$



Аналогично

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{a+c-b}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{a+b-c}{2}$$

Так как  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} =$

То легко доказать  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (*)$

Подставив в (\*) выражения  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$   $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$   $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$

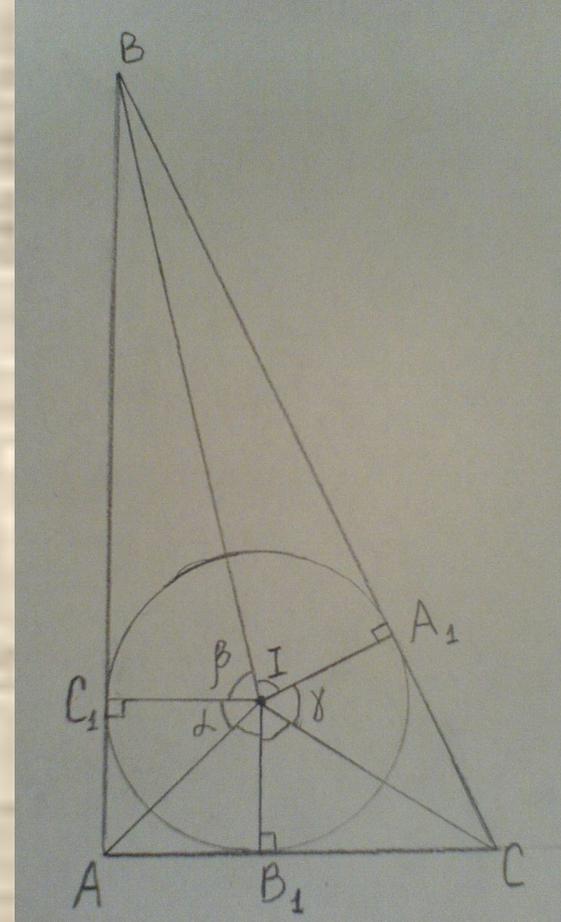
Через  $a, b, c$  и  $r$ , получим  $\frac{a+b+c}{2r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}$

Откуда  $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

Так как ,то отсюда следует формула Герона:

$$S_{ABC} = rp$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



# Вывод:

- Ну вот, пожалуй, можно остановиться в наборе основных проблем треугольника. Работа в формировании знаний, умений и навыков, связанных с этой Задачей, начинается с пятого класса – пропедевтического курса геометрии (геометрии площадей, деления отрезка данным отношением, конструктивные навыки – построение биссектрис, медиан и высот произвольным набором инструментов (метрической линейкой, транспортиром, угольником)) и длится практически до окончания курса планиметрии. Многие теоремы используются в работе задолго до их доказательства, подготавливая сознание детей к логическим операциям с используемыми понятиями. Например, биссектриса треугольника может быть построена как с помощью транспортира, так и с использованием факта деления противоположной стороны в известном отношении и только спустя значительное время это получает как чёткую логическую, так и конструктивную основу.

# Литература

- 1. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, Наука, 1948. 48 с
- 2. Green T. M., Hamberg C. L. Pascal's Triangle. Palo Alto: Dale Seymour? 1986.
- 3. Бондаренко Б. А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. Ташкент: Фан, 1990. 192 с.
- 4. Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А. и др. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1990. 208 с.
- 5. Кузьмин О. В. Некоторые комбинаторные числа в обобщенной пирамиде Паскаля // Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1997. С. 90-100.
- 6. Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В. Обобщения триномиальных коэффициентов // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца М.: 1983. Вып. 63. С. 60-67.
- Рецензент статьи Ю. П. Соловьев.