

Урок 6

Трехгранный угол

Основное свойство трехгранного угла.

Теорема.

В трехгранном угле сумма плоских углов меньше 360° и сумма любых двух из них больше третьего.

Дано: $Oabc$ – трехгранный угол;

$\angle(b; c) = \alpha$; $\angle(a; c) = \beta$; $\angle(a; b) = \gamma$.

Доказать:

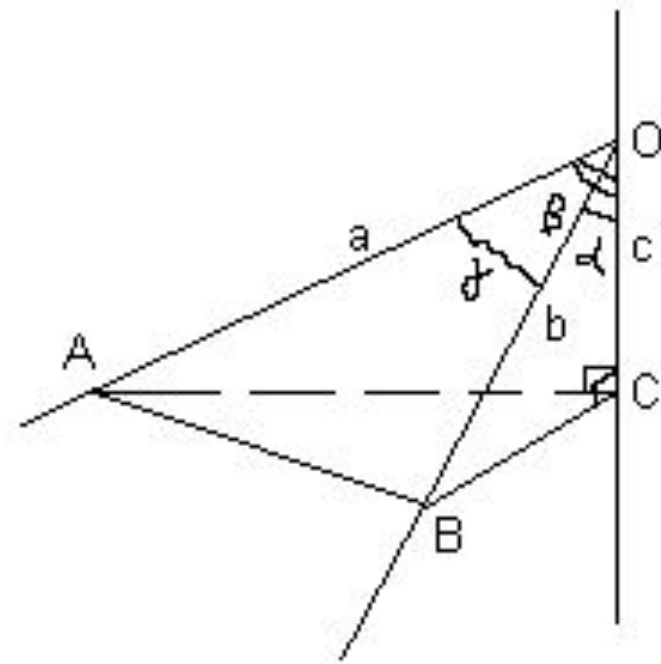
1) $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$;

2) $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$.

Дано: $Oabc$ – трехгранный угол;
 $\angle(b; c) = \alpha$; $\angle(a; c) = \beta$; $\angle(a; b) = \gamma$.

Доказать:

2) $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$.



Доказательство

I. Пусть $\alpha < 90^\circ$; $\beta < 90^\circ$; $(ABC) \perp c$.

Тогда $\angle OBC = 90^\circ - \alpha < \angle OBA$

(следствие из формулы трех косинусов).

Аналогично, $\angle OAC = 90^\circ - \beta < \angle OAB$.

Следовательно,

$$\gamma = 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA) < 180^\circ - ((90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)) = \alpha + \beta$$

Если $\gamma < 90^\circ$, то остальные два неравенства пункта 2) доказываются аналогично,
а если $\gamma \geq 90^\circ$, то они – очевидны.

Формула трех косинусов

Следствия. 1) **Для вычисления угла между прямой и плоскостью применима формула:**

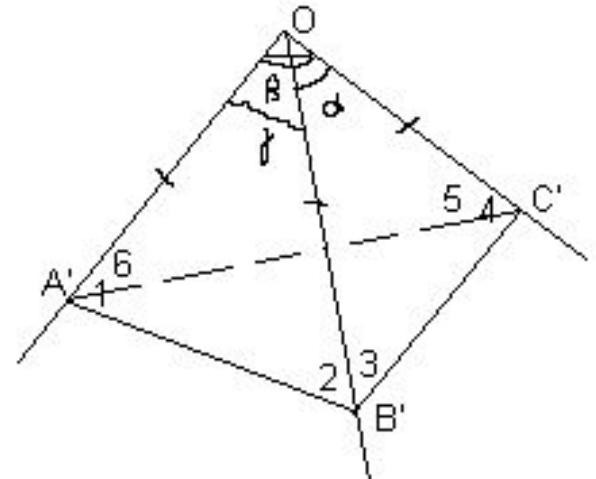
$$\cos \alpha = \frac{\cos \varphi}{\cos \beta}$$

2) **Угол между прямой и плоскостью – наименьший из углов, которая эта прямая, образует с прямыми этой плоскости.**

Дано: $Oabc$ – трехгранный угол;
 $\angle(b; c) = \alpha$; $\angle(a; c) = \beta$; $\angle(a; b) = \gamma$.

Доказать:

- 1) $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$;
- 2) $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$.



II. На ребрах данного угла отложим точки A' , B' и C' так, что $|OA'| = |OB'| = |OC'|$

Тогда треугольники $A'OB'$, $B'OC'$ и $C'OA'$ – равнобедренные, а их углы при основаниях 1 – 6 – острые.

Для трехгранных углов с вершинами A' , B' и C' применим неравенства, доказанные в пункте I:

$$\angle C'A'B' < \angle 1 + \angle 6; \angle A'B'C' < \angle 2 + \angle 3; \angle B'C'A' < \angle 4 + \angle 5.$$

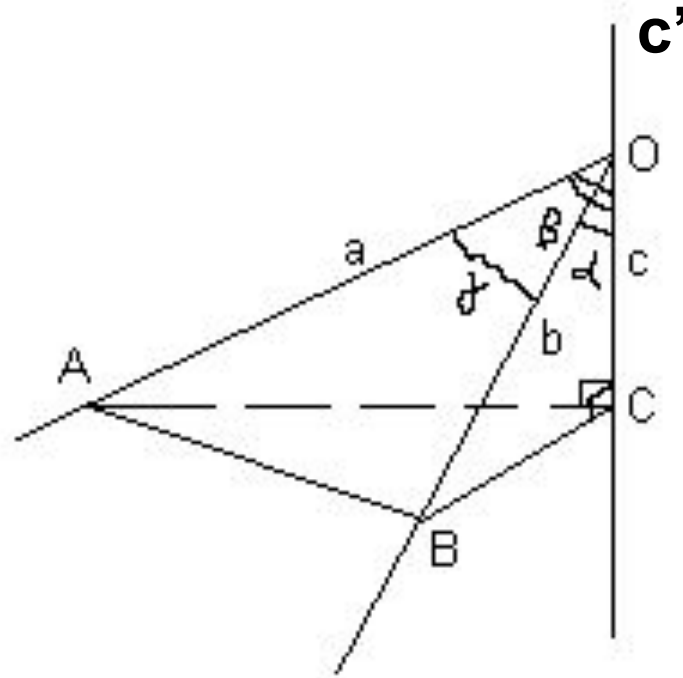
Сложим эти неравенства почленно,

$$\begin{aligned} \text{тогда } 180^\circ &< (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 5 + \angle 6) = \\ &= (180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 360^\circ. \end{aligned}$$

Дано: $Oabc$ – трехгранный угол;
 $\angle(b; c) = \alpha$; $\angle(a; c) = \beta$; $\angle(a; b) = \gamma$.

Доказать:

- 1) $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$;
- 2) $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$.



III. Рассмотрим луч c' – дополнительный лучу c и для трехгранного угла $Oabc'$ используем неравенство, доказанное в пункте II для произвольного трехгранного угла:

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + \gamma < 360^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta > \gamma.$$

Аналогично доказываются и два остальных неравенства

Следствие.

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине меньше 120° .

Определение.

Трехгранные углы называются равными если равны все их соответствующие плоские и двугранные углы.

Признаки равенства трехгранных углов.

Трехгранные углы равны, если у них соответственно равны:

- 1) два плоских угла и двугранный угол между ними;**
- 2) два двугранных угла и плоский угол между ними;**
- 3) три плоских угла;**
- 4) три двугранных угла.**

Аналог теоремы косинусов

Дан трехгранный угол $Oabc$.

I. Пусть $\alpha < 90^\circ$; $\beta < 90^\circ$; тогда рассмотрим $(ABC) \perp c$

По теореме косинусов из $\triangle CAB$:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \hat{C}$$

Аналогично, из $\triangle OAB$:

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos \gamma.$$

Вычтем из второго равенства первое и учтем, что

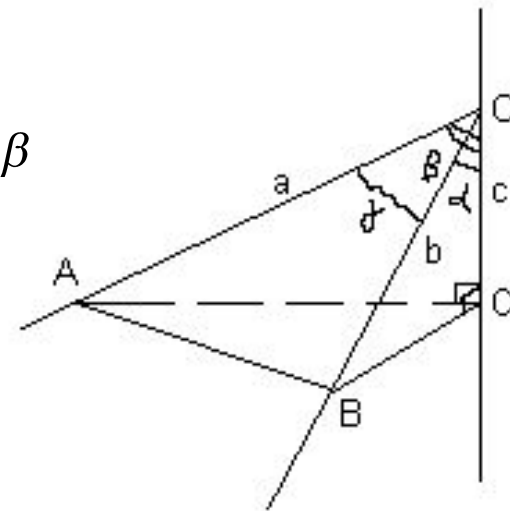
$$|AO|^2 - |AC|^2 = |CO|^2 = |BO|^2 - |BC|^2:$$

$$2|CO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos \gamma + 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \hat{C} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos \gamma = \frac{|CO|^2}{|AO| \cdot |BO|} + \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AO| \cdot |BO|} \cos \hat{C}$$

Заменим: $\frac{|CO|}{|BO|} = \cos \alpha$ $\frac{|BC|}{|BO|} = \sin \alpha$ $\frac{|AC|}{|AO|} = \sin \beta$ $\frac{|CO|}{|AO|} = \cos \beta$

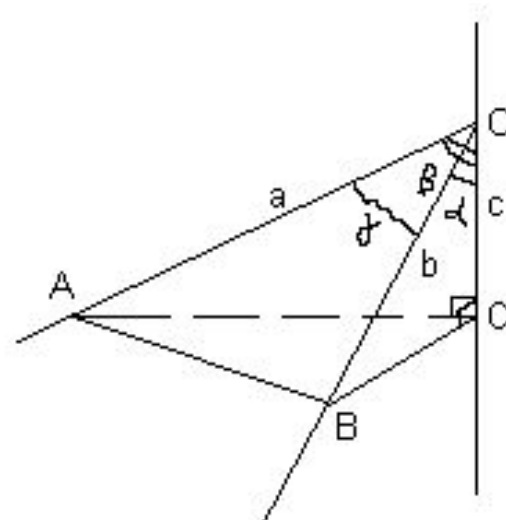
тогда **$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos$**



II. Пусть $\alpha > 90^\circ$; $\beta > 90^\circ$,
 тогда рассмотрим луч c' , дополнительный к c ,
 и соответствующий трехгранный угол $Oabc'$,
 в котором плоские углы $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$ — острые,
 а плоский угол γ и двугранный угол $\hat{C}$ — те же самые.

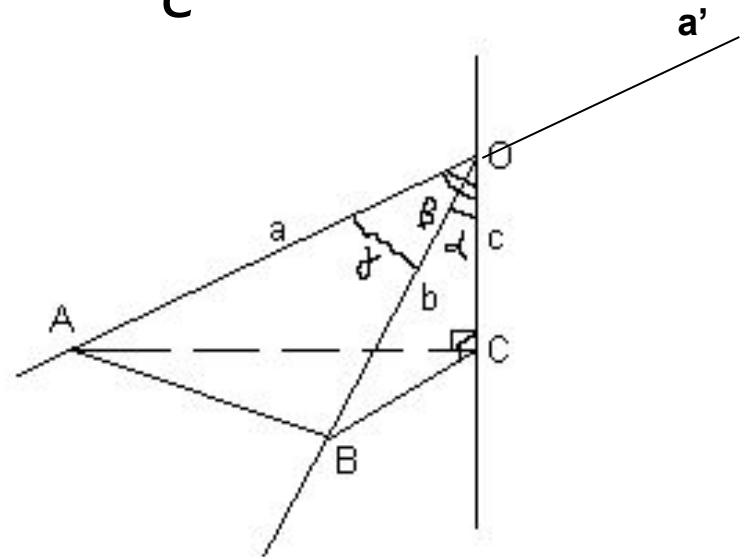
По I.: $\cos \gamma = \cos(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos \hat{C}$

$$\Leftrightarrow \cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \hat{C}$$



III. Пусть $\alpha < 90^\circ$; $\beta > 90^\circ$,
 тогда рассмотрим луч a' ,
 дополнительный к a ,
 и соответствующий трехгранный угол $Oa'bc$, в котором
 плоские углы α и $\pi - \beta$ — острые,
 третий плоский угол — $(\pi - \gamma)$,
 а противолежащий ему двугранный угол — $(\pi - \hat{C})$

По I.: $\cos(\pi - \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin\alpha \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \hat{C})$
 $\Leftrightarrow \cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{C}$



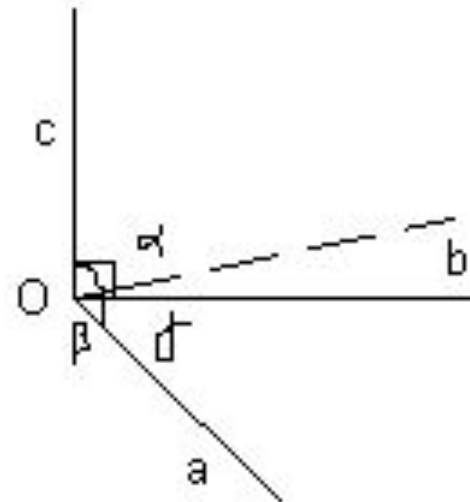
IV. Пусть $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 90^\circ$, тогда $\gamma = \hat{C}$

и равенство, очевидно, выполняется.

Если же только один из этих углов, например, $\beta = 90^\circ$,

то доказанная формула имеет вид:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \cos \hat{C} \Leftrightarrow \cos \gamma = \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \hat{C}$$



Следствие. Если $\hat{C} = 90^\circ$, то $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$

—
аналог теоремы Пифагора!