

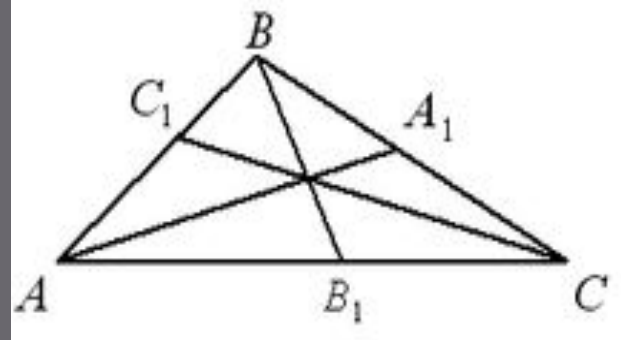
ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

Подготовила
Ученица 8 класса «Б»
Шебанкова Марина

Биография ученого

Чева (Джованни) — итальянский математик. Умер в 1734 г. Главными предметами его занятий были геометрия и механика. Он написал много сочинений. Самым замечательным из них было первое *"De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio"* (Милан, 1678); . В первой его части автор доказывает теорему Менелая и ряд сходных с нею теорем при помощи статического метода, основанного на свойствах центра тяжести системы точек.

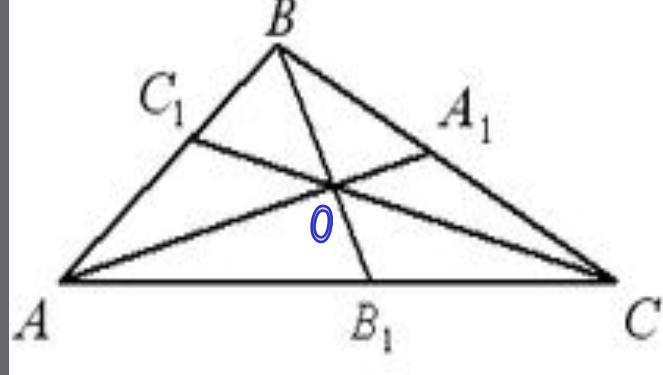
Теорема Чебы



- Если на сторонах АВ, ВС и СА треугольника АВС взяты соответственно точки С1, А1 и В1, то отрезки АА1, ВВ1 и СС1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

- $$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{AC_1} = 1 \quad (1)$$

Доказательство. 1.



- Пусть отрезки AA1, BB1 и CC1 пересекаются в точке O. Докажем, что $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{AC_1} = 1$
- По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем:
- $\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} * \left(1 + \frac{CA_1}{A_1B}\right)$ и $\frac{AO}{OA_1} = \frac{C_1A}{BC_1} * \left(1 + \frac{A_1B}{CA_1}\right)$
- Левые части этих равенств одинаковы, значит, равны и правые части. Приравнявая их, получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{BC}{A_1B} = \frac{C_1A}{BC_1} * \frac{BC}{CA_1}$$

Разделив обе части на правую часть, приходим к равенству (1)

УТВЕРЖДЕНИЕ ОБРАТНОЕ ТЕОРЕМЕ.

Пусть для точек A_1, B_1, C_1 , взятых на

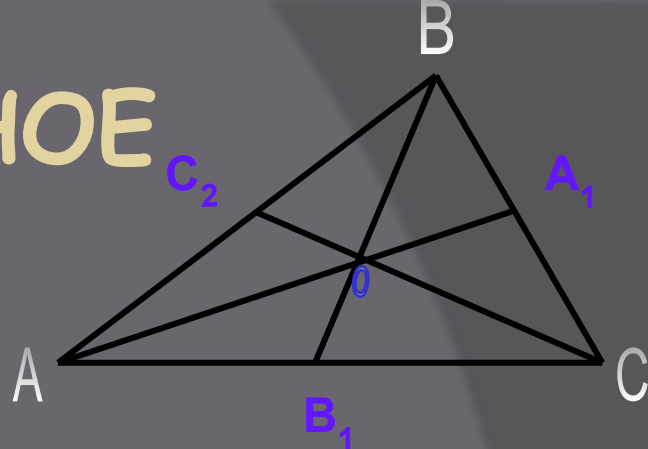
соответствующих сторонах треугольника ABC ,

Выполняется равенство (1). Докажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 через O и проведем прямую CO . Она пересекает сторону AB в точке C_2 . Т.к. отрезки AA_1, BB_1 и CC_2 пересекаются в одной точке, то на основании доказанного в первом пункте

$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_2}{C_2A} = 1 \quad (2)$$

Итак, имеют место равенства (1) и (2)

Сопоставляя их, приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$, которое показывает, что точки C_1 и C_2 совпадают, и, значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Теорема доказана.

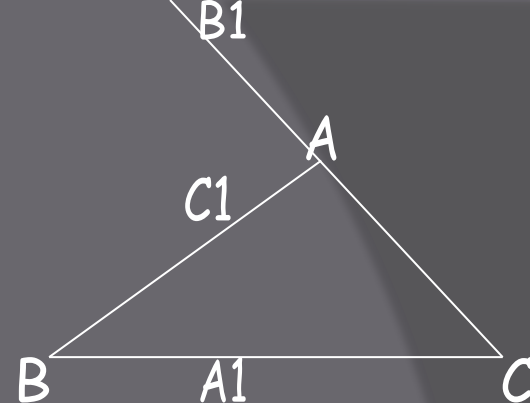


Биография ученого

- **Менелай** Александрийский (Menélaos), древнегреческий астроном и математик (1 в.). Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики» (сохранились в арабском переводе). Тригонометрия у Менелая отделена от геометрии и астрономии. Арабские авторы упоминают также о книге Менелая по гидростатике.

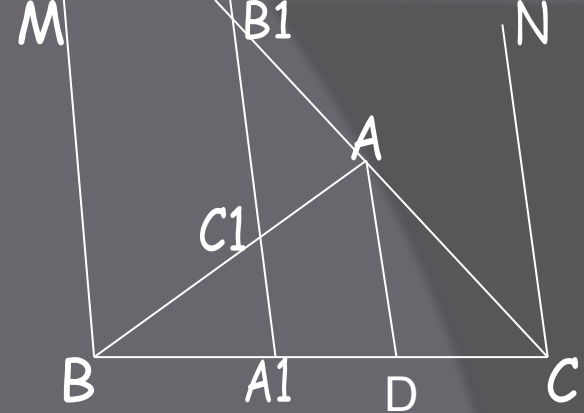
Теорема Менелая

Если на сторонах АВ, ВС и продолжении АС треугольника АВС соответственно взяты точки С1, А1 и В1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда



$$\frac{AB1}{B1C} * \frac{CA1}{A1B} * \frac{BC1}{C1A} = 1 \quad (3)$$

Доказательство.1.



Пусть точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Докажем, что $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Проведем прямые AD , BM и CN параллельно прямой B_1A_1 . Согласно обобщению теоремы Фалеса имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{DA_1}{A_1C} \quad \text{и} \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BA_1}{A_1D}$$

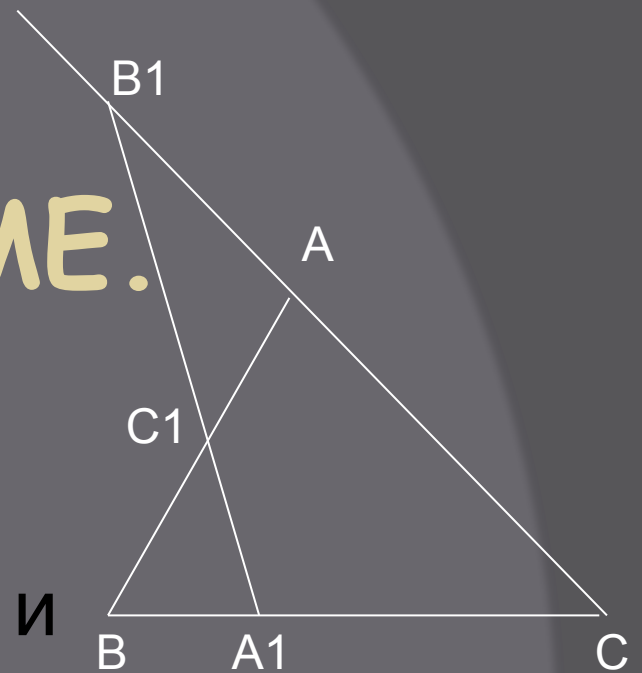
Перемножая левые и правые части этих равенств, получаем:

$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{A_1B}{CA_1} \quad , \quad \text{откуда} \quad \frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

УТВЕРЖДЕНИЕ ОБРАТНОЕ ТЕОРЕМЕ.

- Пусть точка B_1 взята на продолжении стороны AC , а точки C_1 и A_1 на сторонах AB и BC , причем так, что выполнено равенство $\frac{A\tilde{A}_1}{A_1\tilde{N}} * \frac{N\tilde{A}_1}{\tilde{A}_1\tilde{A}} * \frac{\tilde{A}\tilde{N}_1}{\tilde{N}_1\tilde{A}} = 1$.

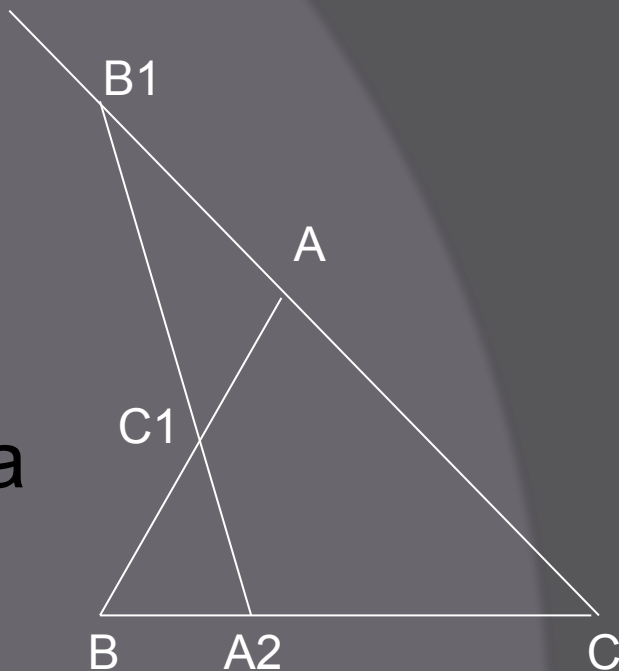
Докажем, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.



Доказательство.

Прямая B_1C_1 пересекает сторону BC в некоторой точке A_2 . Т.к. точки B_1, C_1 и A_2 лежат на одной прямой, то по теореме Менелая $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ (4)

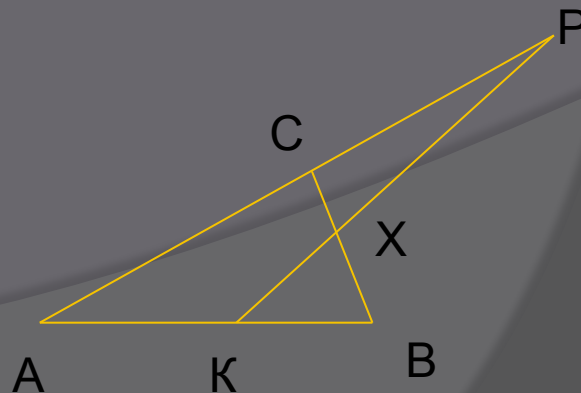
Сопоставляя (3) и (4), приходим к равенству $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_2}{A_2B}$, которое показывает, что точки A_1 и A_2 делят сторону BC в одном и том же отношении. Следовательно, точки A_1 и A_2 совпадают, и, значит, точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.



Задача.1

Дано: точка K делит сторону AB равнобедренного треугольника ABC ($AB=AC$) в отношении $2:1$. Точка P лежит на продолжении AC за точку C , и $AB=CP$.

Найти: в каком отношении делит прямая PK сторону BC .



Решение.

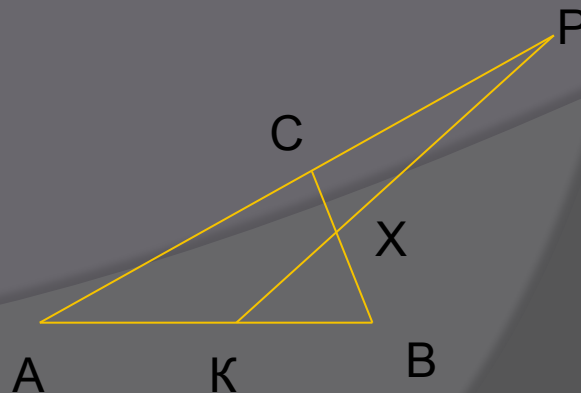
По условию

$$\frac{AK}{KB} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{CP}{PA} = \frac{1}{2}$$

Используя теорему Менелая, мы
находим

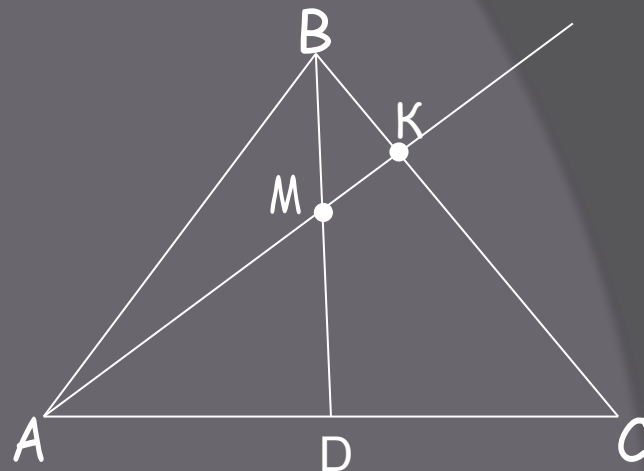
$$\frac{CP}{PA} * \frac{AK}{KB} * \frac{BX}{XC} = 1$$

$$\frac{BX}{XC} = 1$$



Задача 2.

- На медиане BD треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM:MD=m:n$.
Прямая AM пересекает сторону BC в точке K .
найдите отношение $BK:KC$.



Решение.

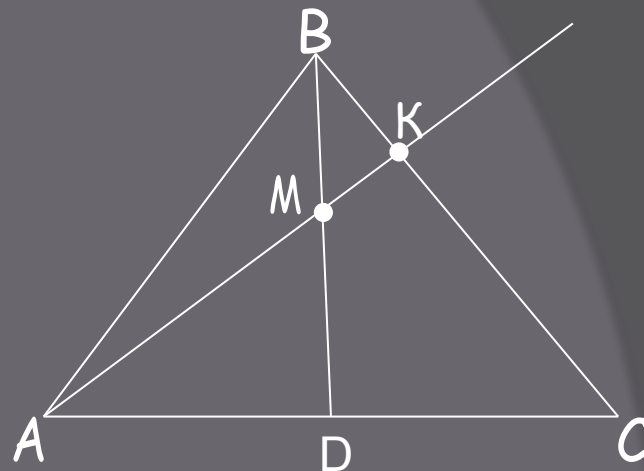
- По теореме Менелая:

$$\frac{AD}{AC} * \frac{CK}{KB} * \frac{BM}{MD} = 1$$

BM-медиана, значит $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

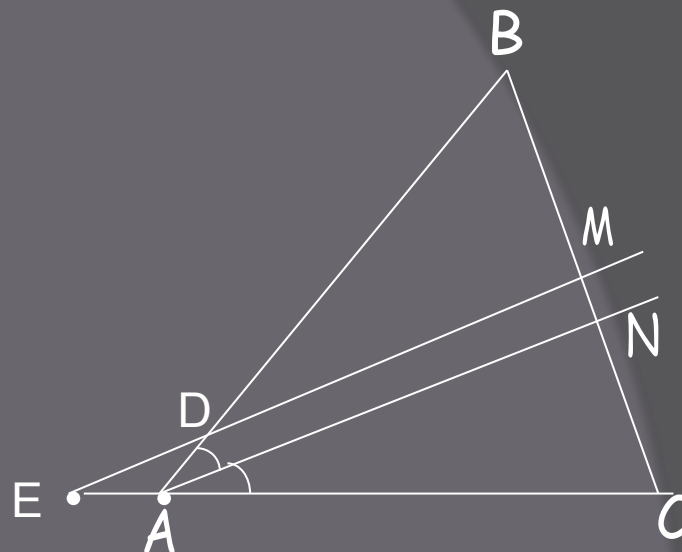
$$\frac{1}{2} * \frac{CK}{KB} * \frac{m}{n} = 1$$

$$\frac{BK}{KC} = \frac{m}{2n}$$



Задача 3.

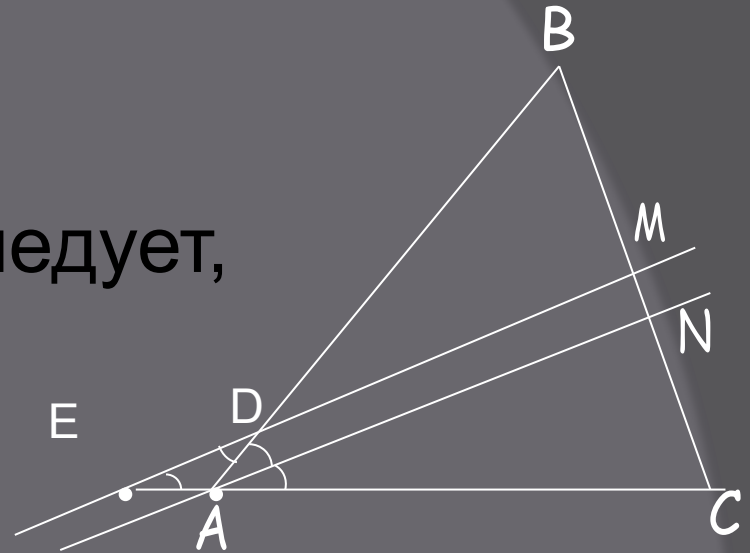
- Через середину M стороны BC треугольника ABC , в котором $AB \neq AC$, проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая прямые AB и AC соответственно в точках D и E . Докажите, что $BD = CE$



Решение .

- По теореме Менелая следует, что

$$\frac{AE}{EC} * \frac{CM}{MB} * \frac{BD}{DA} = 1$$



Т.к. точка М середина стороны ВС, следовательно

$$\frac{CM}{MB} = 1 \quad . \text{Значит} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{DA}{BD} .$$

AE=DA, следовательно EC=BD.