"Теорема Пифагора и способы ее доказ

- План:
- 1) Введение.
- Биография Пифагора.
- Не алгебраические доказательства теоремы.
- *А) Простейшее доказательство.*
- *Б) Древнекитайское доказательство.*
- *В) Древнеиндийское доказательство.*
- *Г) Доказательство Евклида.*
- Алгебраические доказательства теоремы.
- А) Предисловие.
- Б) Первое доказательство.
- В) Второе доказательство.
- Заключение.

- Трудно найти человека, у которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с теоремой Пифагора. Пожалуй, даже те, кто в своей жизни навсегда распрощался с математикой, сохраняют воспоминания о «пифагоровых штанах» — квадрате на гипотенузе, равновеликом двум квадратам на катетах. Причина такой популярности теоремы Пифагора триедина: это простота — красота — значимость. В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Но, кроме того, теорема Пифагора имеет огромное значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу, и тот факт, что существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.), свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций.

- Открытие теоремы Пифагором окружено ореолом красивых легенд. Прокл, комментируя последнее предложение первой книги «Начал» Евклида, пишет: «Если послушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит к Пифагору; рассказывают, что он в честь этого открытия принес в жертву быка». Впрочем, более щедрые сказители одного быка превратили в одну гекатомбу, а это уже целая сотня. И хотя еще Цицерон заметил, что всякое пролитие крови было чуждо уставу пифагорейского ордена, легенда эта прочно срослась с теоремой Пифагора и через две тысячи лет продолжала вызывать горячие отклики. Так, оптимист Михаил Ломоносов (1711--1765) писал: «Пифагор за изобретение одного геометрического правила Зевсу принес на жертву сто волов.

- Но ежели бы за найденные в нынешние времена от остроумных математиков правила по суеверной его ревности поступать, то едва бы в целом свете столько рогатого скота сыскалось». А вот ироничный Генрих Гейне (1797—1856) видел развитие той же ситуации несколько иначе: «Кто знает! Кто знает! Возможно, душа Пифагора переселилась в беднягу кандидата, который не смог доказать теорему Пифагора и провалился из-за этого на экзаменах, тогда как в его экзаменаторах обитают души тех быков, которых Пифагор, обрадованный открытием своей теоремы, принес в жертву бессмертным богам». Сегодня теорема Пифагора обнаружена в различных частных задачах и чертежах: и в египетском треугольнике в папирусе времен фараона Аменемхета первого (ок. 2000 до н.э.), и в вавилонских клинописных табличках эпохи царя Хаммурапи (XVIII в. до н.э.), и в древнеиндийском геометрическо-теологическом трактате VII —V вв. до н.э. «Сульва сутра» («Правила веревки»).

- В древнейшем китайском трактате «Чжоу-би суань цзинь», время создания которого точно не известно, утверждается, что в XII в. до н. э. китайцы знали свойства египетского треугольника, а к VI в. до н. э.—и общий вид теоремы. Несмотря на все это, имя Пифагора столь прочно сплавилось с теоремой Пифагора, что сейчас просто невозможно представить, что это словосочетание распадется. То же относится и к легенде о заклании быков Пифагором. Да и вряд ли нужно препарировать историко-математическим скальпелем красивые древние предания. Сегодня принято считать, что Пифагор дал первое доказательство носящей его имя теоремы. Увы, от этого доказательства также не сохранилось никаких следов.

- Я рассмотрю некоторые классические доказательства теоремы Пифагора, известные из древних трактатов. Сделать это полезно еще и потому, что в современных школьных учебниках дается алгебраическое доказательство теоремы. При этом бесследно исчезает первозданная геометрическая аура теоремы, теряется та нить Ариадны, которая вела древних мудрецов к истине, а путь этот почти всегда оказывался кратчайшим и всегда красивым. Итак, Теорема Пифагора.

- ***Биография Пифагора.*** **Великий ученый Пифагор родился около 570 г. до н.э. на острове Самосе. Отцом Пифагора был Мнесарх, резчик по драгоценным камням. Имя же матери Пифагора не известно. По многим античным свидетельствам, родившийся мальчик был сказочно красив, а вскоре проявил и свои незаурядные способности. Среди учителей юного Пифагора традиция называет имена старца Гермодаманта и Ферекида Сиросского (хотя и нет твердой уверенности в том, что именно Гермодамант и Ферекид были первыми учителями Пифагора).**

- Целые дни проводил юный Пифагор у ног старца Гермодаманта, внимая мелодии кифары и гекзаметрам Гомера. Страсть к музыке и поэзии великого Гомера Пифагор сохранил на всю жизнь. И, будучи признанным мудрецом, окруженным толпой учеников, Пифагор начинал день с пения одной из песен Гомера. Ферекид же был философом и считался основателем италийской школы философии. Таким образом, если Гермодамант ввел юного Пифагора в круг муз, то Ферекид обратил его ум к логосу. Ферекид направил взор Пифагора к природе и в ней одной советовал видеть своего первого и главного учителя. Но как бы то ни было, неугомонному воображению юного Пифагора очень скоро стало тесно на маленьком Самосе, и он отправляется в Милет, где встречается с другим ученым - Фалесом. Фалес советует ему отправится за знаниями в Египет, что Пифагор и сделал.

- В 548 г. до н.э. Пифагор прибыл в Навкратис – самосскую колонию, где было у кого найти кров и пищу. Изучив язык и религию египтян, он уезжает в Мемфис. Несмотря на рекомендательное письмо фараона, хитроумные жрецы не спешили раскрывать Пифагору свои тайны, предлагая ему сложные испытания. Но влекомый жаждой к знаниям, Пифагор преодолел их все, хотя по данным раскопок египетские жрецы не многому могли его научить, т.к. в то время египетская геометрия была чисто прикладной наукой (удовлетворявшей потребность того времени в счете и в измерении земельных участков). Поэтому, научившись всему, что дали ему жрецы, он, убежав от них, двинулся на родину в Элладу.

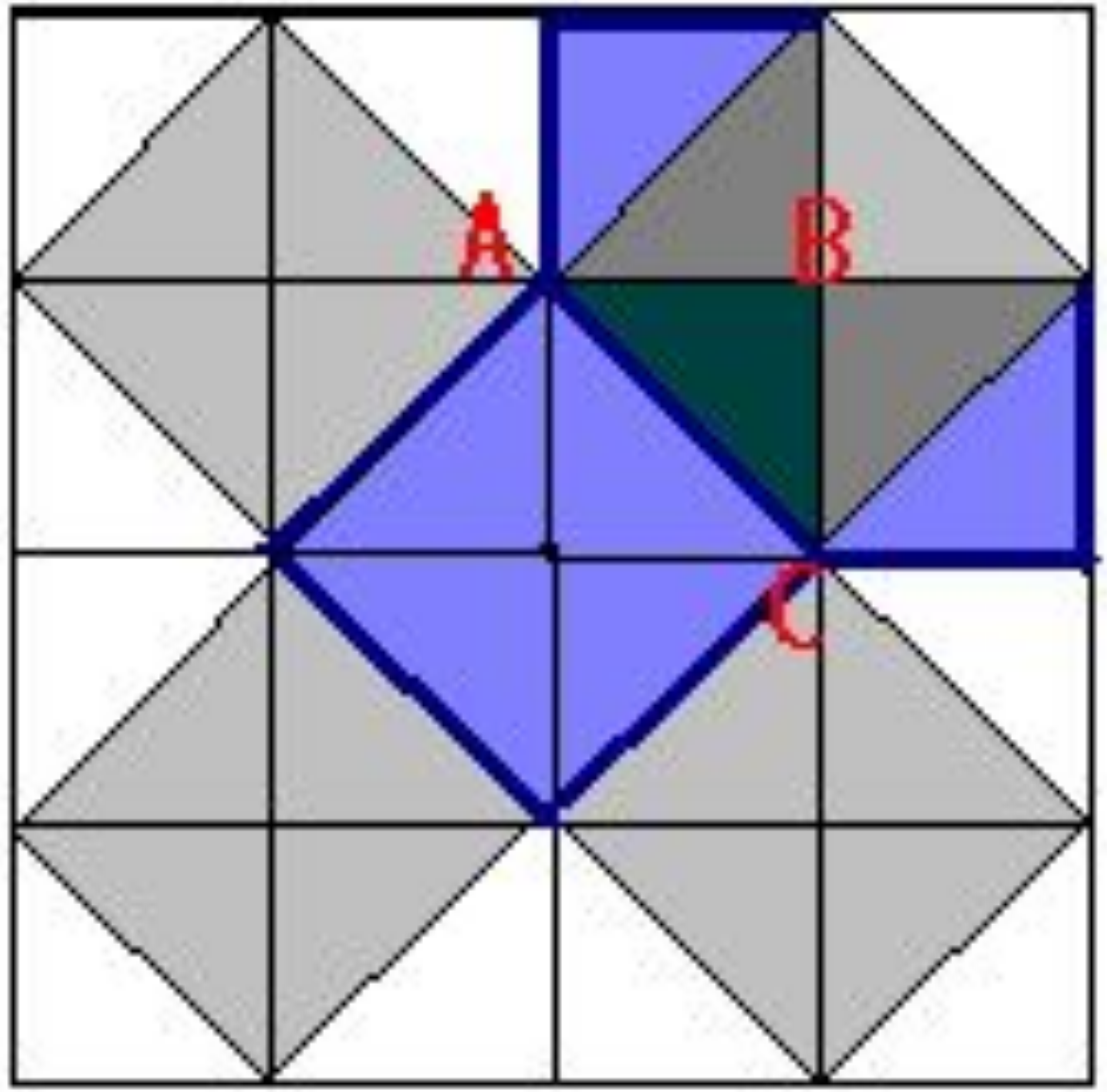
- Однако, проделав часть пути, Пифагор решается на сухопутное путешествие, во время которого его захватил в плен Камбиз, царь Вавилона, направлявшийся домой. Не стоит драматизировать жизнь Пифагора в Вавилоне, т.к. великий властитель Кир был терпим ко всем пленникам. Вавилонская математика была, бесспорно, более развитой (примером этому может служить позиционная система исчисления), чем египетская, и Пифагору было чему поучится. Но в 530 г. до н.э. Кир двинулся в поход против племен в Средней Азии. И, пользуясь переполохом в городе, Пифагор сбежал на родину. А на Самосе в то время царствовал тиран Поликрат. Конечно же, Пифагора не устраивала жизнь придворного полу раба, и он удалился в пещеры в окрестностях Самоса.

После нескольких месяцев притязаний со стороны Поликрата, Пифагор переселяется в Кротон. В Кротоне Пифагор учредил нечто вроде религиозно-этического братства или тайного монашеского ордена («пифагорейцы»), члены которого обязывались вести так называемый пифагорейский образ жизни. Это был одновременно и религиозный союз, и политический клуб, и научное общество. Надо сказать, что некоторые из проповедуемых Пифагором принципов достойны подражания и сейчас.

- ...Прошло 20 лет. Слава о братстве разнеслась по всему миру. Однажды к Пифагору приходит Килон, человек богатый, но злой, желая спьяну вступить в братство. Получив отказ, Килон начинает борьбу с Пифагором, воспользовавшись поджогом его дома. При пожаре пифагорейцы спасли жизнь своему учителю ценой своей, после чего Пифагор затосковал и вскоре покончил жизнь самоубийством.

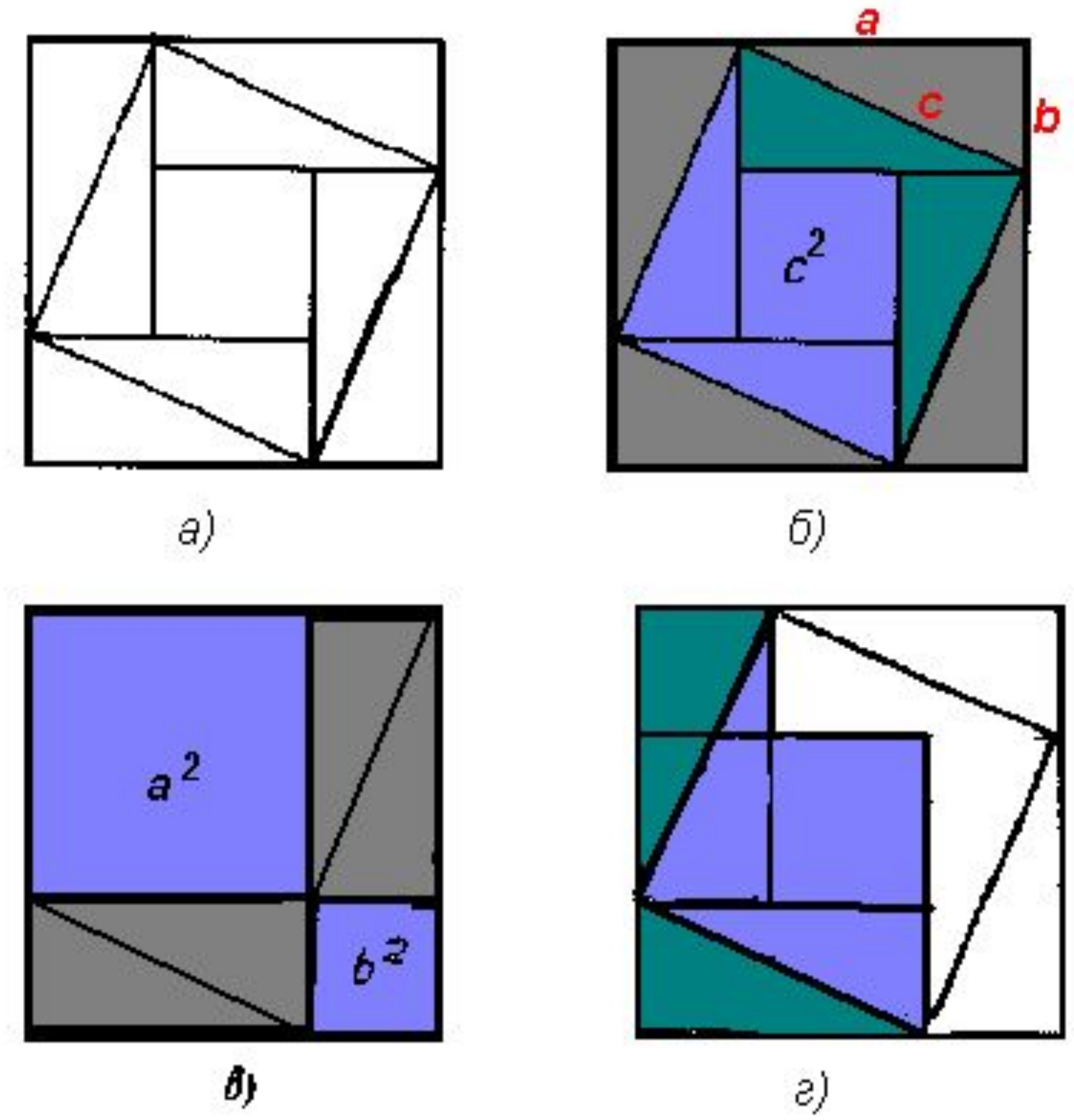
- *"Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах." Простейшее доказательство* теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 1), чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для $\wedge$ABC : квадрат, построенный на гипотенузе *AC,* содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,— по два. Теорема доказана.

Рис 1.



- ***Древнекитайское доказательство.*** **Математические трактаты Древнего Китая дошли до нас в редакции II в. до н. э. Дело в том, что в 213 г. до н.э. китайский император Ши Хуан-ди, стремясь ликвидировать прежние традиции, приказал сжечь все древние книги. Во II в. до н.э. в Китае была изобретена бумага и одновременно начинается воссоздание древних книг.**

Рис 2.

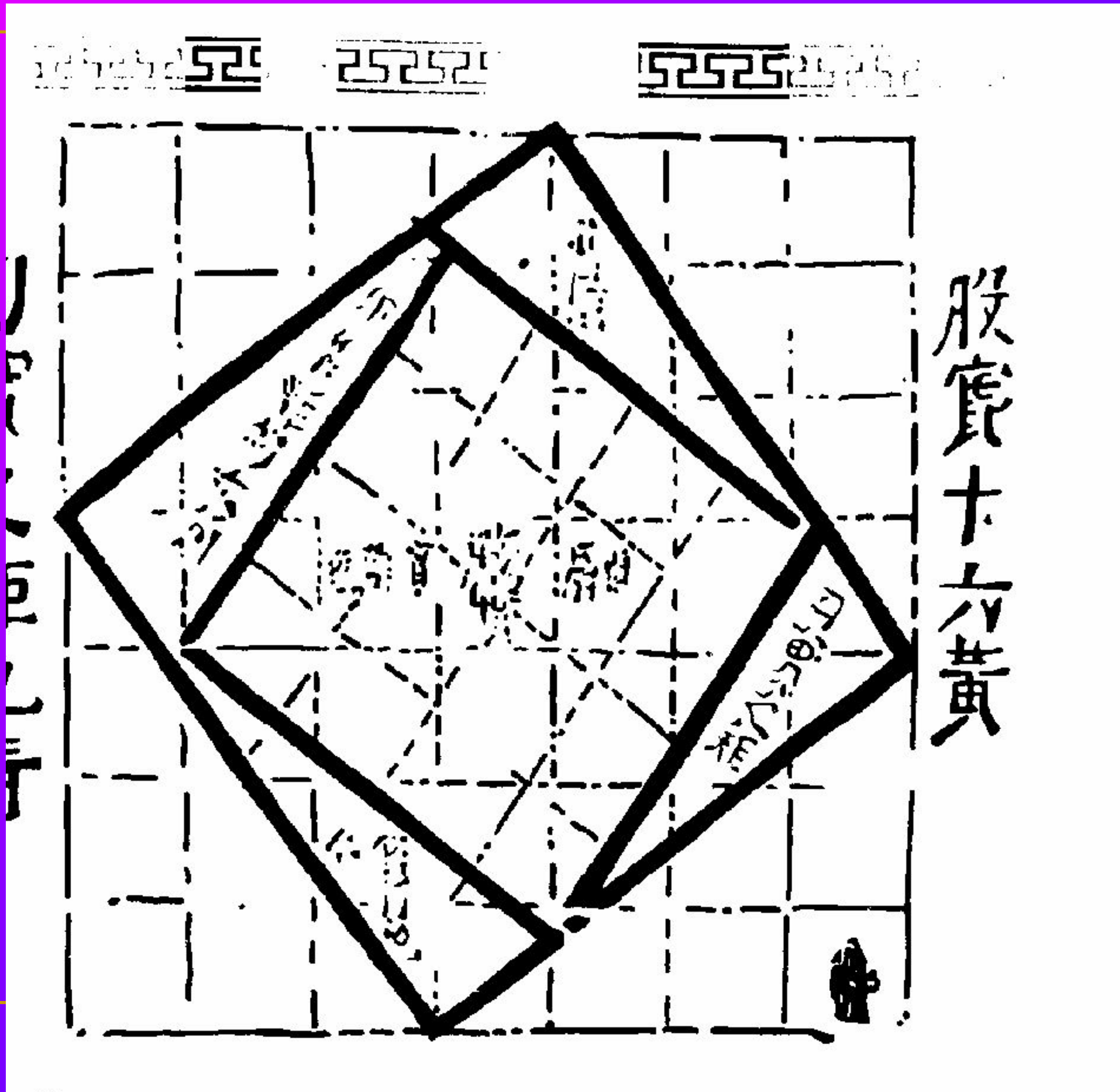


- Так возникла тематика в девяти книгах» — главное из сохранившихся математико - астрономических сочинений в книге «Математики» помещен чертеж (рис. 2, а), доказывающий теорему Пифагора. Ключ к этому доказательству Рис. 2
- подобрать нетрудно. В самом деле, на древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a, b и гипотенузой *с* уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной *а+b,* а внутренний — квадрат со стороной *с,* построенный на гипотенузе (рис. 2, б). Если квадрат со стороной *с* вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника (рис. 2, *в),* то ясно, что образовавшаяся пустота, с одной стороны, равна *с2,* а с другой — *а2+Ь2,* т.е. *с2=а2+Ь2.* Теорема доказана. Заметим, что при таком доказательстве построения внутри квадрата на гипотенузе, которые мы видим на древнекитайском чертеже (рис. 2, а), не используются.

- По-видимому, древнекитайские математики имели другое доказательство. Именно если в квадрате со стороной *с* два заштрихованных треугольника (рис. 2, *б)* отрезать и приложить гипотенузами к двум другим гипотенузам (рис. 2, *г),* то легко обнаружить, что полученная фигура, которую иногда называют «креслом невесты», состоит из двух квадратов со сторонами *а* и *b,* т.е. *с2=а2+Ь2.*

- На рисунке 3 воспроизведен чертеж из трактата «Чжоу-би...». Здесь теорема Пифагора рассмотрена для египетского треугольника с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 единиц измерения. Квадрат на гипотенузе содержит 25 клеток, а вписанный в него квадрат на большем катете—16. Ясно, что оставшаяся часть содержит 9 клеток. Это и будет квадрат на меньшем катете

Рис 3.



- *Древнеиндийское доказательство.* Математики Древней Индии заметили, что для доказательства теоремы Пифагора достаточно использовать внутреннюю часть древнекитайского чертежа. В написанном на пальмовых листьях трактате «Сиддханта широмани» («Венец знания») крупнейшего индийского математика XII в. Бхаскары помещен чертеж (рис. 4, а) с характерным для индийских доказательств словом «смотри!». Как видим, прямо-угольньные треугольники уложены здесь гипотенузой наружу и квадрат с2 перекладывается в «кресло невесты» *a2-b2* (рис. 4, б).

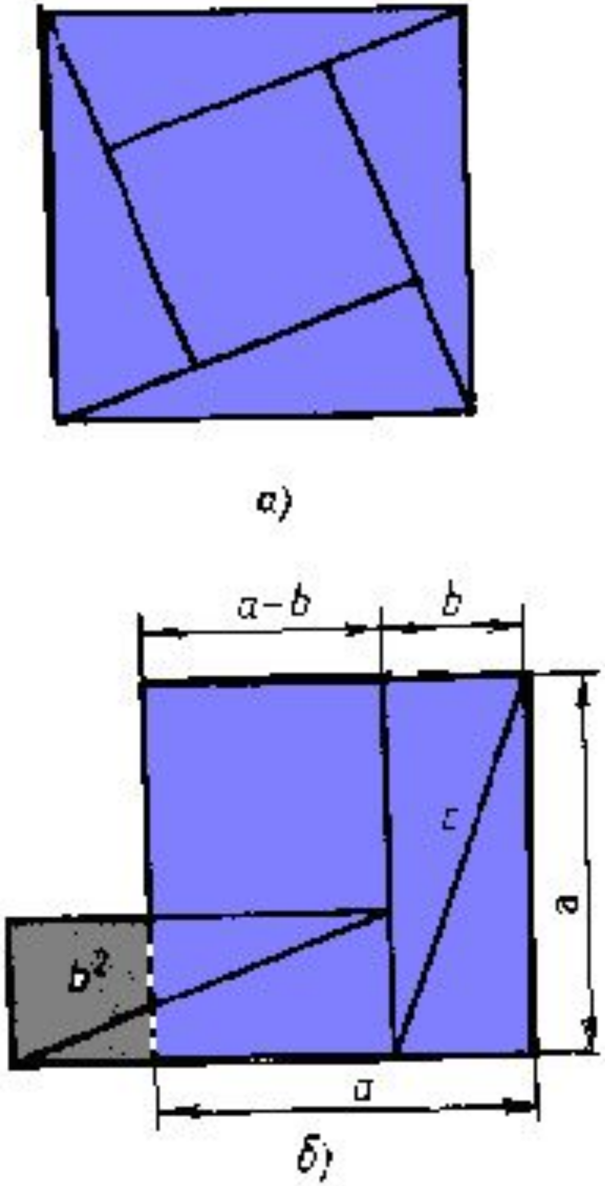
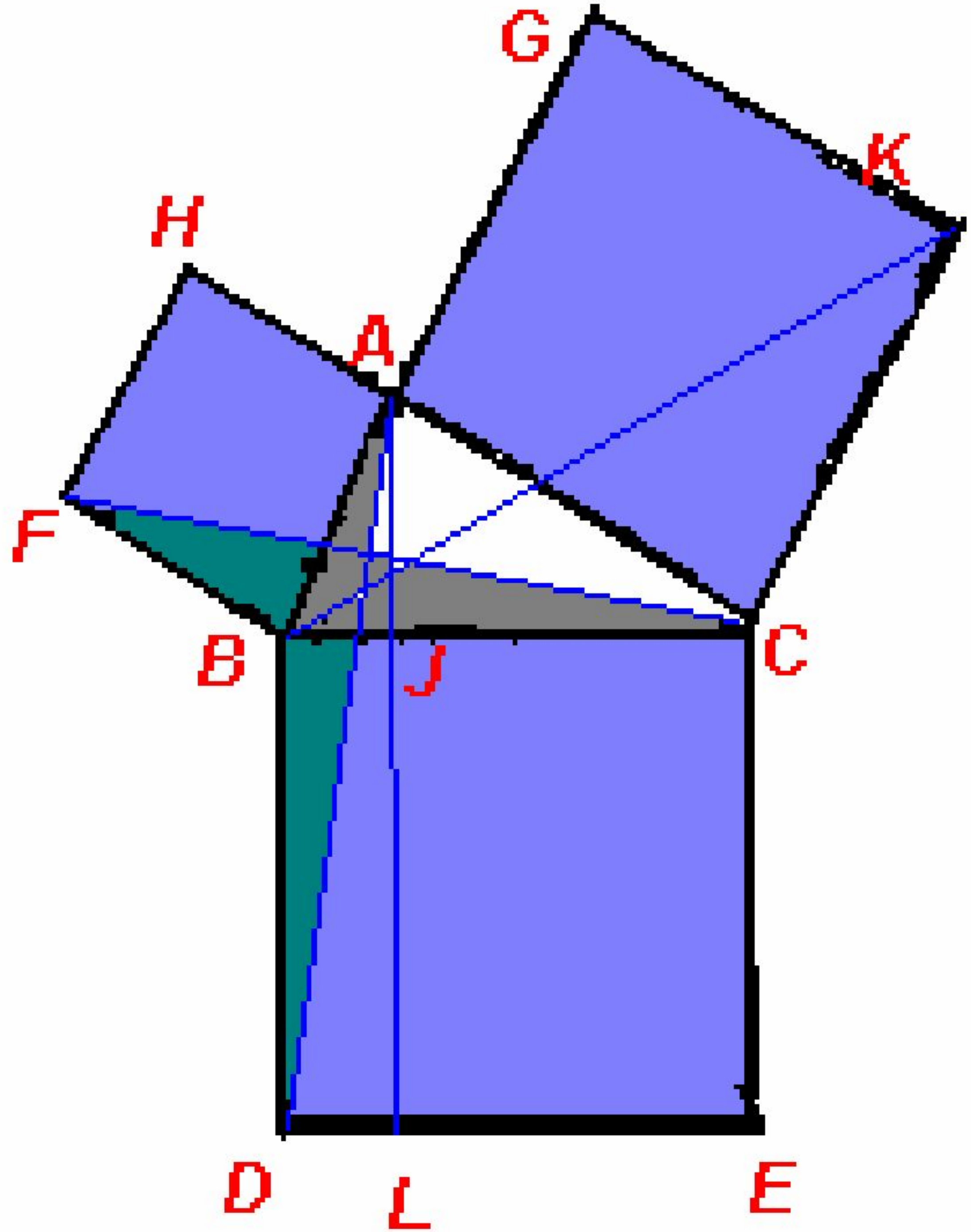


Рис. 4

Заметим, что частные случаи теоремы Пифагора (например, построение квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата) встречаются в древнеиндийском трактате «Сульва сутра» (VII —V вв. до н. э.).

- *__Доказательство Евклида__* приведено в предложении 47 первой книги «Начал». На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника *ABC* строятся соответствующие квадраты (рис. 5) и доказывается, что прямоугольник *BJLD* равновелик квадрату *ABFH,* а прямоугольник *ICEL* — квадрату *АС КС.* Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затушеванные на рисунке треугольники *ABD* и *BFC* равны по двум сторонам и углу между ними: *FB=AB, BC==BD* и *∠FBC=d+∠ABC=∠ABD.* Но SABD=1/2 SBJLD, так как у треугольника *ABD* и прямоугольника *BJLD* общее основание *BD* и общая высота *LD.* Аналогично SFBC=1\2 SABFH *(BF*— общее основание, *АВ*—общая высота). Отсюда, учитывая, что SABD=SFBC , имеем SBJLD= SABFH. Аналогично, используя равенство треугольников *ВСК.* и *АСЕ,* доказывается, что SJCEL=SACKG.

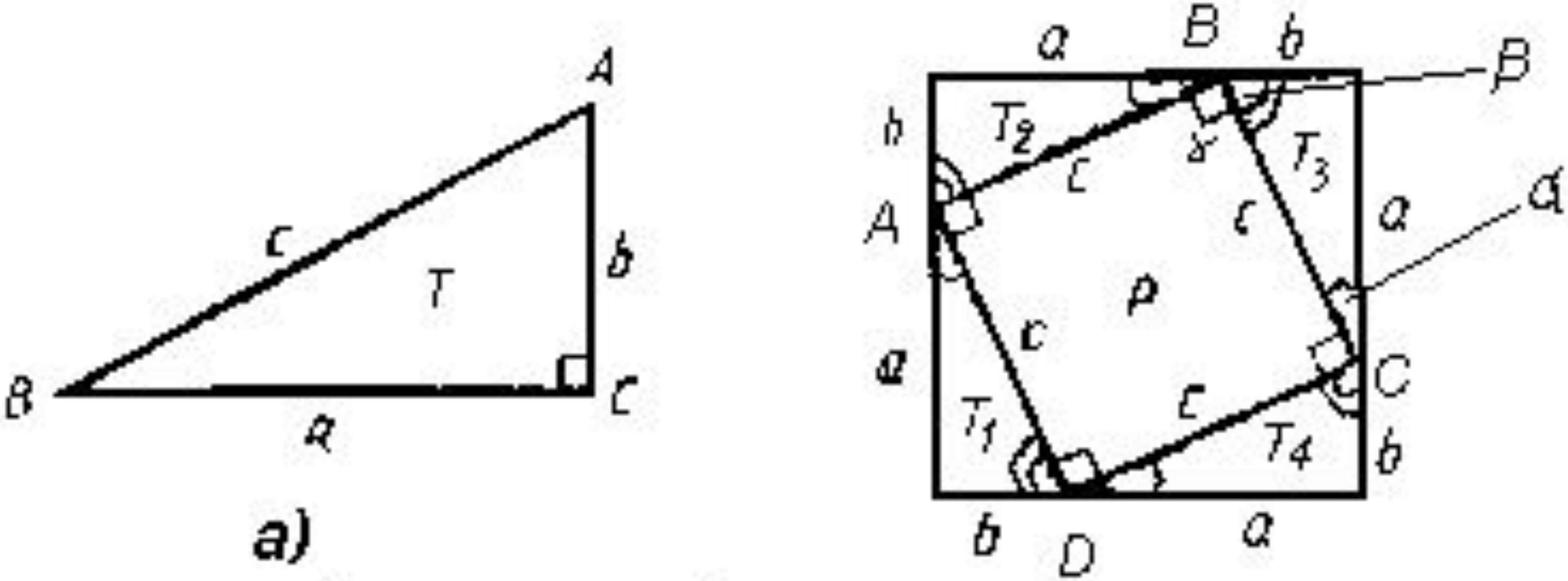
Рис 5.



- Итак, SABFH+SACKG=SBJLD+SJCEL= SBCED, что и требовалось доказать. Доказательство Евклида в сравнении с древнекитайским или древнеиндийским выглядит чрезмерно сложным. По этой причине его нередко называли «ходульным» и «надуманным». Но такое мнение поверхностно. Теорема Пифагора у Евклида является заключительным звеном в цепи предложений 1-й книги «Начал». Для того чтобы логически безупречно построить эту цепь, чтобы каждый шаг доказательства был основан на ранее доказанных предложениях, Евклиду нужен был именно выбранный им путь.

- **Еще давно была изобретена головоломка, называемая сегодня «Пифагор». Нетрудно убедиться в том, что в основе семи частей головоломки лежат равнобедренный прямоугольный треугольник и квадраты, построенные на его катетах, или, иначе, фигуры, составленные из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и потому укладывающиеся в квадрат. Такова лишь малая толика богатств, скрытых в жемчужине античной математики — теореме Пифагора. Далее я рассмотрю несколько алгебраических доказательств теоремы.**

- **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА.** Пусть *Т*— прямоугольный треугольник с катетами *а, b* и гипотенузой *с* (рис. 6, а). Докажем, что *с2=а2+Ь2.*
- Построим квадрат *Q* со стороной *а+Ь* (рис. 6, б). На сторонах квадрата *Q* возьмем точки *А, В, С, D* так, чтобы отрезки *АВ, ВС, CD, DA* отсекали от квадрата *Q* прямоугольные треугольники *Т1, Т2, Т3, Т4* с катетами *а* и *b.* Четырехугольник *ABCD* обозначим буквой *Р.* Покажем, что *Р* — квадрат со стороной *с.*



б)

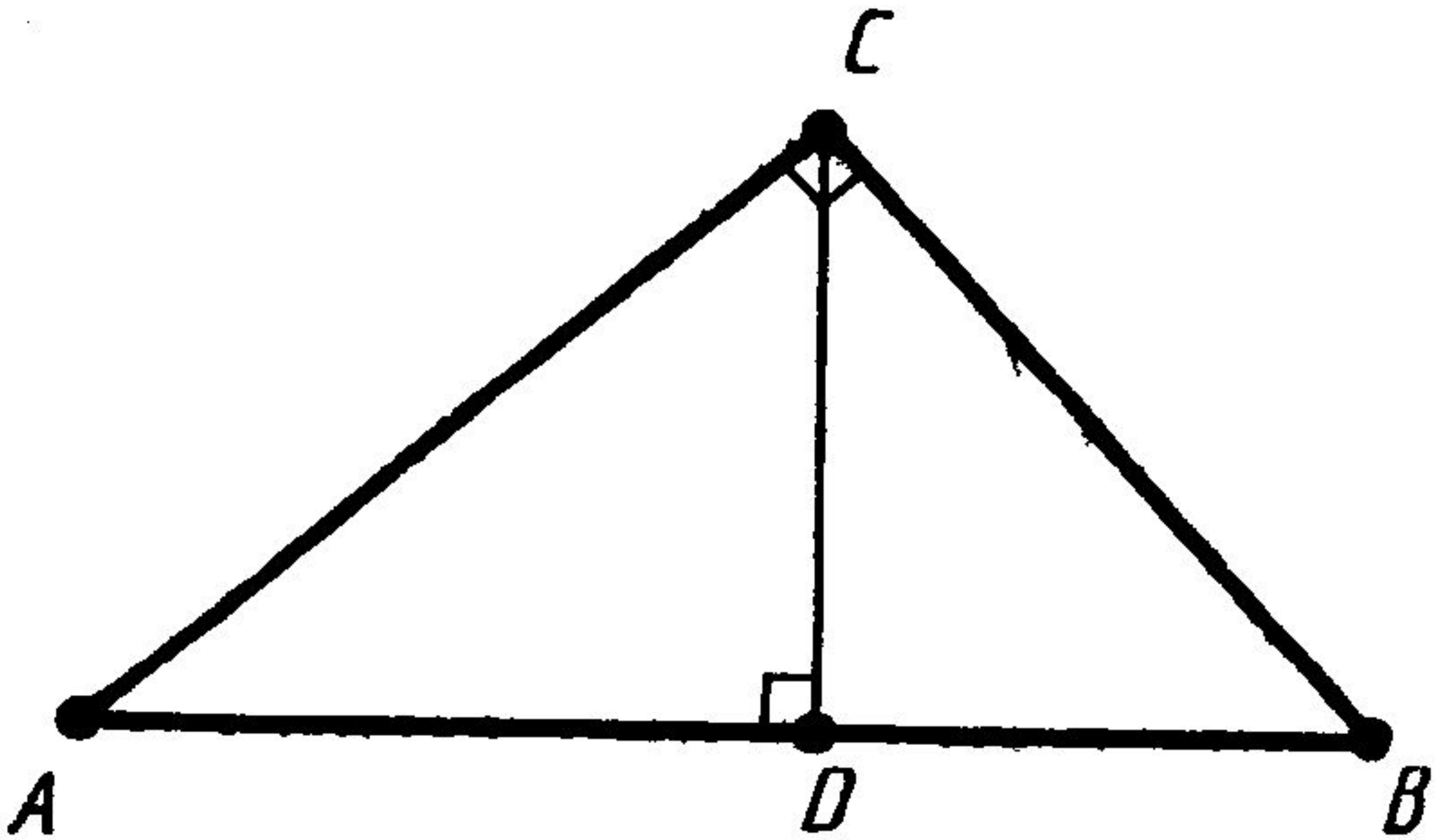
Рис. 6

Все треугольники T_1, T_2, T_3, T_4 равны треугольнику T (по двум катетам). Поэтому их гипотенузы равны гипотенузе треугольника T, т. е. отрезку c. Докажем, что все углы этого четырехугольника прямые.

Пусть α и β— величины острых углов треугольника T. Тогда, как вам известно, $\alpha+\beta=90°$. Угол γ при вершине A четырехугольника P вместе с углами, равными α и β, составляет развернутый угол. Поэтому $\alpha+\beta+\gamma=180°$. И так как $\alpha+\beta= 90°$, то $\gamma=90°$. Точно так же доказывается, что и остальные углы четырехугольника P прямые. Следовательно, четырехугольник P — квадрат со стороной c.

- Квадрат *Q* со стороной *a+Ь* слагается из квадрата *P* со стороной *c* и четырех треугольников, равных треугольнику *T*. Поэтому для их площадей выполняется равенство *S(Q)=S(P)+4S(T)* .
- Так как *S(Q)=(a+b) 2 ; S(P)=c2* и *S(T)=1/2(ab),* то, подставляя эти выражения в *S(Q)=S(P)+4S(T)*, получаем равенство
- *(a+b) 2=c2+4*(1/2)ab .* Поскольку *(a+b)2=a2+b2+2ab,* то равенство *(a+b)2=c2+4*(1/2)ab* можно записать так: *a2+b2+2ab=c2+2ab.*
- Из равенства *a2+b2+2ab=c2+2ab* следует, что *c2=a2+Ь2* Ч.Т.Д.

- ЕЩЕ ОДНО АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
- Пусть *ABC* — данный прямоугольный треугольник с прямым углом *C.* Проведем высоту *CD* из вершины прямого угла *C* (рис. 7).
- По определению косинуса угла *(Косинусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе) *cosA=AD/AC=AC/AB.* Отсюда *AB*AD=AC2.* Аналогично *cosB=BD/BC=BC/AB.* Отсюда *AB*BD=BC2.* Складывая полученные равенства почленно и замечая, что *AD+DB=AB,* получим:
- *AC2+BC2=AB(AD + DB)=AB2.* Теорема доказана.


C
A
D
B

- В заключении еще раз хочется сказать о важности теоремы. Значение ее состоит прежде всего в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. К сожалению, невозможно здесь привести все или даже самые красивые доказательства теоремы, однако хочется надеется, что приведенные примеры убедительно свидетельствуют об огромном интересе сегодня, да и вчера, проявляемом по отношению к ней.

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛА:

ученица 11 класса Жиляева Елена Учитель: Хайбр