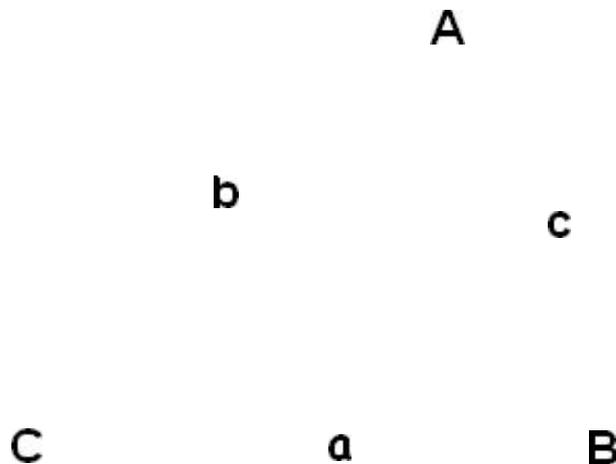




Соотношения между сторонами и углами треугольника

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$



Дано:

$\triangle ABC$

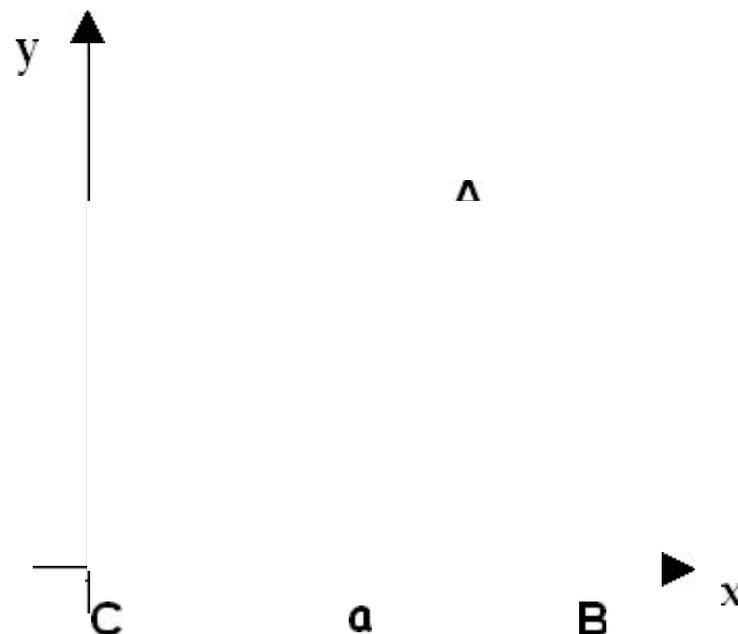
$BC=a$, $CA=b$, h -высота

S -площадь треугольника

Доказать:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

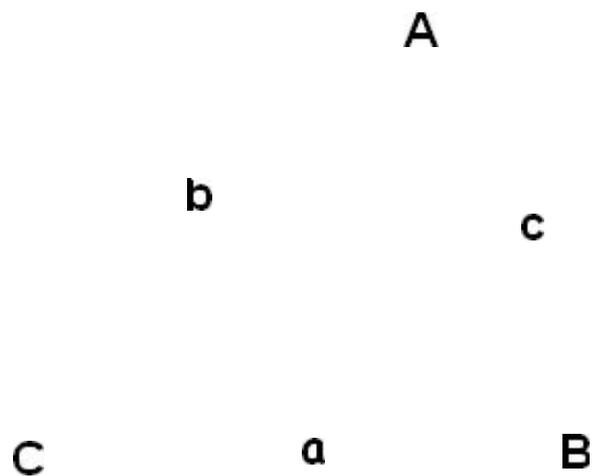
Доказательство:



$$S = \frac{1}{2}ah, \text{ где } h \text{ равна ординате точки } A \Rightarrow h = b \sin C \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

- Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Дано:

$\triangle ABC$

$AB=c, BC=a, CA=b.$

Доказательство:

∧

Доказать:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

C

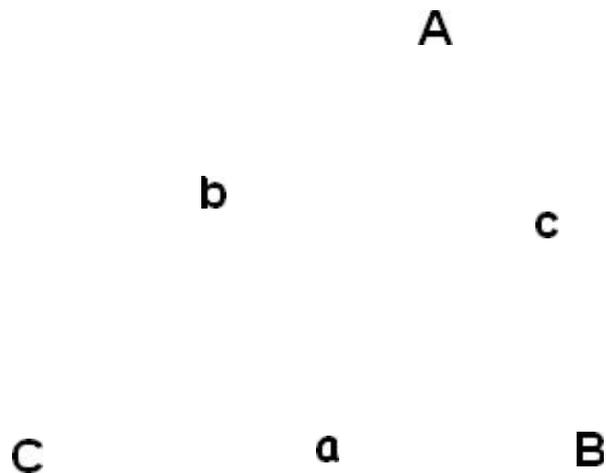
a

B

$$\begin{array}{l} S = \frac{1}{2} ab \sin C \\ S = \frac{1}{2} bc \sin A \end{array} \left| \Rightarrow \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \right.$$
$$\begin{array}{l} S = \frac{1}{2} bc \sin A \\ S = \frac{1}{2} ca \sin B \end{array} \left| \Rightarrow \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \right.$$
$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



- Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности

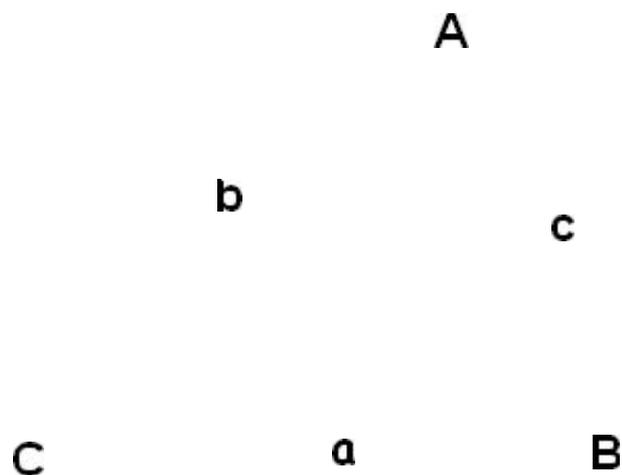


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

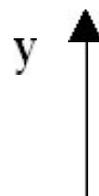


Дано:

$\triangle ABC$

$AB=c, BC=a, CA=b.$

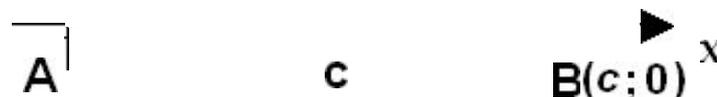
Доказательство:



$(b \cos A - c)$

Доказать:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



$$\begin{aligned} BC^2 = a^2 &= (b \cos A - c)^2 + b^2 \sin^2 A = \\ &= b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A - 2bc \cos A + c^2 = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$



РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

- Решением треугольников называется нахождение всех его шести элементов по каким-нибудь трём данным элементам, определяющим треугольник



Дано:

$\triangle ABC$
 $a; b; \angle C$

Найти: $\angle A; \angle B; c$

Решение

A

C

a

B

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos A}$$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A$$



Дано:

$\triangle ABC$

$a; \angle C; \angle B$

Найти: $b; c; \angle A$

Решение

A

C

a

B

$$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$$

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A}$$



Дано:

$\triangle ABC$

$a; b; c$

Найти: $\angle A; \angle B; \angle C$

Решение

A

C

a

B

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A$$



Дано:

$\triangle ABC$
 $a=6,3; b=6,3; \angle C = 54^\circ$

Найти: $\angle A; \angle B; c$

Решение

A

C

a

B

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos A} \approx 5,7$$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \approx 0,4540 \Rightarrow \angle A = 63^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 63^\circ$$

Ответ: $c \approx 5,7; \angle B = 63^\circ; \angle A = 63^\circ;$



Дано:

Решение

$\triangle ABC$

A

$$a = 14; \angle C = 40^\circ; \angle B = 60^\circ$$

Найти: $b; c; \angle A$

C

a

B

$$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 80^\circ$$

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A} \approx 12,3$$

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A} \approx 9,1$$

Ответ: $\angle A = 80^\circ; b \approx 12,3; c \approx 9,1;$



Дано:

$\triangle ABC$

$$a=14; b=18; c=20$$

Найти: $\angle A; \angle B; \angle C$

Решение

A

C

a

B

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \approx 0,2382 \Rightarrow \angle C = 76^\circ 13'$$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \approx 0,7406 \Rightarrow \angle A = 42^\circ 50'$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 60^\circ 57'$$

Ответ: $\angle C = 76^\circ 13'; \angle A = 42^\circ 50'; \angle B = 60^\circ 57';$

