

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Автор Сизова Н. В.

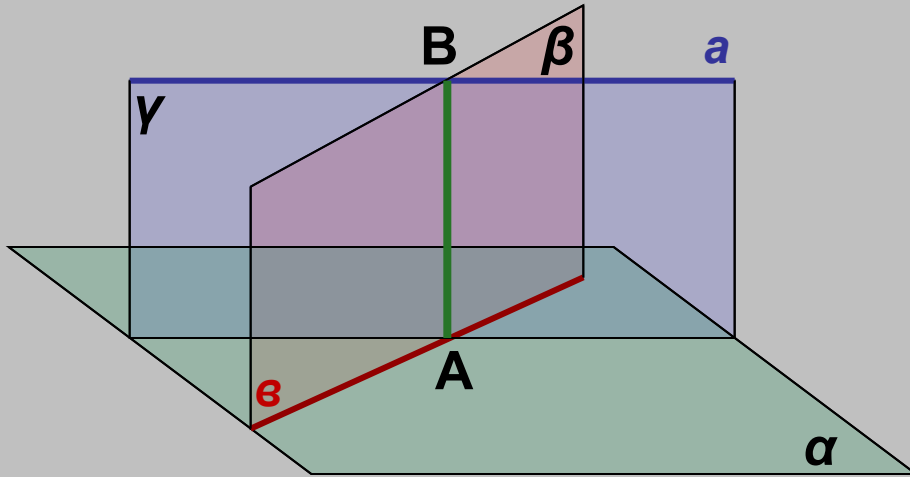
Определение

Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых, и перпендикулярный обеим прямым, называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.

Теорема

*К любым двум скрещивающимся прямым
можно провести общий перпендикуляр и
при этом только один.*

Доказательство:



$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha \parallel a, b \subset \alpha \\ & b \subset \beta, \beta \perp \alpha \\ & a \subset \gamma, \gamma \perp \alpha \end{aligned}$$

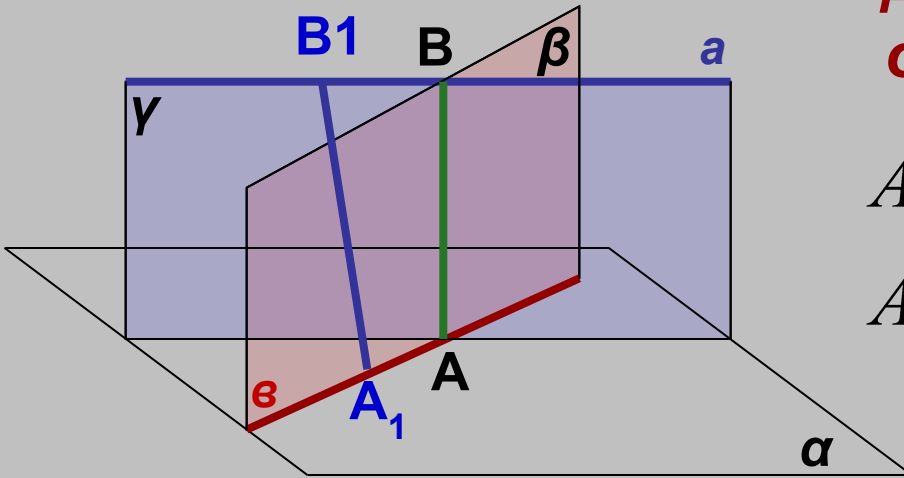
$$2) \quad \left. \begin{aligned} b \cap \gamma &= A \\ a \cap \beta &= B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = AB$$

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad & \beta \cap \gamma = AB, \\ & \gamma \perp \alpha, \\ & \beta \perp \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp \alpha \quad \left. \begin{aligned} & b \subset \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp b$$

$$4) \quad \left. \begin{aligned} & a \parallel \alpha \\ & AB \perp \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp a$$

Значит AB – общий перпендикуляр

Доказательство единственности



Допустим, что A_1B_1 – другой общий перпендикуляр, тогда

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ A_1B_1 \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$$

Значит прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости.

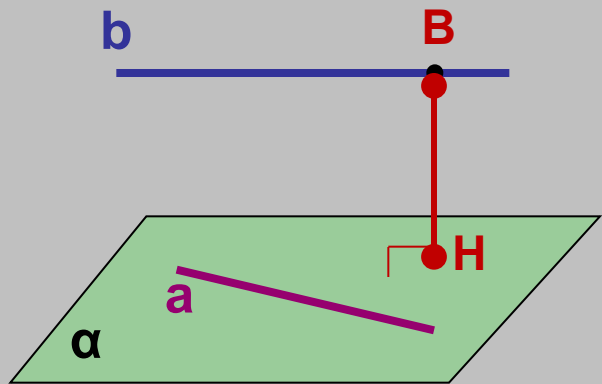
$$B \in a, B_1 \in a \Rightarrow BB_1 \equiv a$$

$$A \in b, A_1 \in b \Rightarrow AA_1 \equiv b$$

Значит прямые a и b лежат в одной плоскости, что противоречит условию.

Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

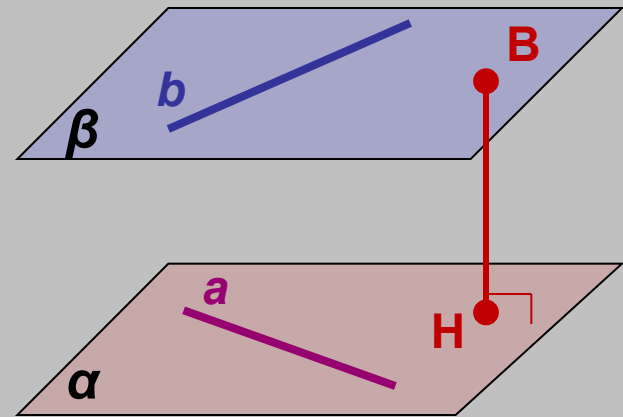
1 способ



$$\begin{aligned} &a \subset \alpha, \alpha \parallel b \\ &B \in b, BH \perp \alpha, \end{aligned}$$

$$\rho(a, b) = \rho(b, \alpha) = BH$$

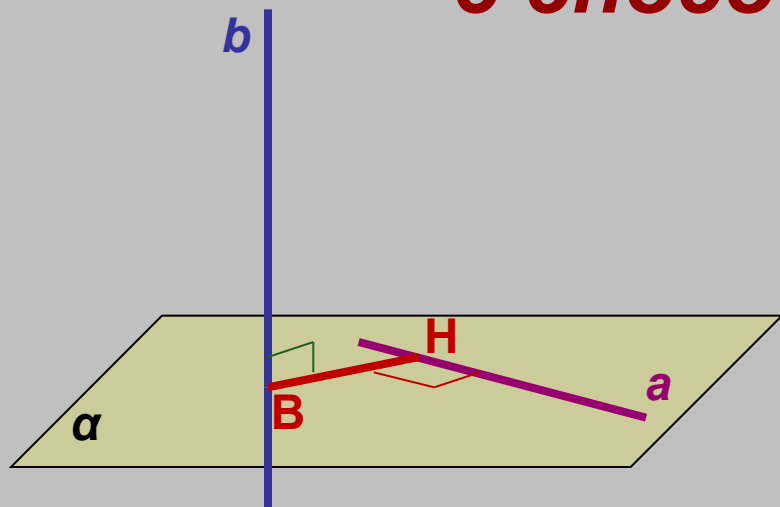
2 способ



$$\begin{aligned} &a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta \\ &B \in \beta, BH \perp \alpha, \end{aligned}$$

$$\rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta) = BH$$

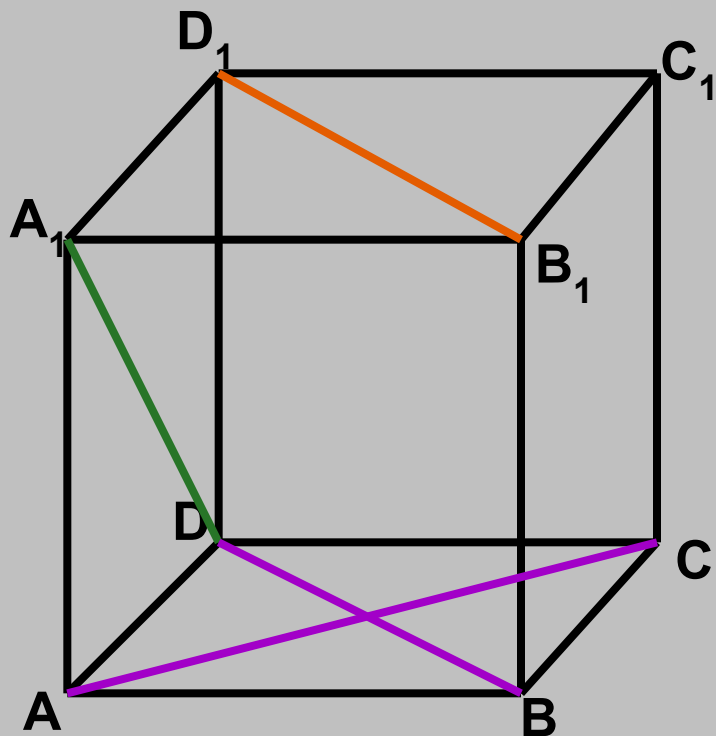
3 способ



$a \subset \alpha, b \perp \alpha,$
 $b \cap \alpha = B, BH \perp a,$
тогда $\rho(a, b) = BH$

Решение задач

Найдите расстояние между прямыми:



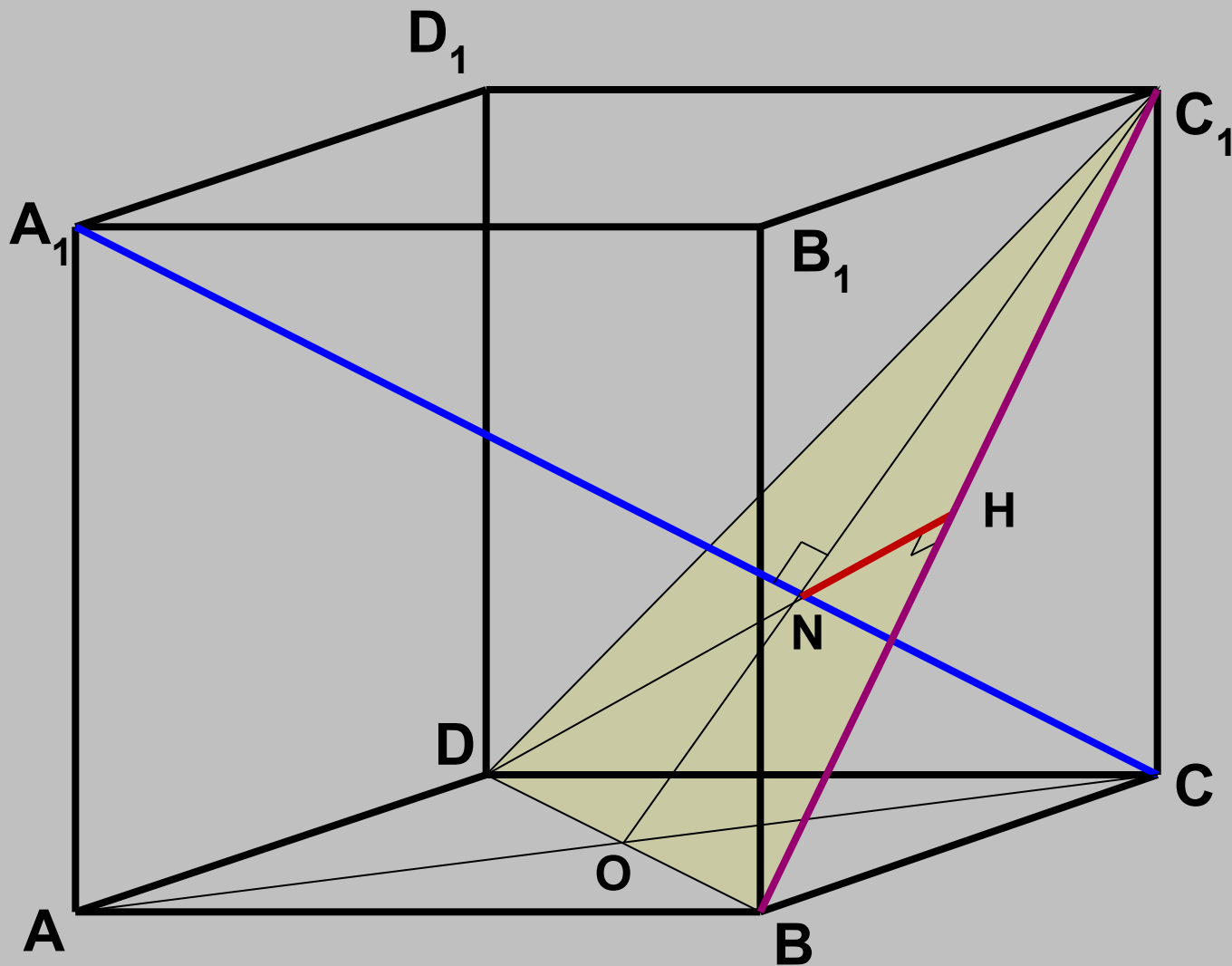
1) DD_1 и AB ;

2) DA_1 и BC ;

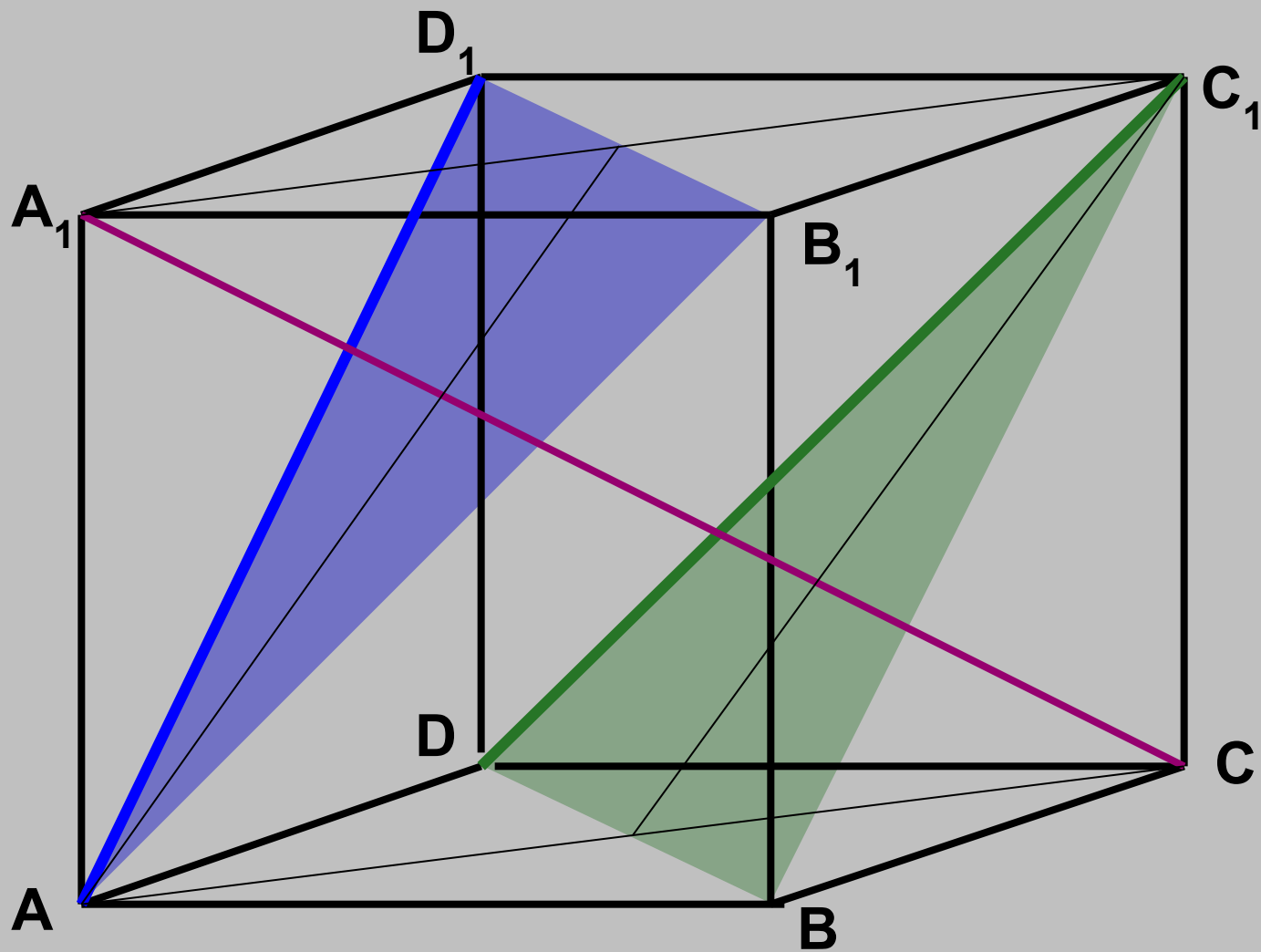
3) D_1B_1 и AC ;

4) DB и C_1C ;

Ребро куба равно a . Найдите расстояние между прямыми: 1) A_1C и BC_1 .

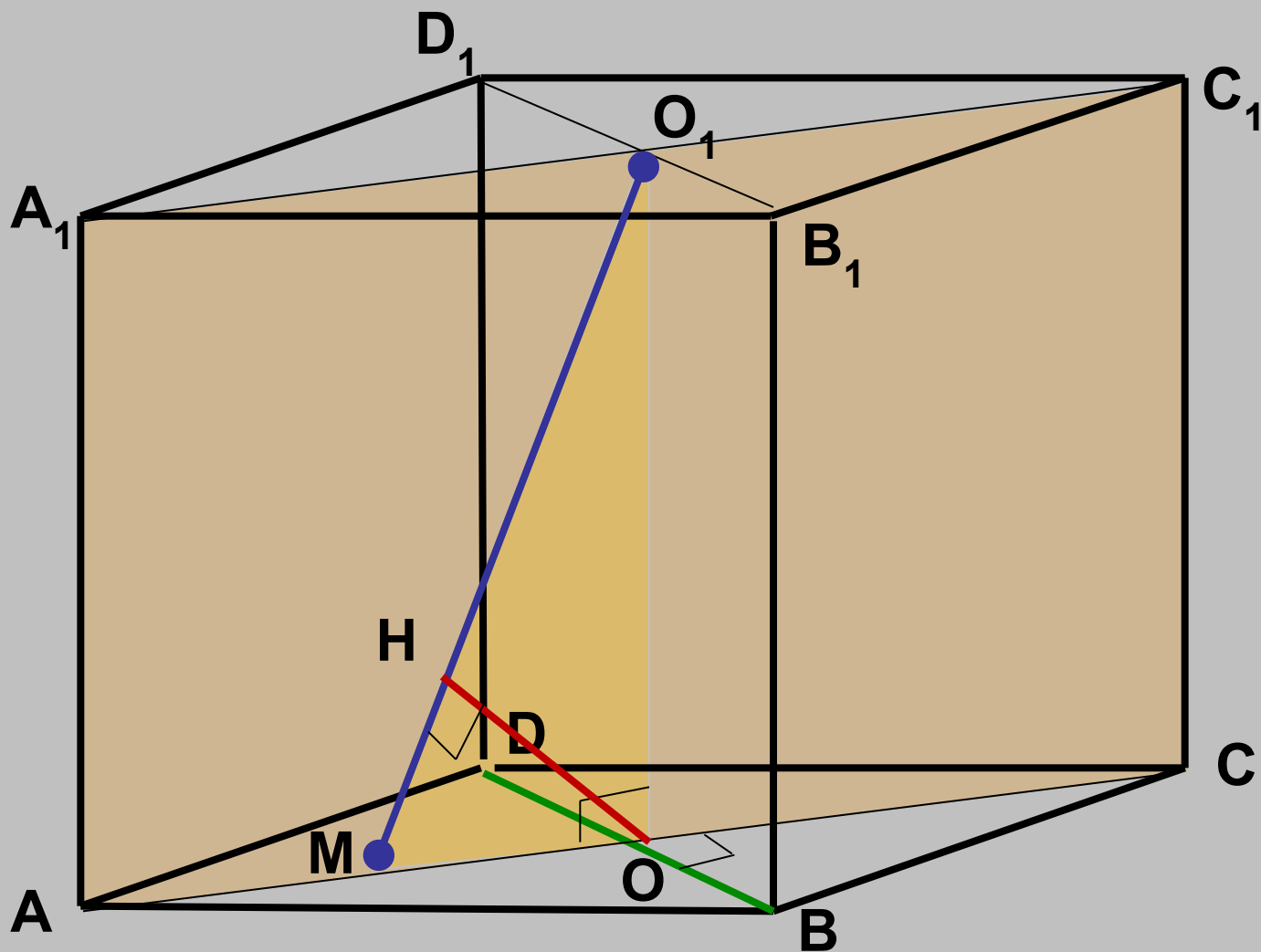


2) Найдите $\rho(AD_1, DC_1)$



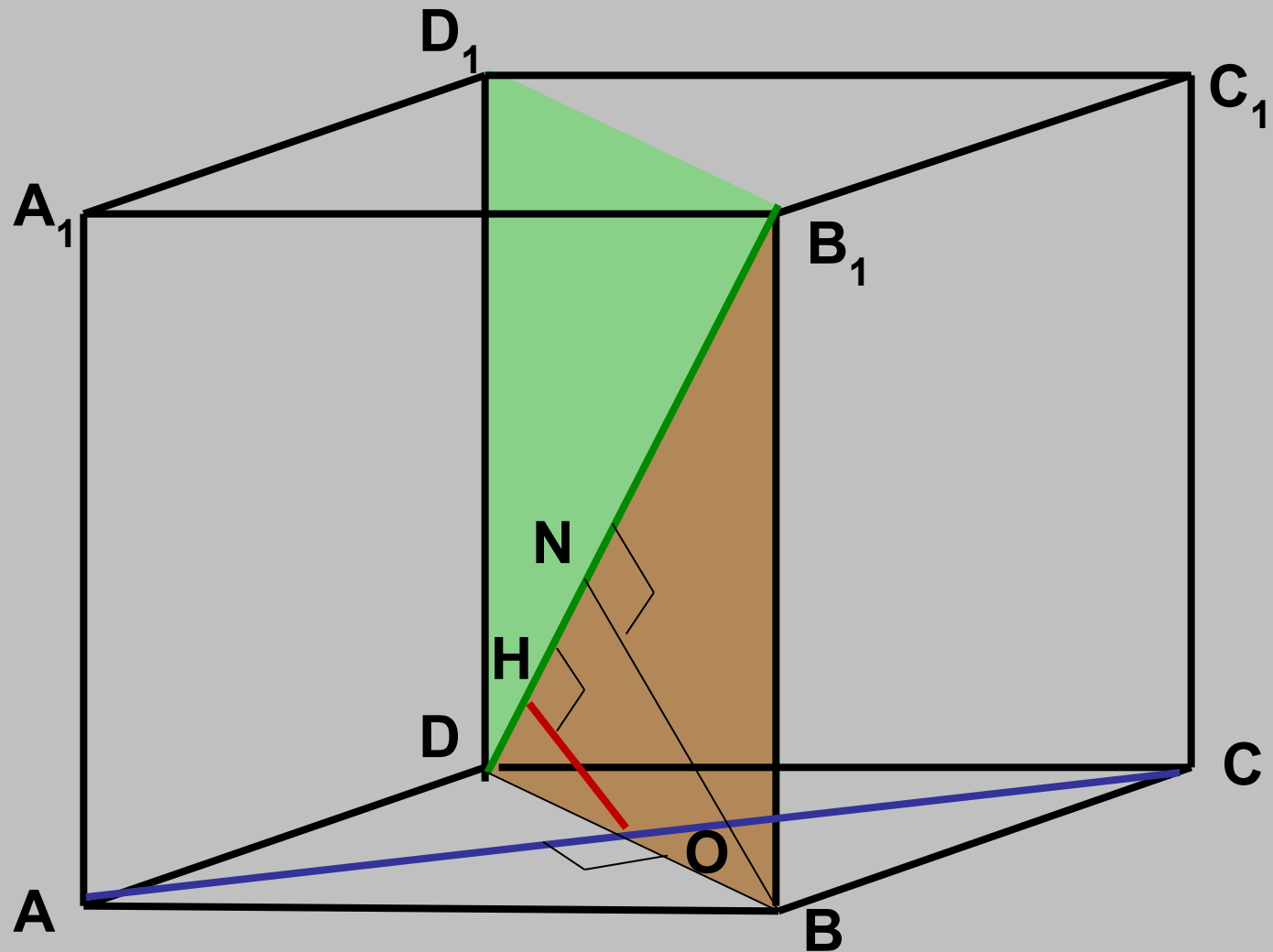
$$\rho(AD_1, DC_1) = \rho(AD_1B_1; DBC_1) = \frac{1}{3} A_1C$$

3) M – середина AO , найти $\rho(BD, O_1M)$



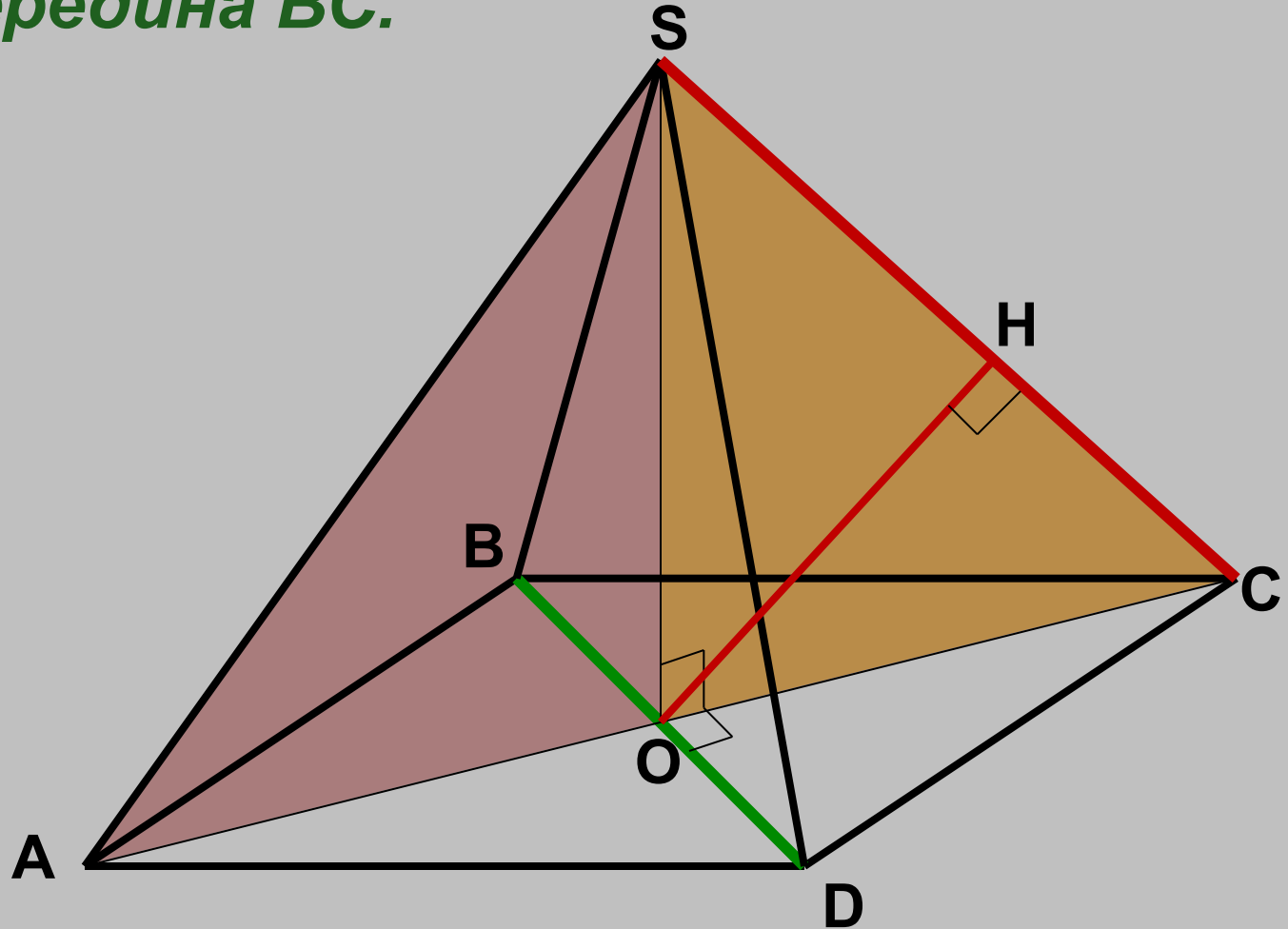
$$\rho(BD, O_1M) = OH \quad OH = \frac{a}{3}$$

4) Найти $\rho(B_1D, AC)$



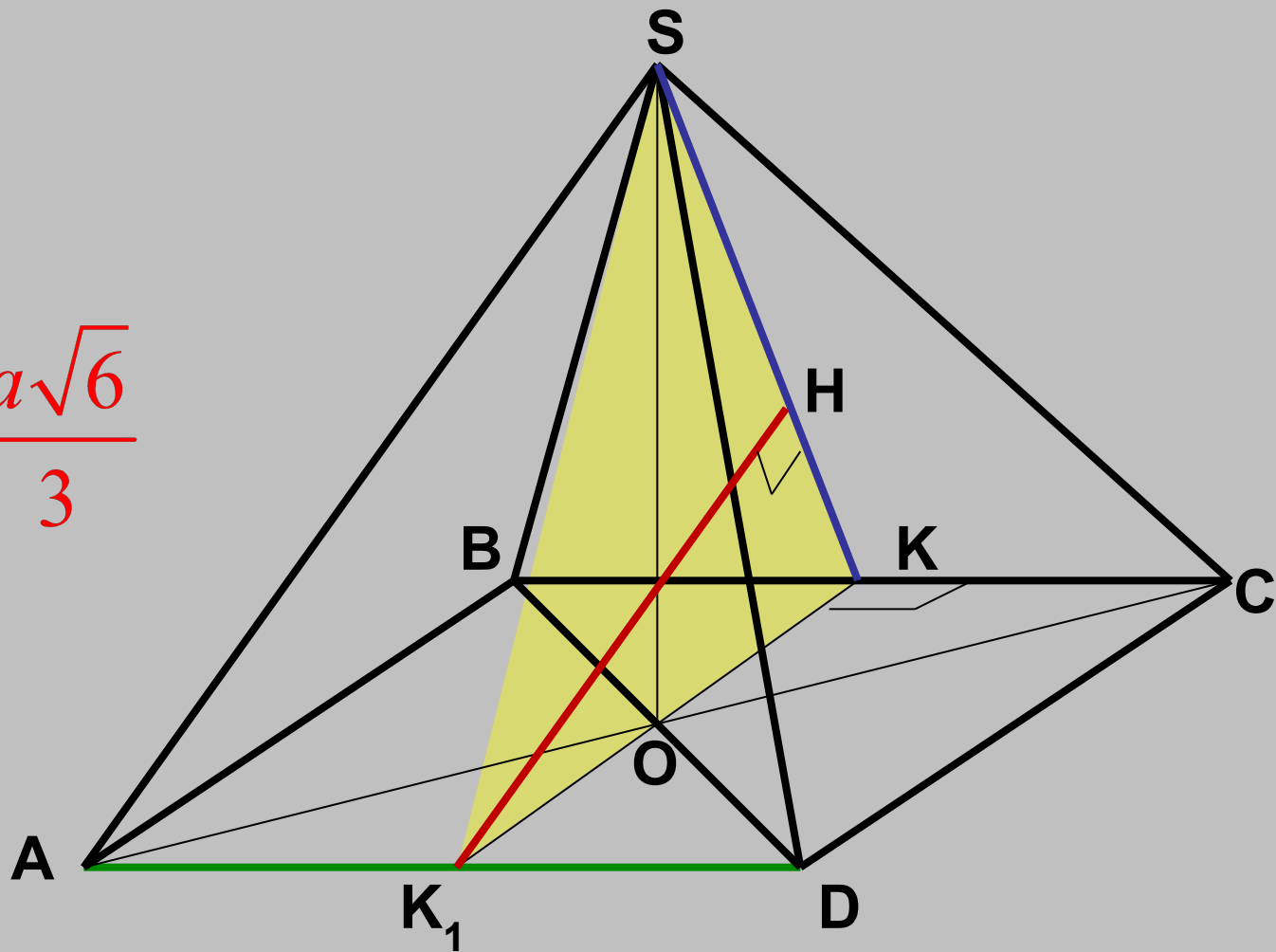
$$OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

4) Дана правильная пирамида, все рёбра которой равны a . Найти $\rho(BD, SC)$, $\rho(AD, SK)$, если K – середина BC .



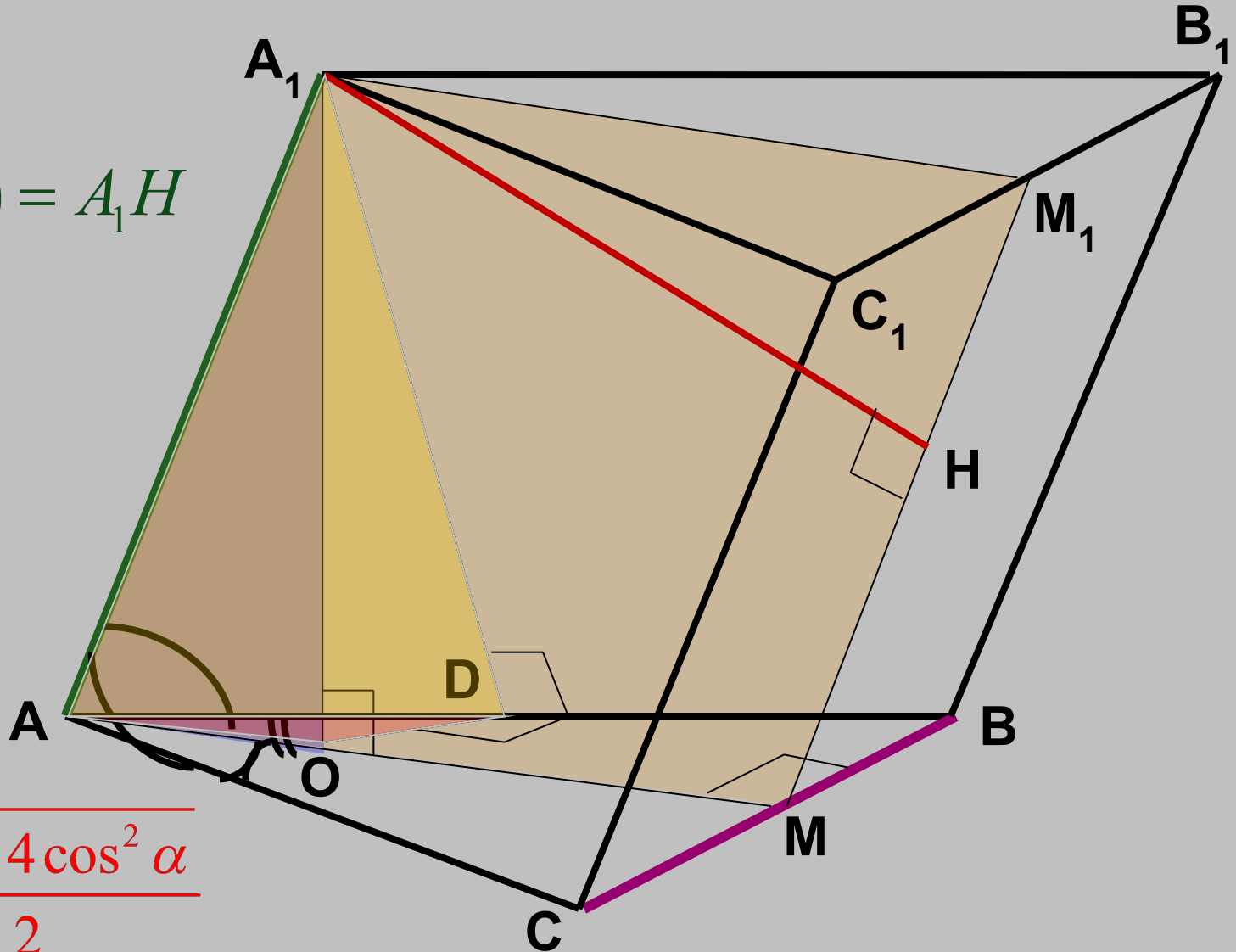
$$OH = \frac{a}{2}$$

$$K_1H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



В наклонной призме все рёбра равны a , $\square A_1AC = \square A_1AB$. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC .

$$\rho(AA_1, BC) = A_1H$$



$$A_1H = \frac{a\sqrt{3-4\cos^2\alpha}}{2}$$