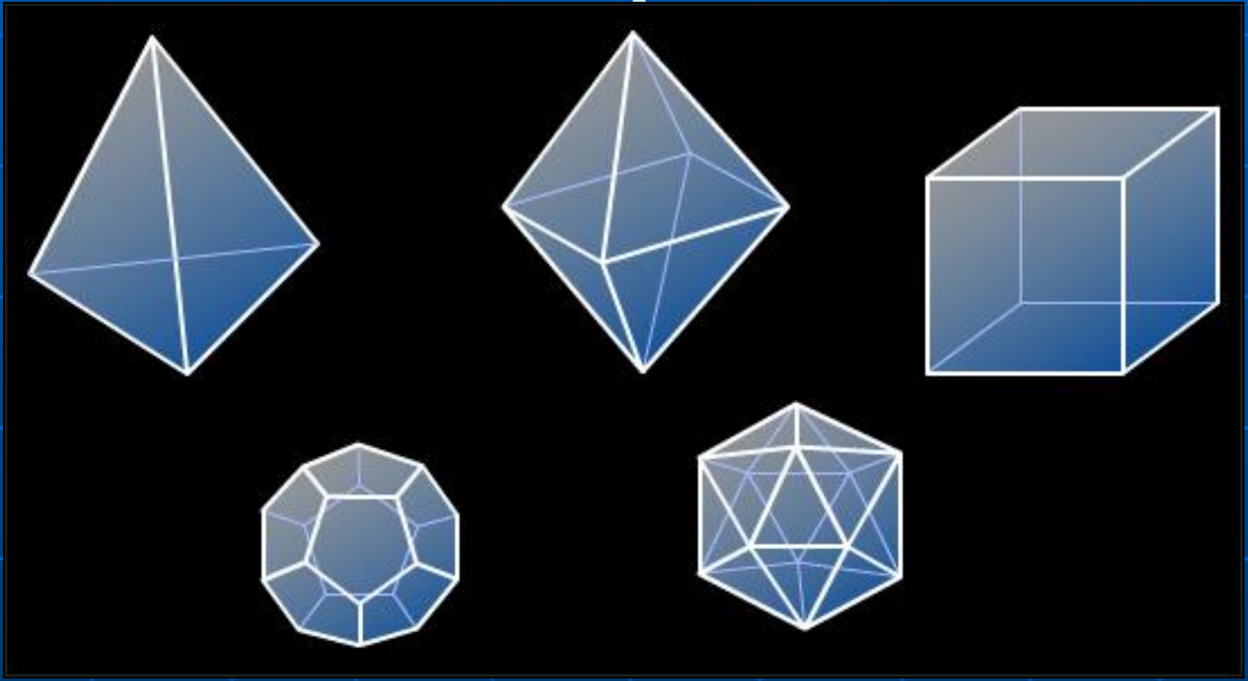
Правильные многогранники



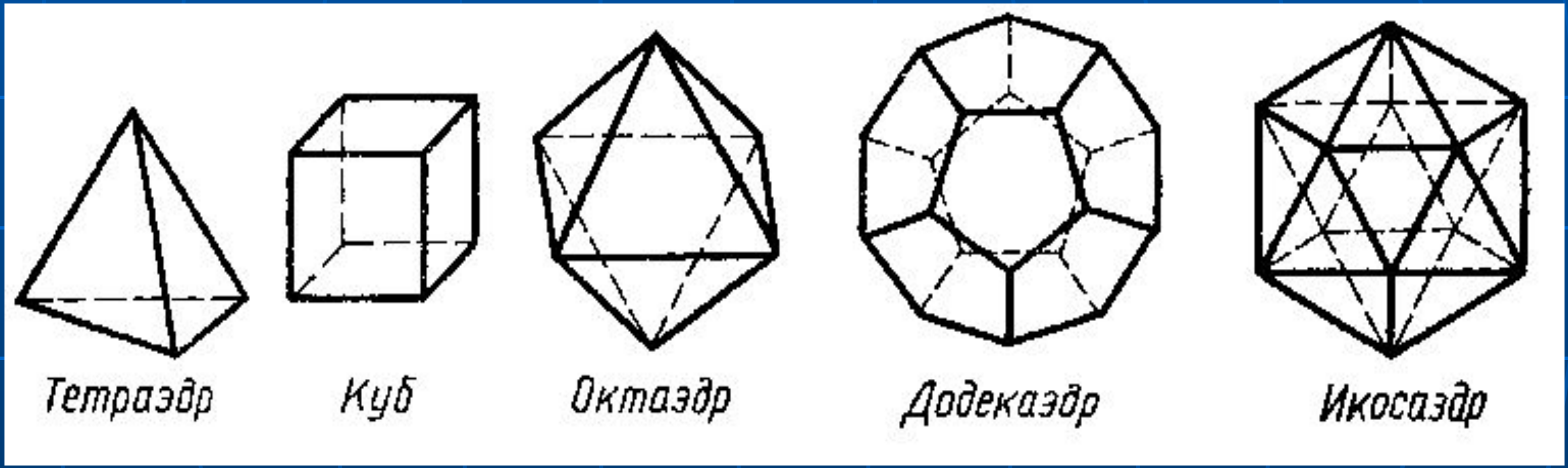
Работа
Шеметова Павла
11 «а» класс

Содержание:

Цель проекта:

Рассказать о правильных многогранниках, о их происхождении, их нахождении в природе, архитектуре и живописи.

Многогранник называется ***правильным***, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники, из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер и все двугранные углы равны.



История правильных многогранников

- Их изучали ученые, ювелиры, священники, архитекторы. Этим многогранникам даже приписывали магические свойства. Древнегреческий ученый и философ Платон (IV–V в до н. э.) считал, что эти тела олицетворяют сущность природы. В своем диалоге «Тимей» Платон говорит, что атом огня имеет вид тетраэдра, земли – гексаэдра (куба), воздуха – октаэдра, воды – икосаэдра. В этом соответствии не нашлось места только додекаэдру и Платон предположил существование еще одной, пятой сущности – эфира, атомы которого как раз и имеют форму додекаэдра. Ученики Платона продолжили его дело в изучении перечисленных тел. Поэтому эти многогранники называют ***платоновыми телами***.

Платон

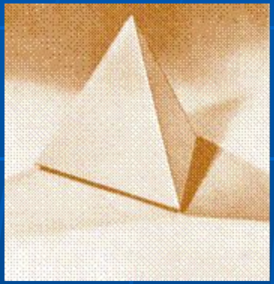
около 429 – 347 гг до н.э.

Платоновыми телами называются *правильные однородные выпуклые многогранники,* то есть выпуклые многогранники, все грани и углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники.

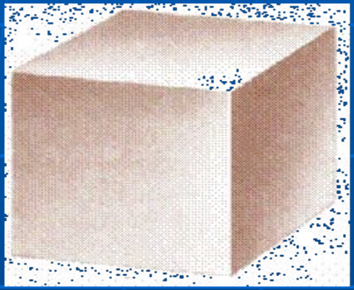
Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Однако между двумерным и трехмерным случаями есть важное отличие: существует бесконечно много различных правильных многоугольников, но лишь пять различных правильных многогранников.

Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида.

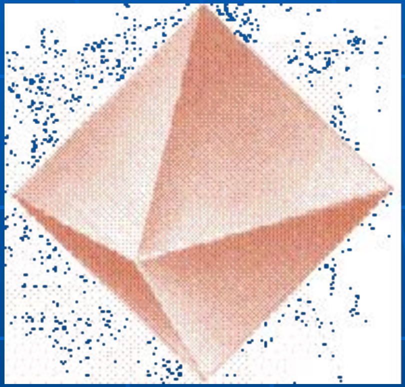
Платоновы тела



Тетраэдр

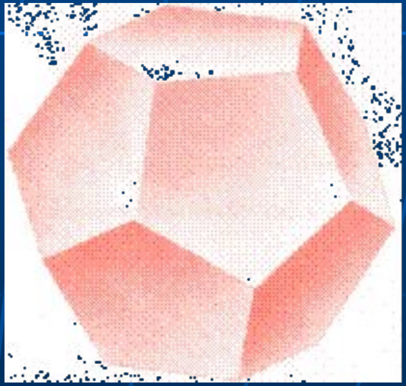


Гексаэдр



Октаэдр

Икосаэдр



Додекаэдр

«Начала Евклида.
«…в науке нет царского пути»

около 365 – 300 гг. до н.э.

Главный труд Евклида – «Начала» (в оригинале «Стохейа». «Начала» состоят из 13 книг, позднее к ним были прибавлены ещё 2.

Первые шесть книг посвящены планиметрии. Книги VII – X содержат теорию чисел, XI, XII и XIII книги «Начал» посвящены стереометрии.

Из постулатов Евклида видно, что он представлял пространство как пустое, безграничное, изотропное и трёхмерное.

Интересно, что «Начала» Евклида открываются описанием построения правильного треугольника и заканчиваются изучением пяти правильных многогранных тел! В наше время они известны как платоновы тела.

Архимед Сиракузский

около 287 – 212 гг. до н.э.

Математик, физик и инженер Архимед Сиракузский оставил после себя немало изобретений, тринадцать сочинений (таких как «О сфере и цилиндре», «Измерение круга», «Равновесие плоскостей», «Стомахион», «Правильный семиугольник и другие).

Архимед, как геометр определил поверхность шара и его объём, исследовал параболоиды и гиперболоиды, изучал «архимедову спираль», определил число «пи», как находящееся между 3,141 и 3,142.

Вклад Архимеда в теорию многогранников - описание 13 полуправильных выпуклых однородных многогранников (архимедовых тел).

Архимедовы тела

Множество архимедовых тел можно разбить на несколько групп.

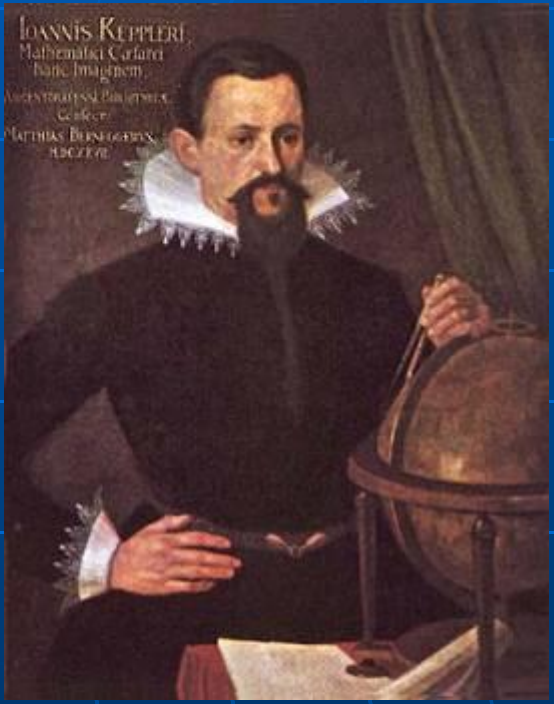
Первую из них составят пять многогранников, которые получаются из платоновых тел в результате их усечения. Так могут быть получены пять архимедовых тел: *усечённый тетраэдр*, *усечённый гексаэдр* (куб), *усечённый октаэдр*, *усечённый додекаэдр* и *усечённый икосаэдр*.

Другую группу составляют всего два тела, именуемых также *квазиправильными* многогранниками. Эти два тела носят названия:*кубооктаэдр и икосододекаэдр*

Два последующих многогранника называются *ромбокубооктаэдром* и *ромбоикосододекаэдром*. Иногда их называют также «малым ромбокубооктаэдром» и «малым ромбоикосододекаэдром» в отличие от *большого ромбокубооктаэдра* и *большого ромбоикосододекаэдра*.

Наконец существуют две так называемые «курносые» модификации — одна для куба, другая — для додекаэдра. Для каждой из них характерно несколько повёрнутое положение граней, что даёт возможность построить два различных варианта одного и того же «курносого» многогранника (каждый из них представляет собой как бы зеркальное отражение другого).

Иоганн Кеплер



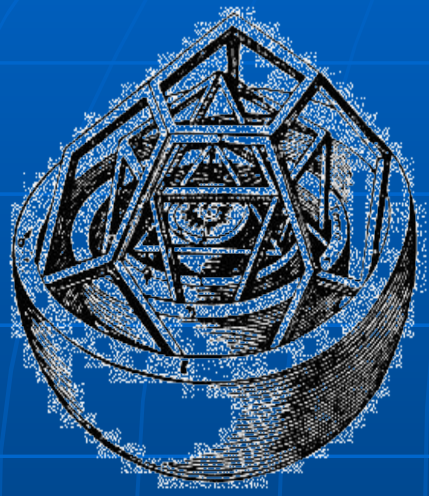
1571 – 1630 гг.

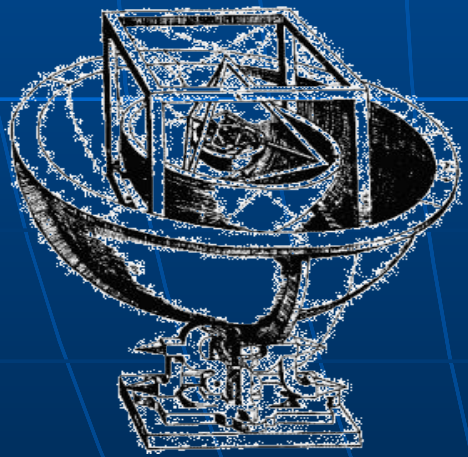
Немецкий астроном и математик. Один из создателей современной астрономии.

Вклад Кеплера в теорию многогранника - это, во-первых, восстановление математического содержания утерянного трактата Архимеда о полуправильных выпуклых однородных многогранниках.

Еще более существенным было предложение Кеплера рассматривать невыпуклые многогранники со звездчатыми гранями, подобными пентаграмме и последовавшее за этим открытие двух правильных невыпуклых однородных многогранников - малого звездчатого додекаэдра и большого звездчатого додекаэдра.

Космологическая гипотеза Кеплера

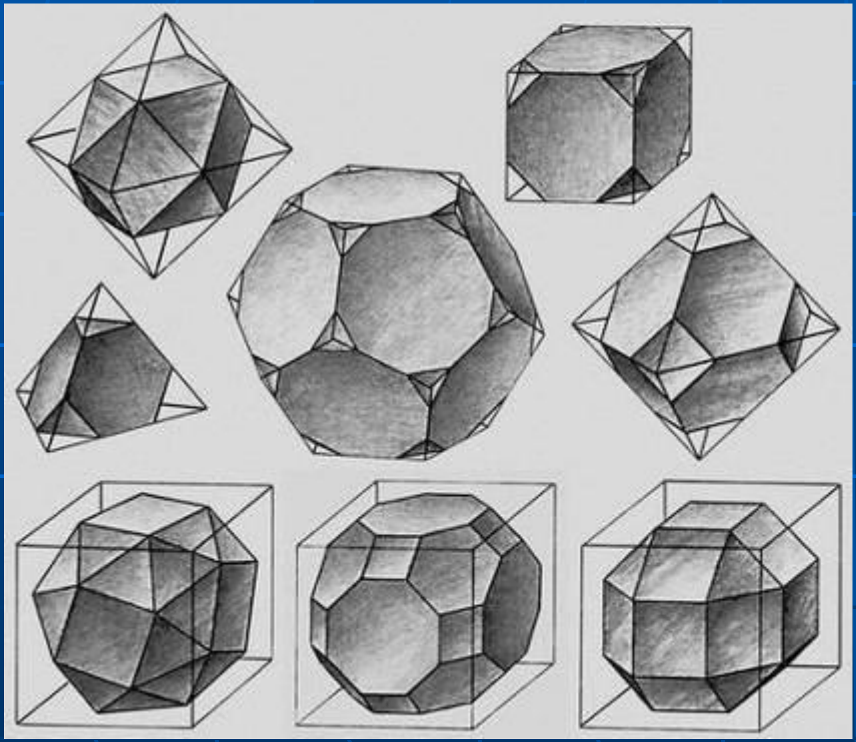




Кеплер попытался связать со свойствами правильных многогранников некоторые свойства Солнечной системы.

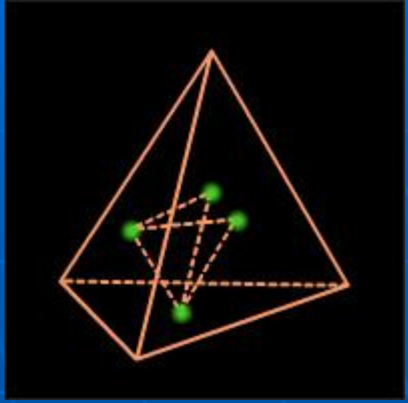
Он предположил, что расстояния между шестью известными тогда планетами выражаются через размеры пяти правильных выпуклых многогранников (Платоновых тел). Между каждой парой "небесных сфер", по которым, согласно этой гипотезе, вращаются планеты, Кеплер вписал одно из Платоновых тел. Вокруг сферы Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты, описан октаэдр. Этот октаэдр вписан в сферу Венеры, вокруг которой описан икосаэдр. Вокруг икосаэдра описана сфера Земли, а вокруг этой сферы - додекаэдр. Додекаэдр вписан в сферу Марса, вокруг которой описан тетраэдр. Вокруг тетраэдра описана сфера Юпитера, вписанная в куб. Наконец, вокруг куба описана сфера Сатурна.

Названия многогранников пришли из Древней Греции и в них указывается число граней:

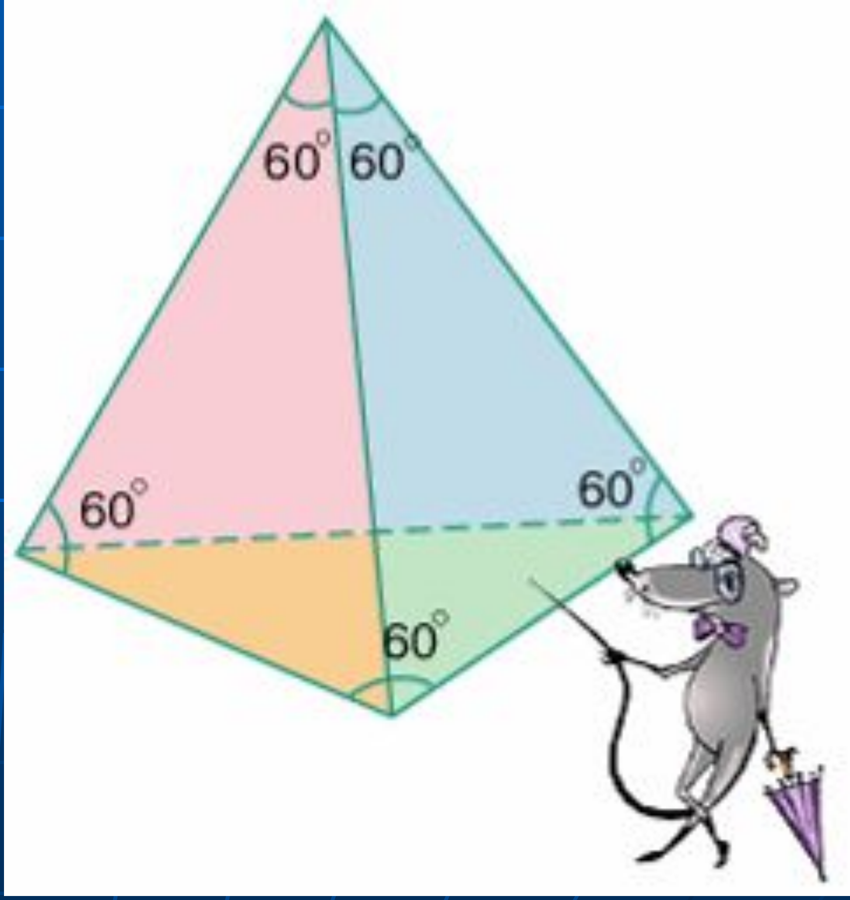


- «эдра» - грань
- «тетра» - 4
- «гекса» - 6
- «окта» - 8
- «икоса» - 20
- «дедека» - 12

Тетраэдр



- ***Тетраэдр*** (tetra – четыре, hedra – грань). Правильный тетраэдр – правильный четырехгранник, то есть тетраэдр с равными ребрами, представляет собой правильный многогранник, все грани которого – правильные треугольники и из каждой вершины которого выходит ровно три ребра
- У него 4 вершины,4 грани,6 ребер
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов



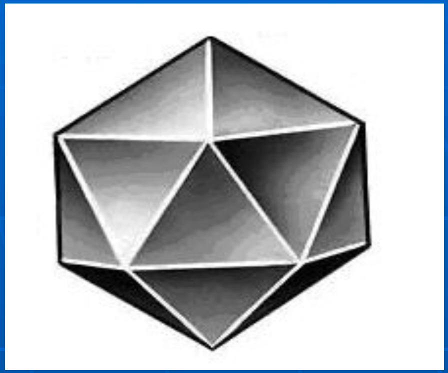
Радиус описанной сферы: $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$

Радиус вписанной сферы: $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$

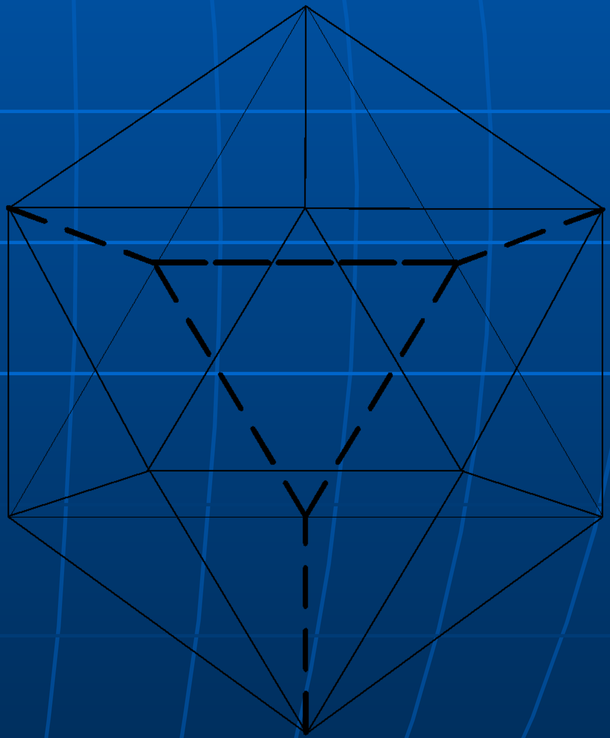
Площадь поверхности: $S = a^2\sqrt{3}$

Объем тетраэдра: $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

Икосаэдр



- (состоит из 20 треугольников)
- В каждой вершине икосаэдра
  сходятся пять граней.
- Существует правильный многогранник, у которого все грани – правильные треугольники, и из каждой вершины выходит 5 ребер. Этот многогранник имеет 20 граней, 30 ребер, 12 вершин и называется икосаэдром (icosi – двадцать).
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов



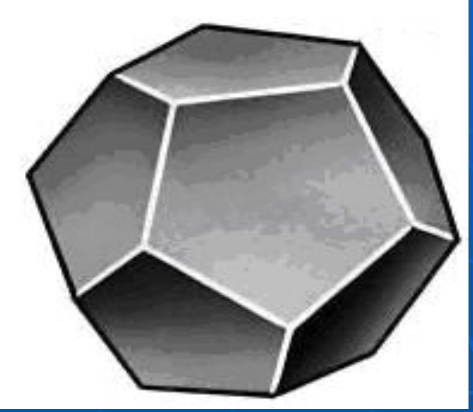
Радиус описанной сферы: $R = \frac{a}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}$

Радиус вписанной сферы: $r = \frac{a}{4\sqrt{3}}\left(3+\sqrt{5}\right)$

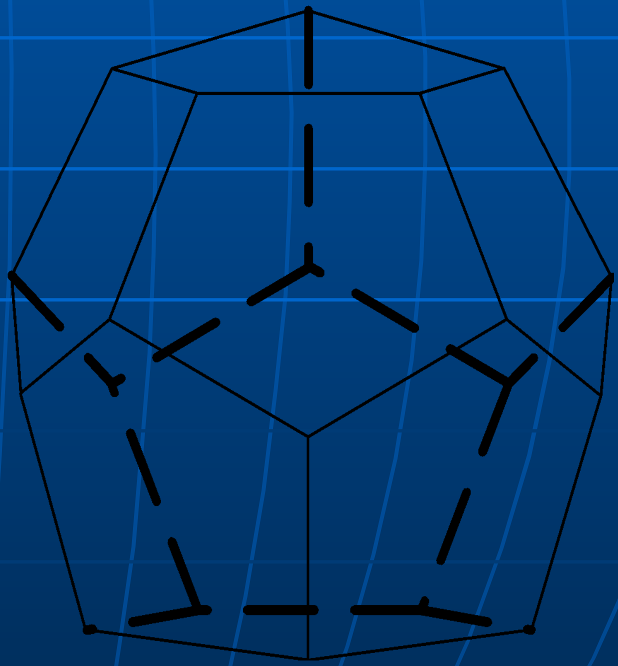
Площадь поверхности: $S = 5a^2\sqrt{3}$

Объем икосаэдра: $V = \frac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$

Додекаэдр



- Существует правильный многогранник, у которого все грани правильные пятиугольники и из каждой вершины выходит 3 ребра. Этот многогранник имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин и называется ***додекаэдром*** (dodeka – двенадцать).
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градуса



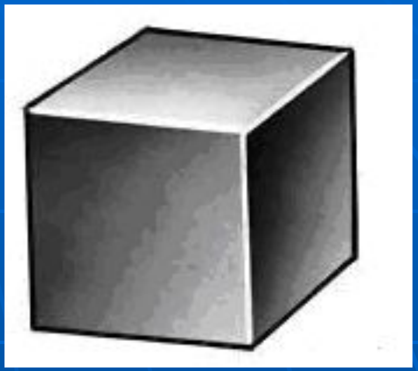
Радиус описанной сферы: $R=\frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}$

Радиус вписанной сферы: $r=\frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}$

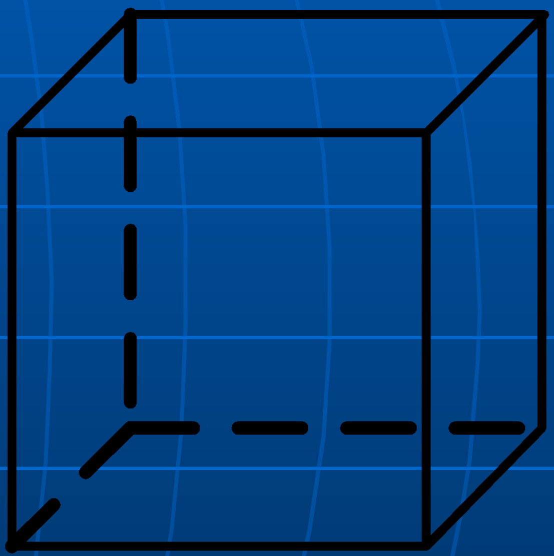
Площадь поверхности: $S=3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$

Объем додекаэдра: $V=\frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$

Гексаэдр(куб)



- ***Гексаэдр*** (***куб***, hexa – шесть). Гексаэдр – правильный многогранник, все грани которого – квадраты, и из каждой вершины выходит три ребра.
- У него 6 граней,8 вершин,12 ребер
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов



Радиус описанной сферы: $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

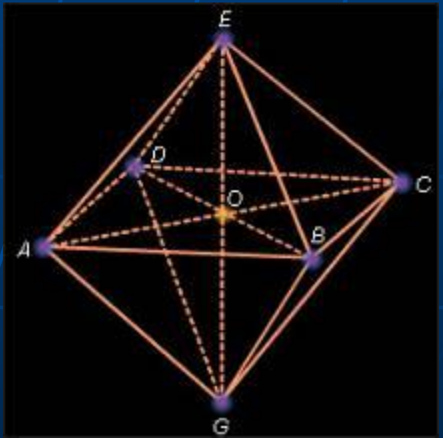
Радиус вписанной сферы: $r = \frac{a}{2}$

Площадь поверхности куба: $S = 6a^2$

Объем куба: $V = a^3$

Октаэдр

- ***Октаэдр***. Это правильный многогранник, все грани которого – правильные треугольники и к каждой вершине прилегают четыре грани
- У него 8 граней,12 ребер,6вершин



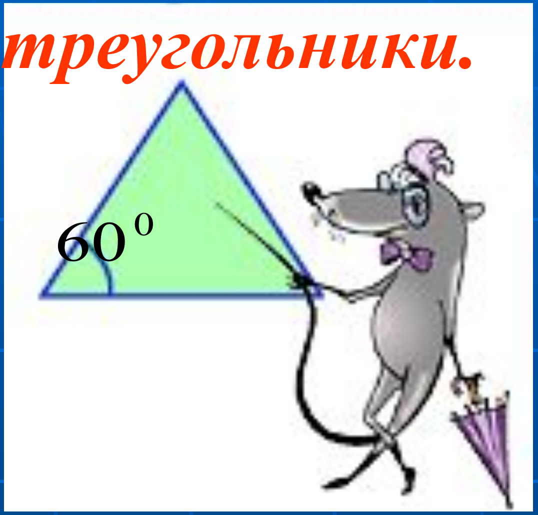
Радиус описанной сферы: $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Радиус вписанной сферы: $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$

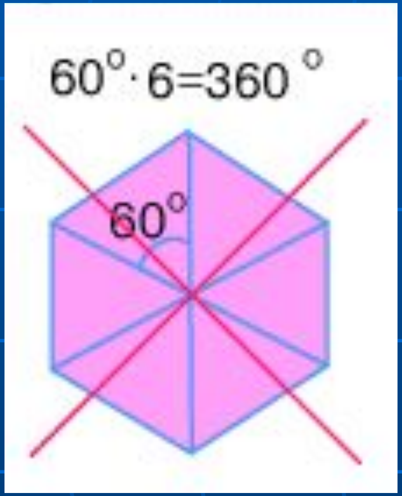
Площадь поверхности: $S = 2a^2\sqrt{3}$

Объем октаэдра: $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$

Рассмотрим случай, когда гранями правильного многогранника служат правильные треугольники.

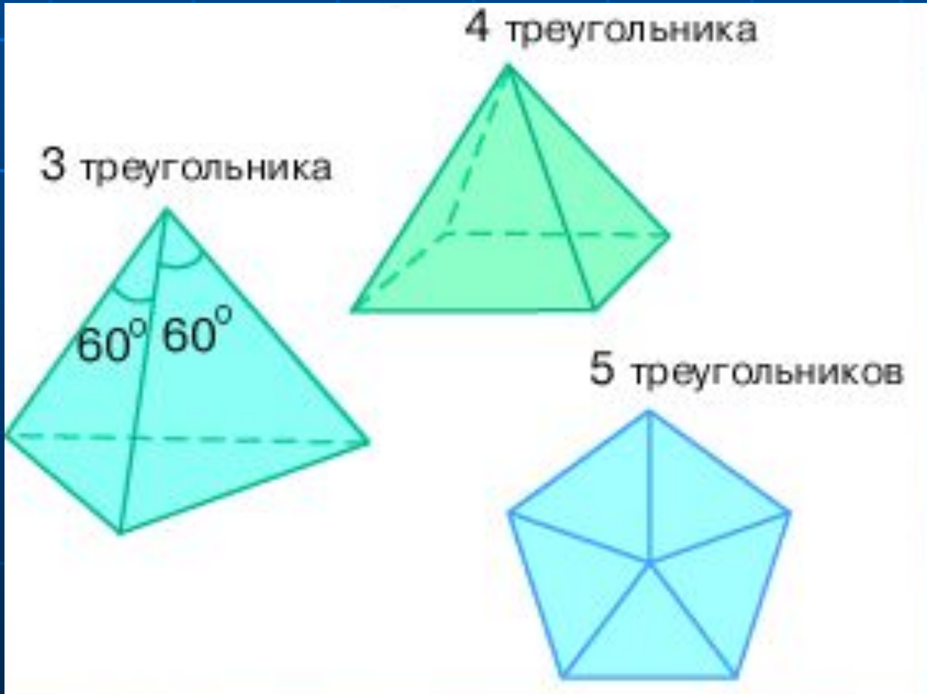


Угол при вершине треугольника равен

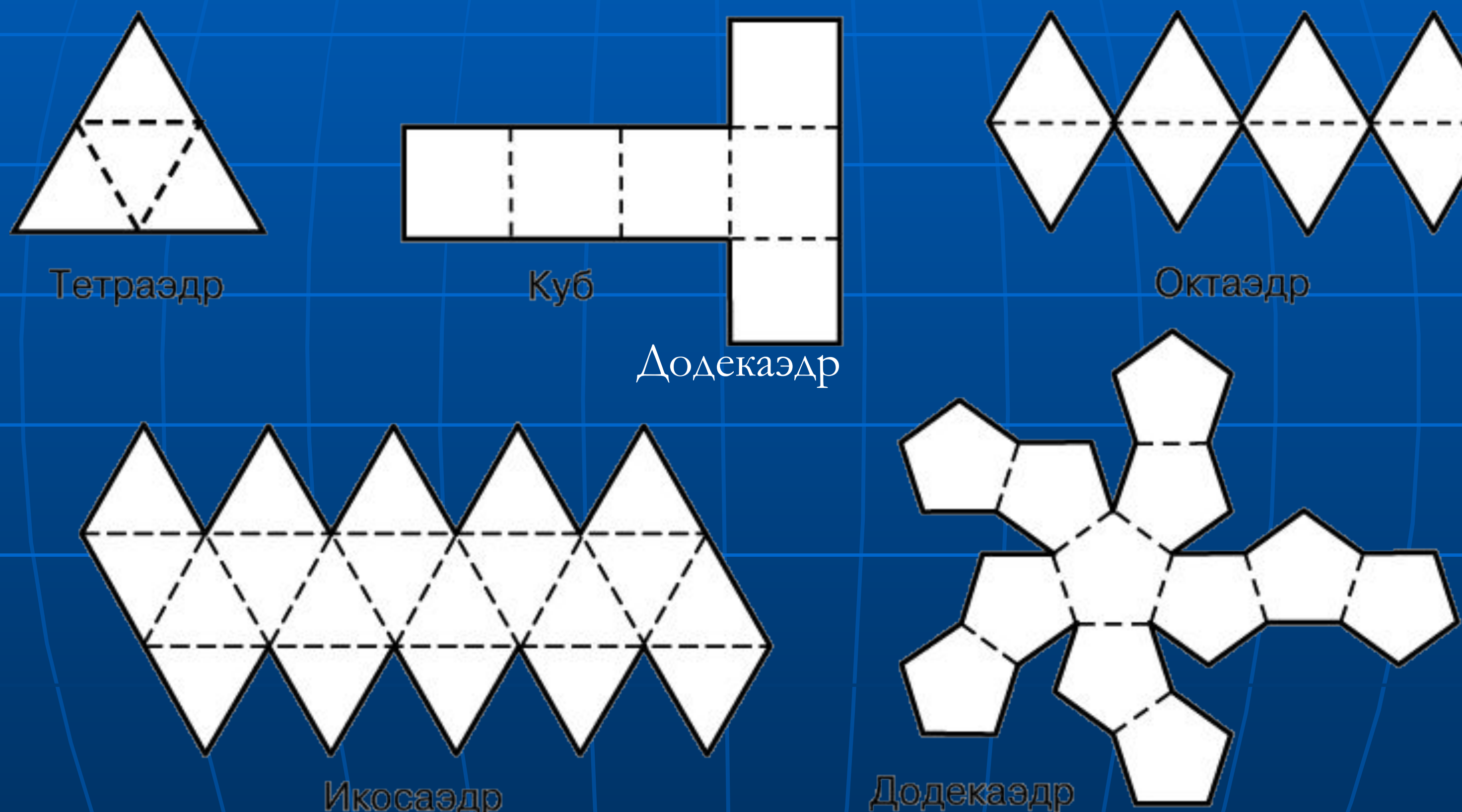


Шесть треугольников составляют в сумме 360^0

Значит, в вершине многогранника могут сходиться три, четыре, или пять треугольников.



Развёртки правильных многогранников.



Теорема о единстве правильных многогранников

$$180\left(1-\frac{2}{p}\right)q < 360,$$

После несложных алгебраических преобразований полученное неравенство приводится к виду

$$(p-2)(q-2)<4$$

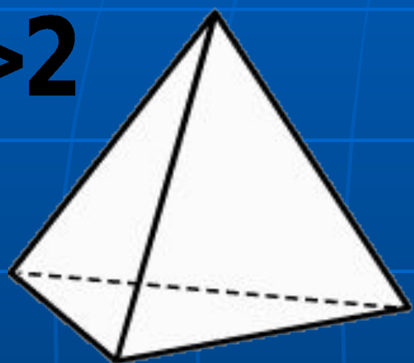
Характеристики многогранников.

Название:	Число ребер при вершине	Число сторон грани	Число граней	Число ребер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Куб	3	4	6	12	8
Октаэдр	4	3	8	12	6
Додекаэдр	3	5	12	30	20
Икосаэдр	5	3	20	30	12

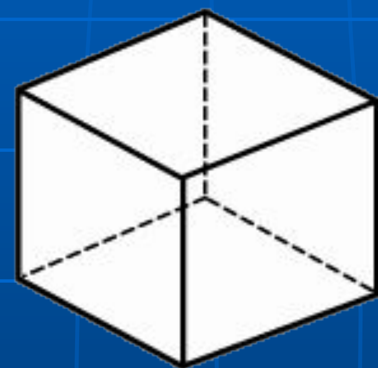
Из предыдущей формулы можно вывести следую систему:

$$\begin{cases} (p-2)(q-2)<4 \\ p>2 \\ q>2 \end{cases}$$

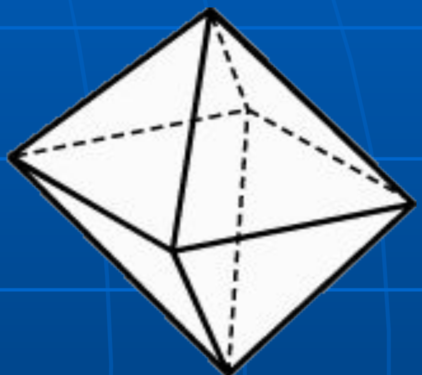
Тогда единственными допустимыми вариантами p и q будут:



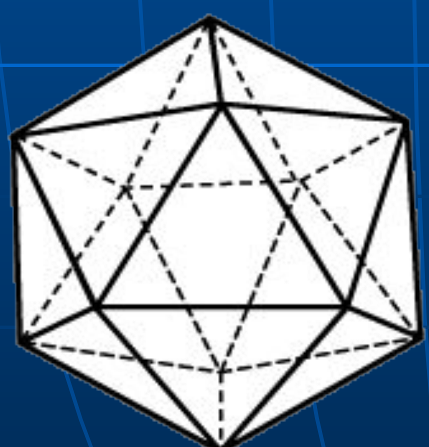
Тетраэдр {3,3}



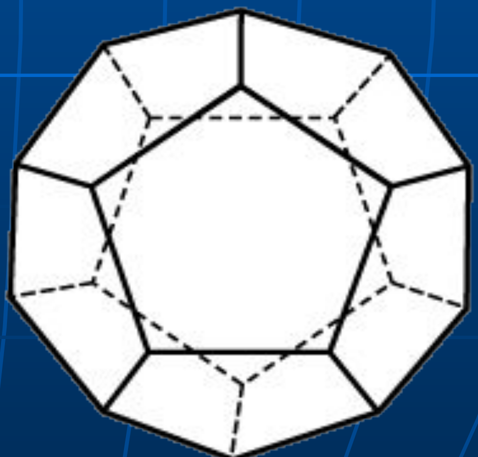
Куб {4,3}



Октаэдр {3,4}



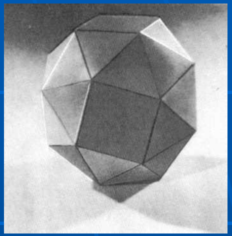
Икосаэдр {3,5}



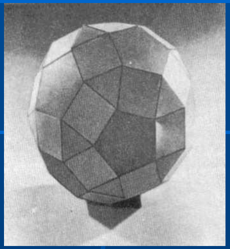
Додекаэдр {5,3}

Полуправильные многогранники

- ***Курносый куб***. Этот многогранник можно вписать в куб таким образом, что плоскости шести квадратных его граней совпадут с плоскостями граней куба, причем эти квадратные грани курносого куба окажутся как бы слегка повернутыми по отношению к соответственным граням куба.

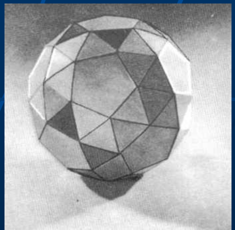


- ***Ромбоикосододекаэдр***. Эта модель принадлежит к числу наиболее привлекательных среди всех других моделей архимедовых тел. Гранями являются треугольники, квадраты и пятиугольники.



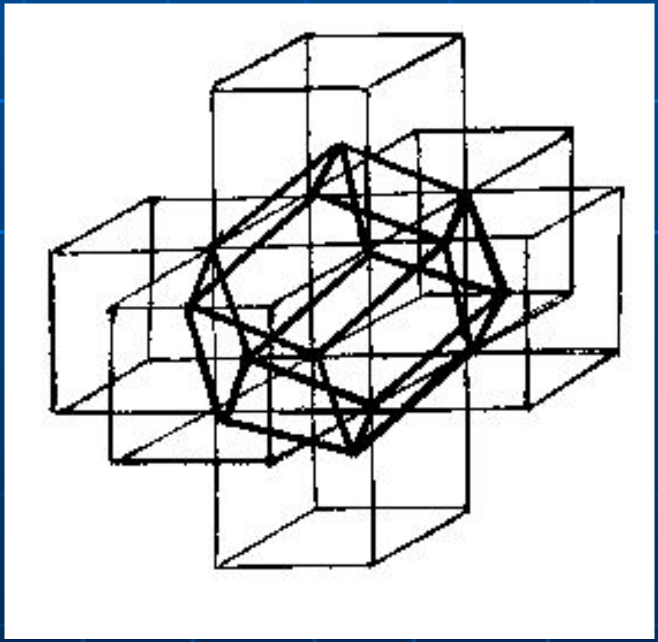
- ***Ромбоусеченный кубооктаэдр***. Этот многогранник, известный также под названием усеченного кубооктаэдра, гранями имеет квадраты, шестиугольники и восьмиугольники.

- ***Курносый додекаэдр*** – это последний из семейства выпуклых однородных многогранников. Гранями являются треугольники и пятиугольники.

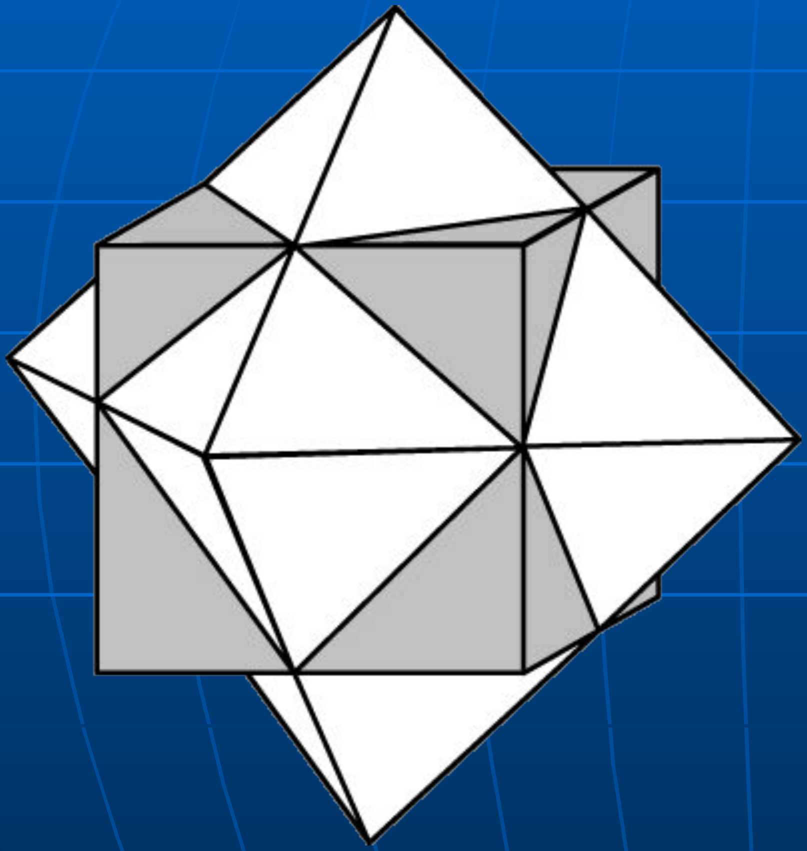


Ромбододекаэдр. (пролуправильные тела)

Он образован помощью семи кубов, образующих пространственный "крест« и додекаэдра.

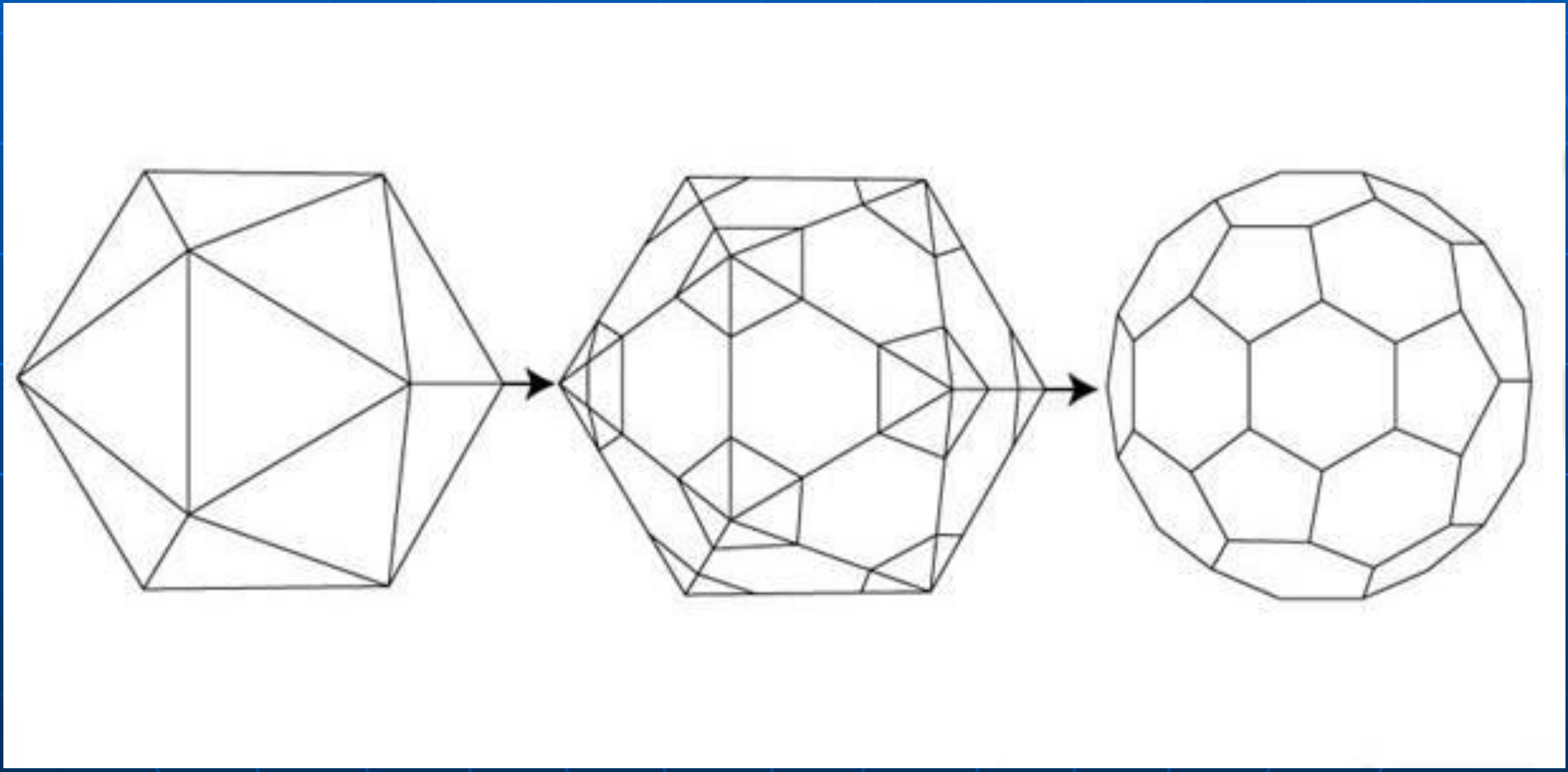


Двойственные многогранники



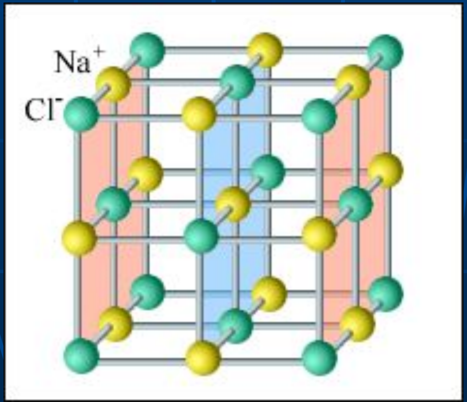
Куб и октаэдр находятся в положении двойственности друг другу, грани являются q-угольниками, p из которых примыкают к каждой вершине.

Конструирование архимедова усеченного икосаэдра из платонова икосаэдра



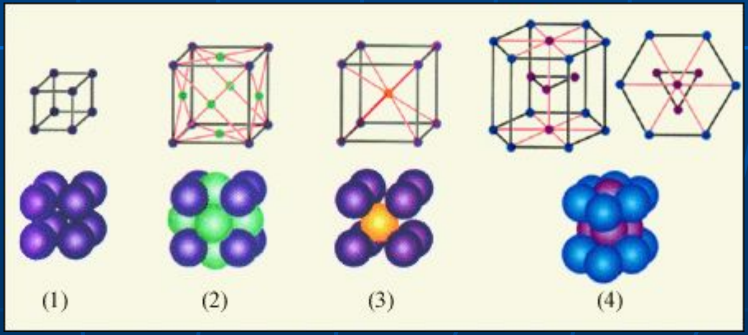
Нахождение в природе

- В кристаллических телах частицы располагаются в строгом порядке, образуя пространственные периодически повторяющиеся структуры во всем объеме тела. Для наглядного представления таких структур используются пространственные ***кристаллические решетки***, в узлах которых располагаются центры атомов или молекул данного вещества. Чаще всего кристаллическая решетка строится из ионов (положительно и отрицательно заряженных) атомов, которые входят в состав молекулы данного вещества. Например, решетка поваренной соли содержит ионы Na+ и Cl–, не объединенные попарно в молекулы NaCl . Такие кристаллы называются **ионными**.



Кристаллы

- Кристаллические решетки металлов часто имеют форму шестигранной призмы (цинк, магний), гранецентрированного куба (медь, золото) или объемно центрированного куба (железо).
- Кристаллические тела могут быть **монокристаллами** и **поликристаллами**. Поликристаллические тела состоят из многих сросшихся между собой хаотически ориентированных маленьких кристалликов, которые называются **кристаллитами**. Большие монокристаллы редко встречаются в природе и технике. Чаще всего кристаллические твердые тела, в том числе и те, которые получаются искусственно, являются поликристаллами.

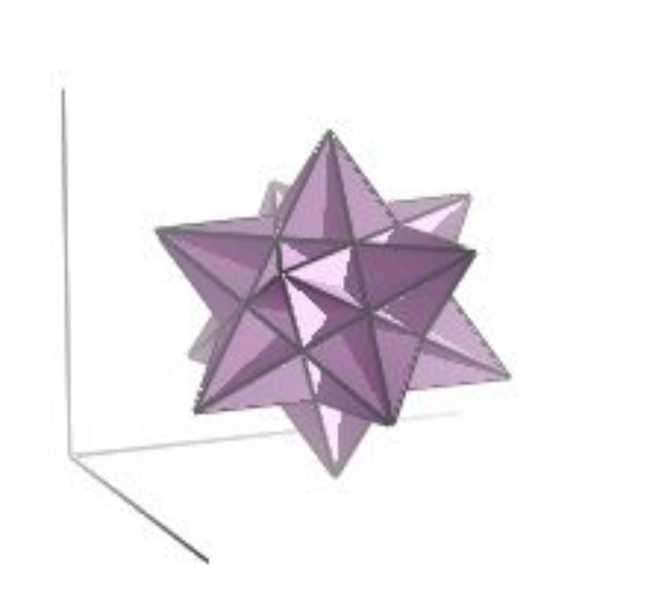


Простые кристаллические решетки: 1 – простая кубическая решетка; 2 – гранецентрированная кубическая решетка; 3 – объемноцентрированная кубическая решетка; 4 – гексагональная решетка.

Кристаллы-многогранники

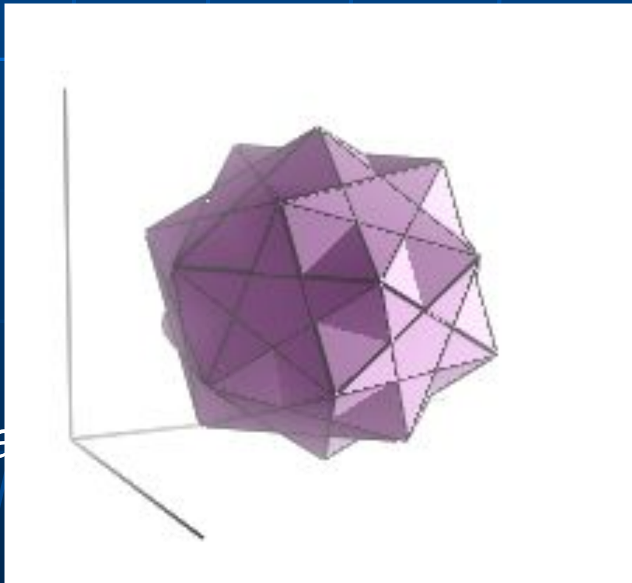
- Кальций. При ударах кристаллы кальцита раскалываются правильные фигурки, каждая грань которых имеет форму параллелограмма . Кальций образует разнообразные кристаллы от пластичной до вытянуто-призматичной формы.
- Апатит. Они образуют кристаллы в форме прямоугольной призмы.
- Бериллий. Обычно встречается в виде столбчатых шестигранных кристаллов.

Историческая справка



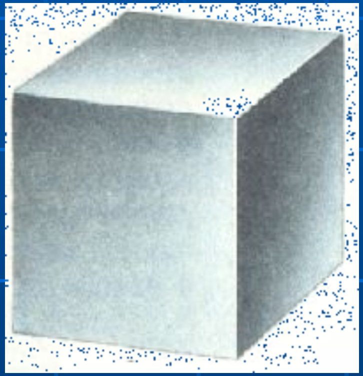
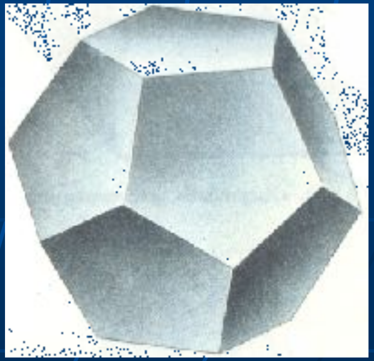
История правильных многогранников уходит в глубокую древность. Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства.

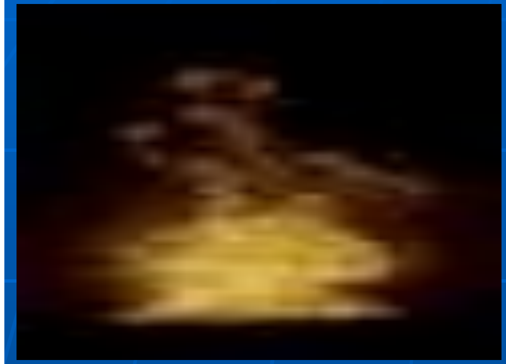
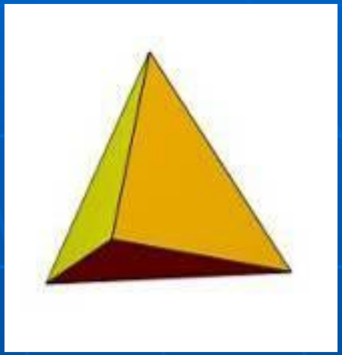
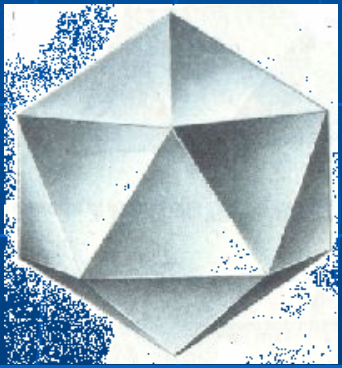
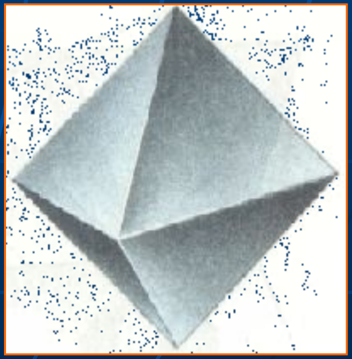
Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики- это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых духов.



Пифагорейцы, а затем Платон полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды. Существование пяти правильных многогранников они относили к строению материи и Вселенной.

Согласно этому мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных Платоновых тел:

 земля	гексаэдр (куб) 
вселенная 	Додекаэдр 

 огонь	тетраэдр 
 вода	икосаэдр 
 воздух	октаэдр 

Художники о правильных многогранниках

- В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявляли скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга, монаха Луки Пачоли «О божественной пропорции»

На картине художника Сальвадора Дали «Тайная Вечеря» Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра.

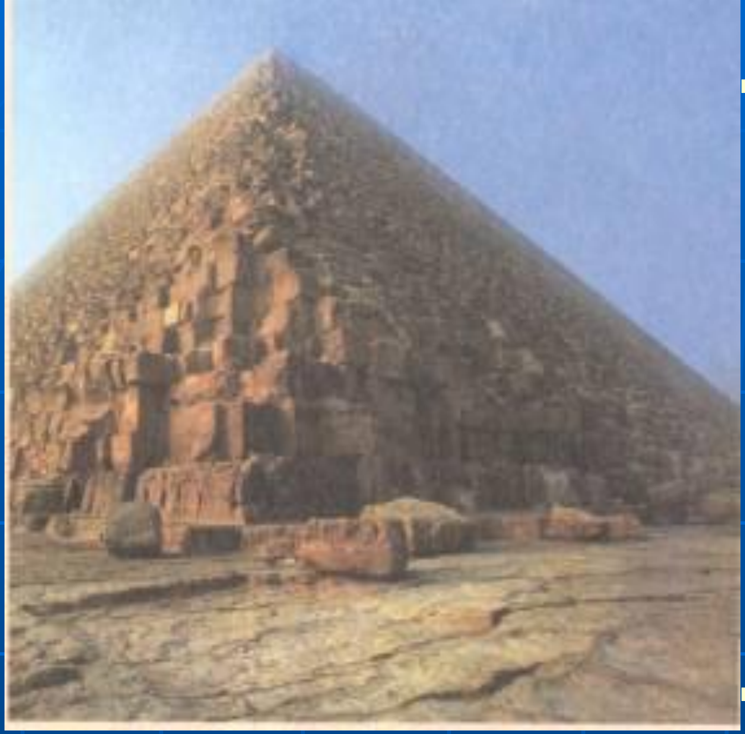
Форму додекаэдра, по мнению древних, имела ВСЕЛЕННАЯ , т.е. они считали, что мы живём внутри свода, имеющего форму поверхности правильного додекаэдра.

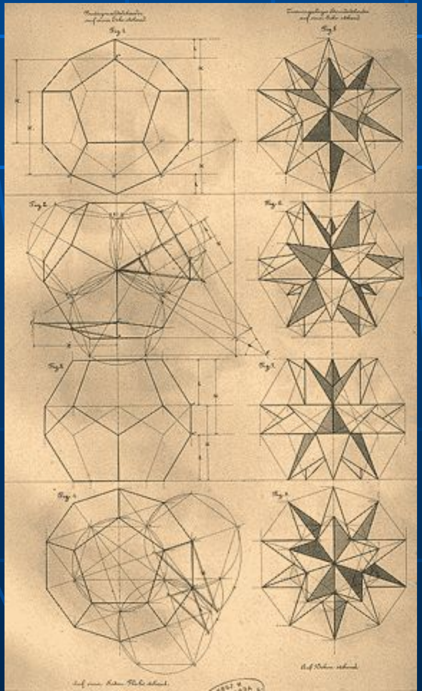
Альбрехт Дюрер.
В его известной гравюре «Меланхолия» на переднем плане изображен додекаэдр.
А в 1525 году Дюрер написал трактат, в котором рассмотрел пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Свойства этих многогранников изучали ученые и священники; их модели можно увидеть в работах архитекторов и ювелиров, им приписывались различные магические и целебные свойства.

Египетские пирамиды

- Среди египетских пирамид особое место занимает пирамида фараона Хеопса. Длина стороны её основания L =233,16 м; высота H =146,6; 148,2 м. Первоначально высота оценивалась не точно. Это связано с осадкой швов, деформацией блоков, предполагаемой частичной разборкой вершины от S 6·6 до 10·10 м.

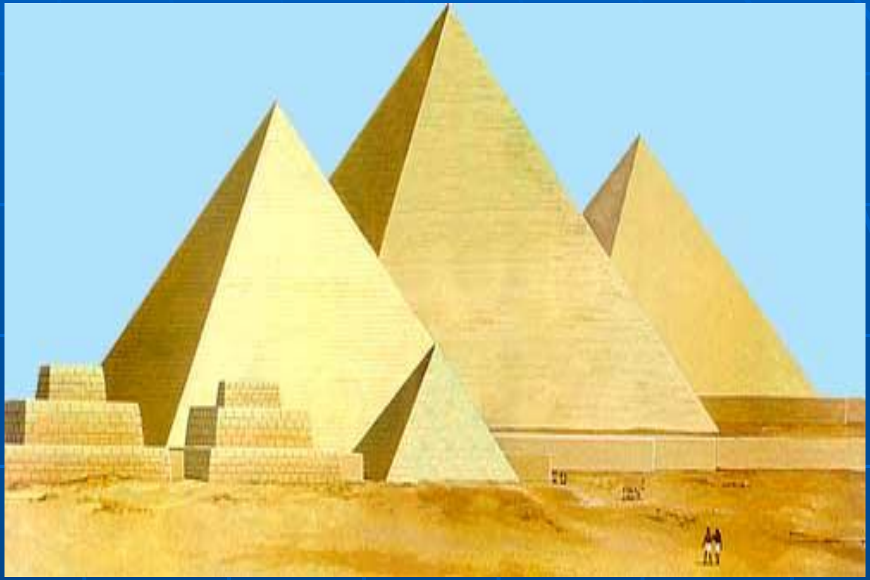




- Среди египетских пирамид особое место занимает пирамида фараона Хеопса. Длина стороны её основания L =233,16 м; высота H =146,6; 148,2 м. Первоначально высота оценивалась не точно. Это связано с осадкой швов, деформацией блоков, предполагаемой частичной разборкой вершины от S 6·6 до 10·10 м.
- Угол наклона граней =51◦51 . Впервые он был измерен английским полковником Г. Вайзовым в 1837 г tg 51◦ 51 =1,27306= vd= 1,27202.

Царская гробница

Великая пирамида была построена как гробница Хуфу, известного грекам как Хеопс. Он был одним из фараонов, или царей древнего Египта, а его гробница была завершена в 2580 году до н.э. Позднее в Гизе было построено еще две пирамиды, для сына и внука Хуфу, а также меньшие по размерам пирамиды для их цариц. Пирамида Хуфу, самая дальняя на рисунке, является самой большой. Пирамида его сына находится в середине и смотрится выше, потому что стоит на более высоком месте.



Александрийский маяк

В III веке до н.э. был построен маяк, чтобы корабли могли благополучно миновать рифы на пути в александрийскую бухту. Ночью им помогало в этом отражение языков пламени, а днем - столб дыма. Это был первый в мире маяк, и простоял он 1500 лет

Фаросский маяк состоял из трех мраморных башен, стоявших на основании из массивных каменных блоков. Первая башня была прямоугольной, в ней находились комнаты, в которых жили рабочие и солдаты. Над этой башней располагалась меньшая, восьмиугольная башня со спиральным пандусом, ведущим в верхнюю башню. Верхняя башня формой напоминала цилиндр, в котором горел огонь, помогавший кораблям благополучно достигнуть бухты. На вершине башни стояла статуя Зевса Спасителя. Общая высота ***маяка составляла 117 метров.***

Простейшее животное

Скелет одноклеточного организма феодарии (Circogonia icosahedra) по форме напоминает ***икосаэдр.***

Большинство феодарий живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Но простейшее животное защищает себя двенадцатью иглами, выходящими из 12 вершин скелета. Он больше похоже на звёздчатый многогранник.

Из всех многогранников с тем же числом граней икосаэдр имеет наибольший объём при наименьшей площади поверхности.

Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление толщи воды.

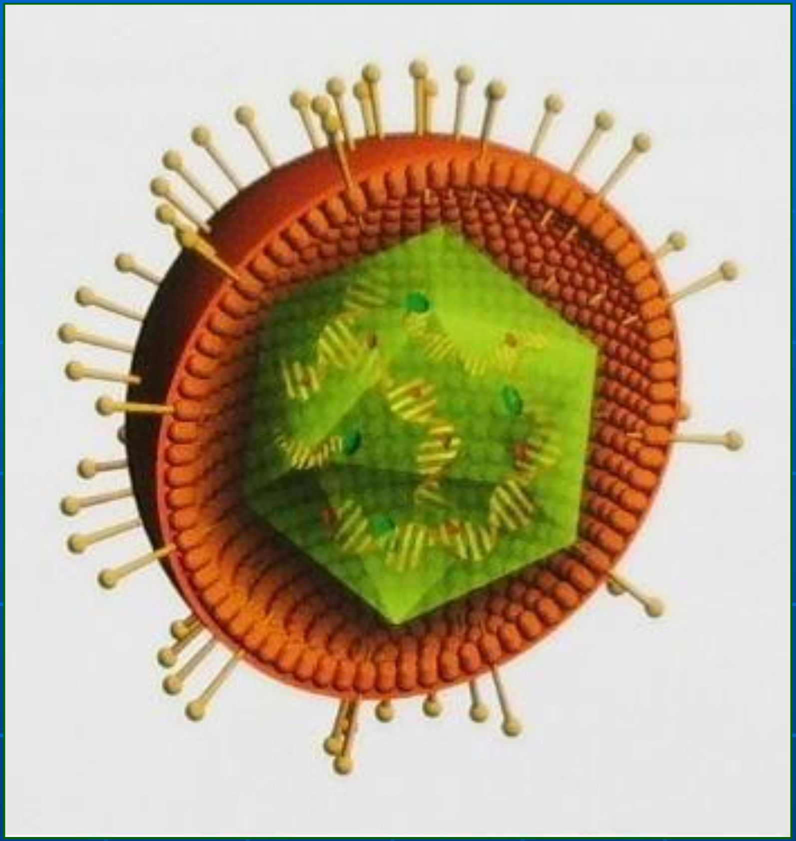
По законам «строгой» архитектуры…

*Пчёлы - удивительные создания. Пчелиные соты представляют собой **пространственный паркет** и заполняют пространство так, что не остается просветов.*

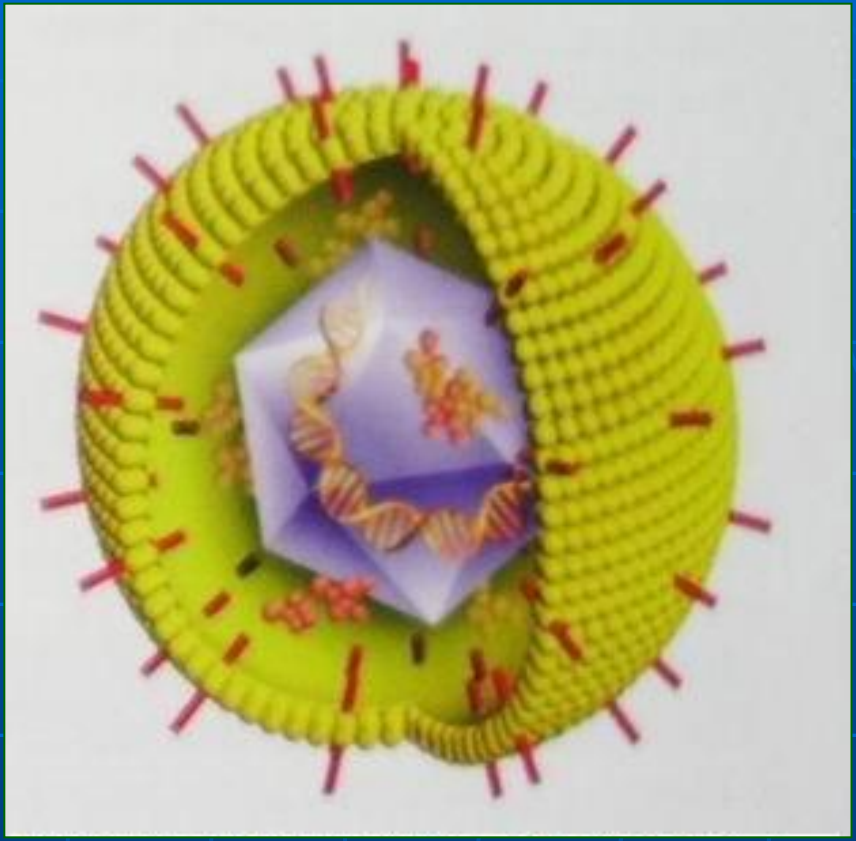
Интересно

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов.

Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.



Вирус краснухи



Вирус
ветряной оспы

Вывод:

Вы узнали о многогранниках все что мы смогли вам показать=)

Большое спасибо за внимание.