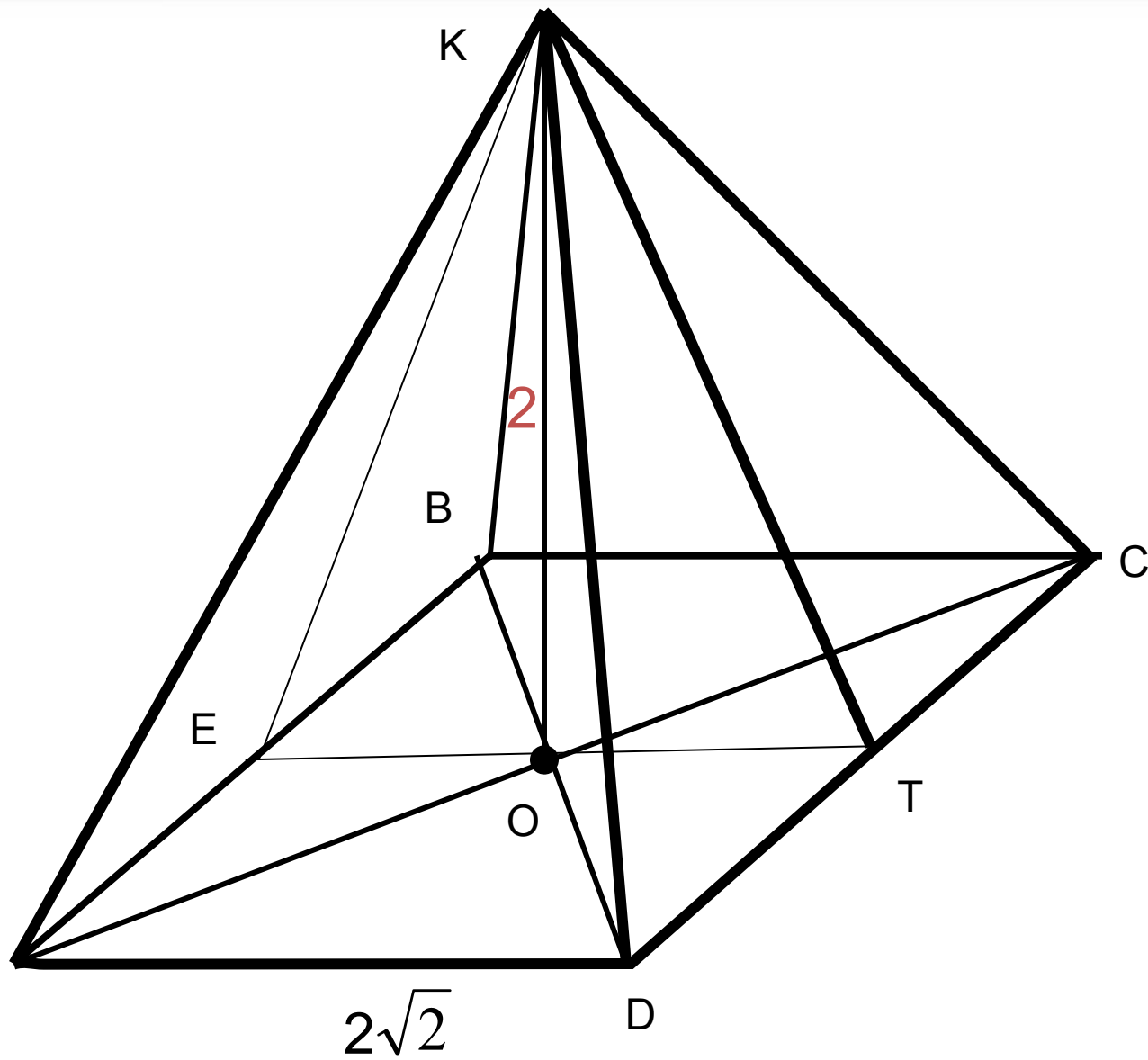


Правильная пирамида

Выполнила Петренко Наталья Викторовна,
Учитель математики МОУ СОШ №7,
Ст.Воронежской, Усть - Лабинского района,
Краснодарского края





В правильной четырехугольной пирамиде известны
длина стороны основания $2\sqrt{2}$ и длина высоты 2.
Найдите:

- а) объем пирамиды;
- б) площадь боковой поверхности;
- в) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;
- г) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
- д) радиус вписанного шара;
- е) радиус описанного шара;
- ж) расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания;

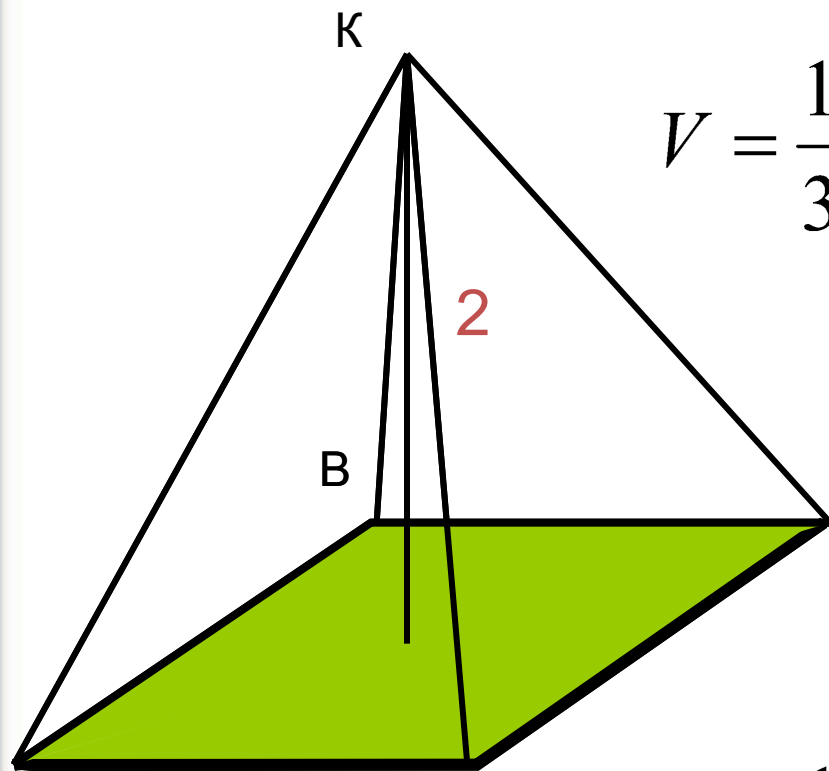


Выход

- з) расстояние от вершины пирамиды до ребра основания;
- и) расстояние от ребра основания до противоположной грани;
- к) расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания;
- л) объем вписанного конуса;
- м) площадь боковой поверхности описанного конуса.



Выход



а) KO – высота пирамиды

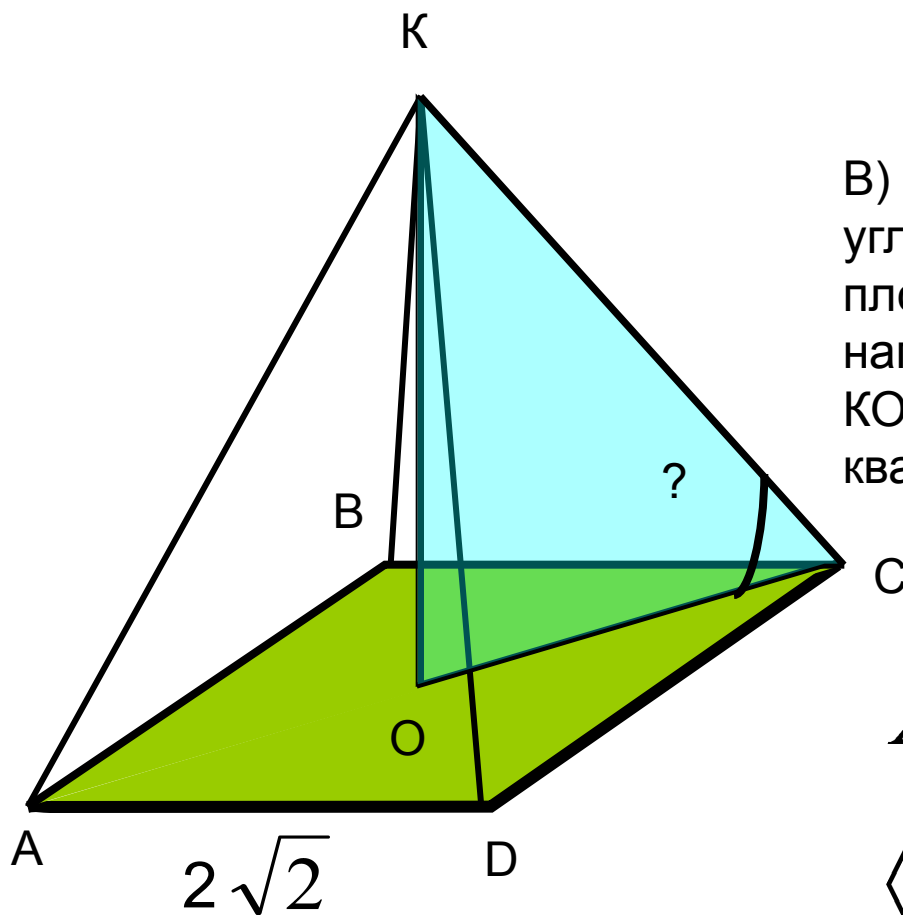
$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot KO = \frac{1}{3} (2\sqrt{2})^2 \cdot 2 = \frac{16}{3}$$

б) Проведем апофему KT и найдем ее длину из ΔKOT :

$$KT = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$$



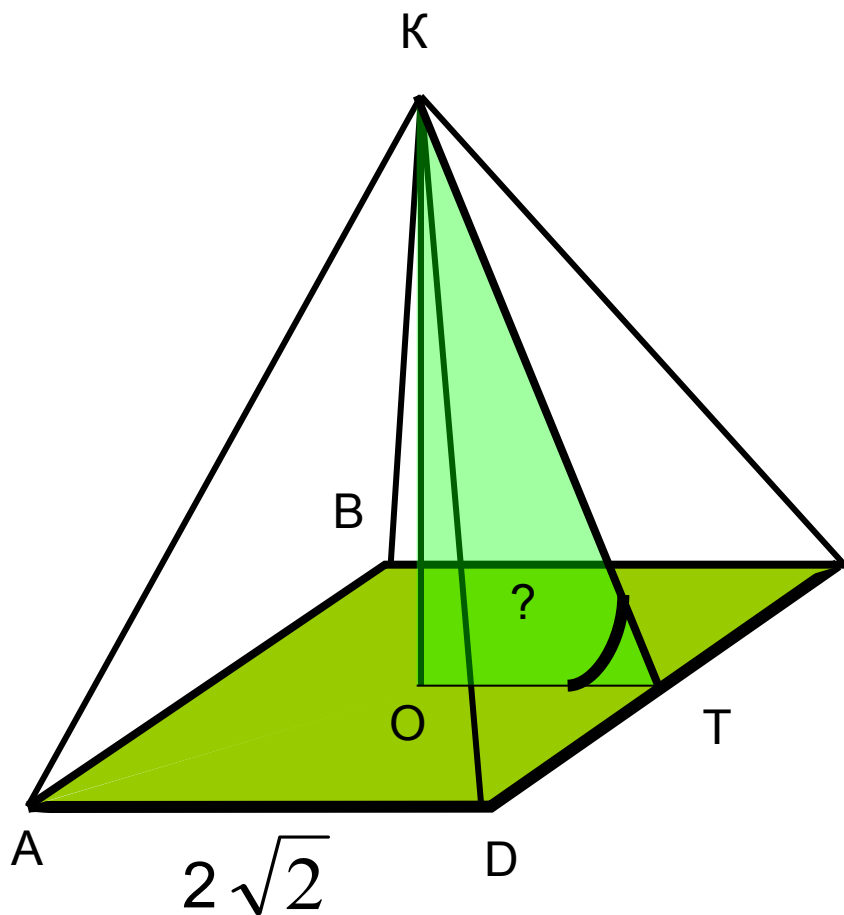


В) Так как в правильной пирамиде все углы наклона всех боковых ребер к плоскости основания равны, то найдем например, $\angle KCO$. Рассмотрим $\triangle KCO$ $KO=2$, $OC=0,5 AC$, где AC – диагональ квадрата $ABCD$, значит

$$AC = (2\sqrt{2})\sqrt{2} = 4$$

$$\angle KCO = 45^\circ$$



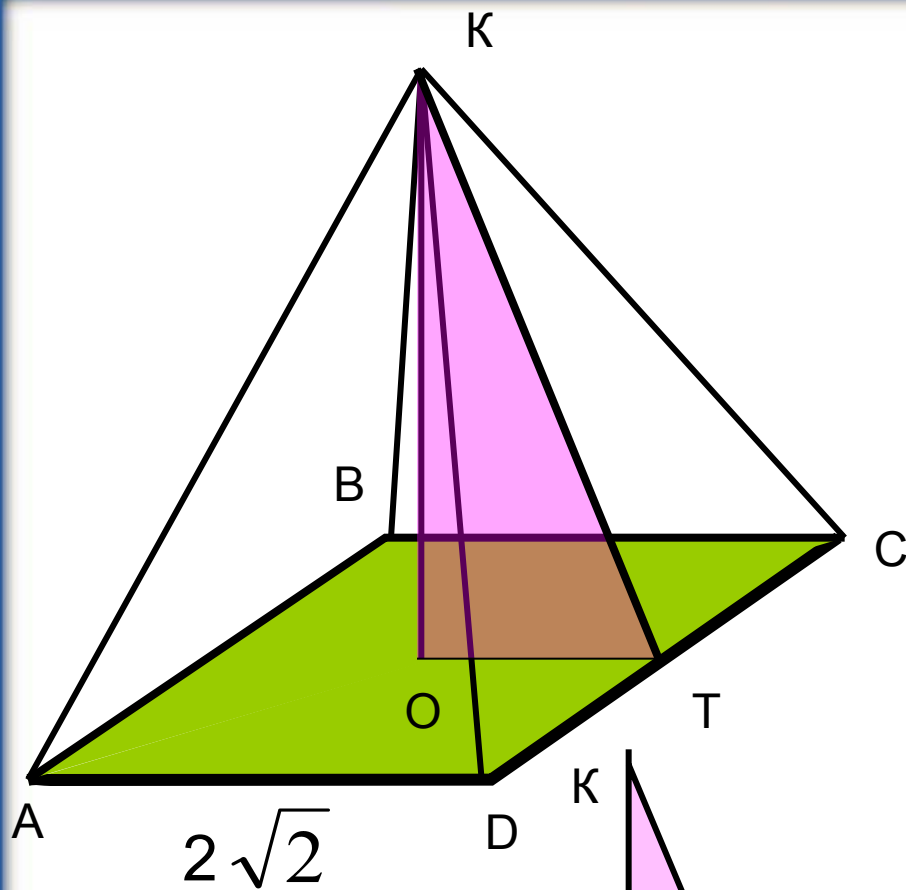


г) Так как в правильной пирамиде углы наклона всех боковых граней к плоскости основания равны, то найдем, например, угол наклона боковой грани KCD к плоскости ABC. так как $KT \perp DC$, то $OT \perp DC$, поэтому $\angle KTO$ - линейный угол искомого двугранного угла. Рассмотрим $\triangle KTO$: $KO=2$.

$$OT = \frac{1}{2} AD = \sqrt{2}, KT = \sqrt{6}$$

$$\angle KTO = \arctg \sqrt{2}$$





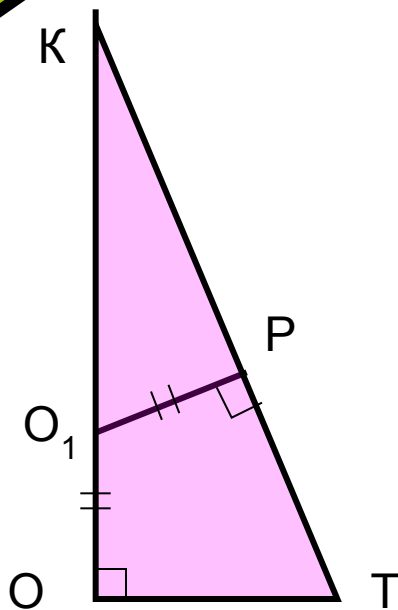
д) Так как двугранные углы при основании правильной пирамиды равны, то центр вписанного шара (точка O_1) принадлежит высоте KO . Обозначим радиус вписанного шара буквой r . Рассмотрим $\triangle KTO$: $O_1P = O_1O = r$. Используя подобие треугольников $\triangle KTO$ и $\triangle KO_1P$, имеем:

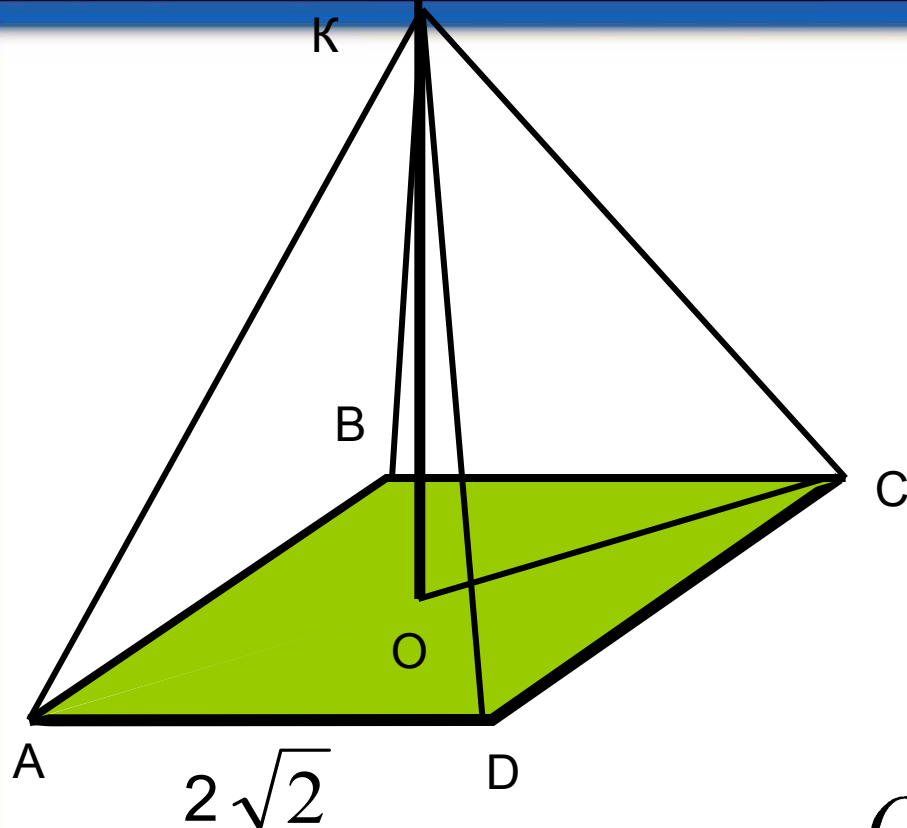
$$\frac{KO_1}{KT} = \frac{O_1P}{OT},$$

$$\frac{2-r}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$(2-r)\sqrt{2} = r\sqrt{6},$$

$$r = \sqrt{3} - 1$$





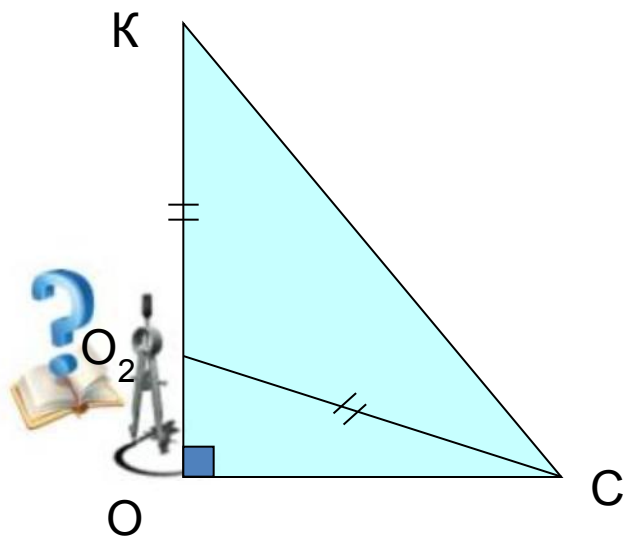
е) Так как боковые ребра правильной пирамиды равны, то центр описанного шара (точка O_2) лежит на прямой KO . Обозначим радиус описанного шара через R . Рассмотрим $\triangle KCO$. По теореме Пифагора из $\triangle O_2OC$:

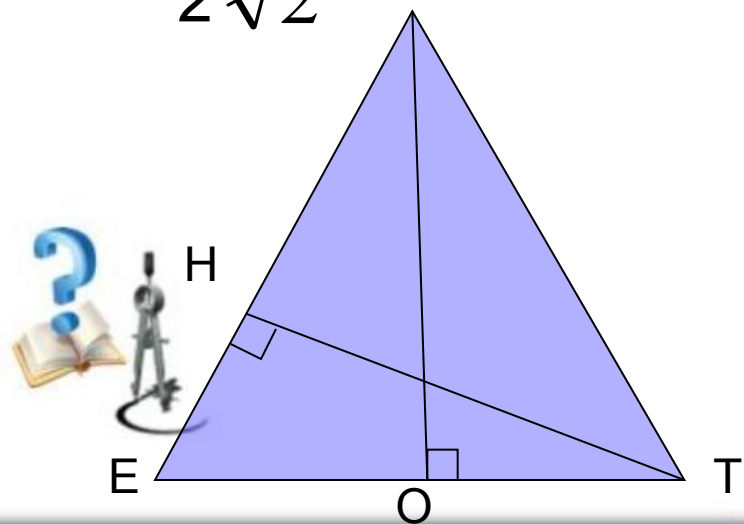
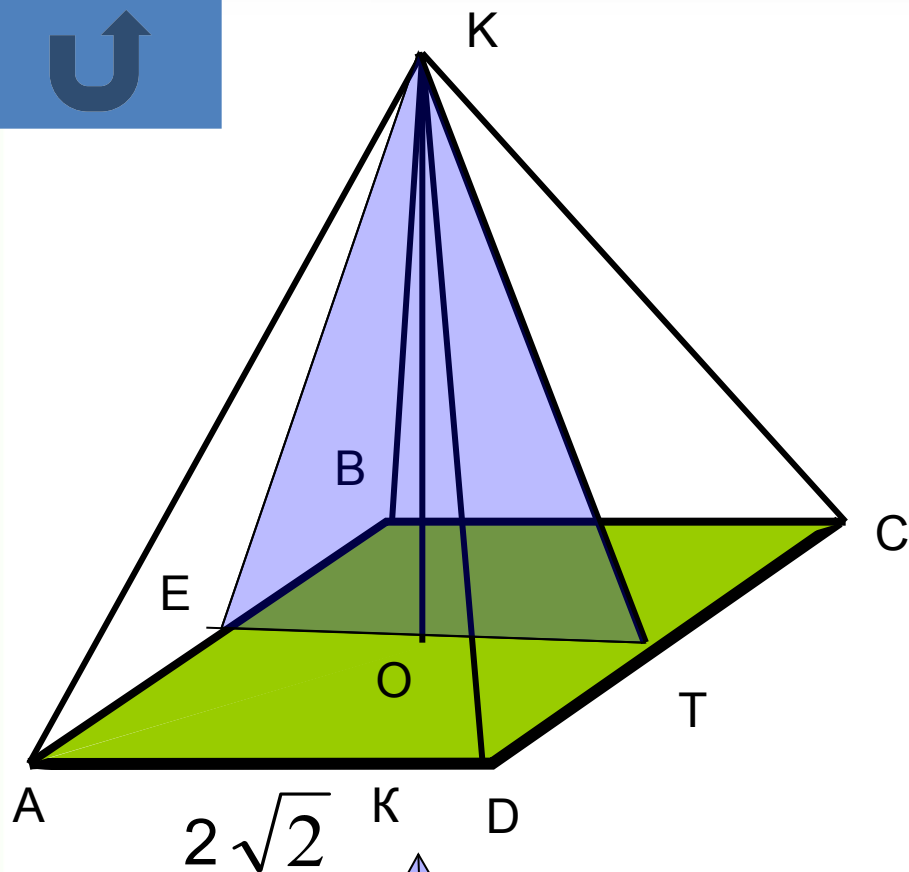
$$O_2C^2 = OC^2 + O_2O^2,$$

$$R^2 = (\sqrt{2})^2 + (2 - R)^2, R = 2.$$

Получаем, что центр описанного шара совпадает с точкой O .

ж) Расстояние от точки K до плоскости ABC равно длине отрезка KO и равно 2.





з) Так как в правильной пирамиде расстояния от вершины до ребер основания равны, то найдем, например, расстояние от точки K до ребра CD , Это расстояние равно длине апофемы KT и равно $\sqrt{6}$

и) Так как прямая DC параллельна плоскости ABK (по признаку параллельности прямой и плоскости),

то
пл
от
пл
в
се
ра
д
в
Δ

$$KT = KE = \sqrt{6}, ET = 2\sqrt{2}.$$

$$S_{EKT} = \frac{1}{2} KO \cdot ET = \frac{1}{2} EK \cdot TH,$$

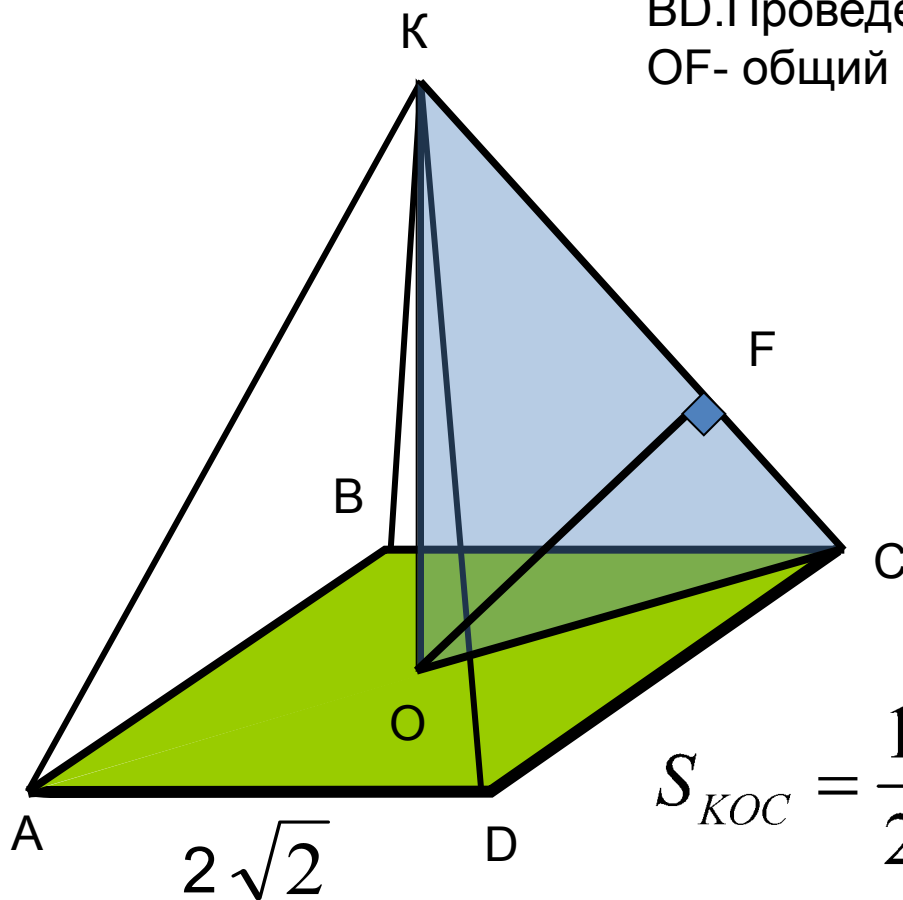
$$2 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot TH,$$

$$TH = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

РЕШЕНИЕ

К) Найдем расстояние от ребра КС до диагонали BD. Проведем высоту OF в $\triangle KCO$ и докажем, что OF- общий перпендикуляр к прямым КС и BD.

- 1) $OF \perp KC$ по построению
- 2) Так как $BD \perp (KCO)$ (По признаку перпендикулярности прямой и Плоскости), а $OF \subset (KCO)$, то $BD \perp OF$
- 3) Найдем длину OF, используя площадь $\triangle KCO$



$$S_{KOC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot OF,$$

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot OF,$$

$$OF = \sqrt{2}$$



Векторно-координатный метод

1) Введем прямоугольную систему координат. Пусть SN- общий перпендикуляр прямых KC и BD. Найдем длину вектора SN

$$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

2) Так как SD коллинеарен BD, то существует такое число x, что

$$\overrightarrow{SD} = x\overrightarrow{BD}, \text{ аналогично}$$

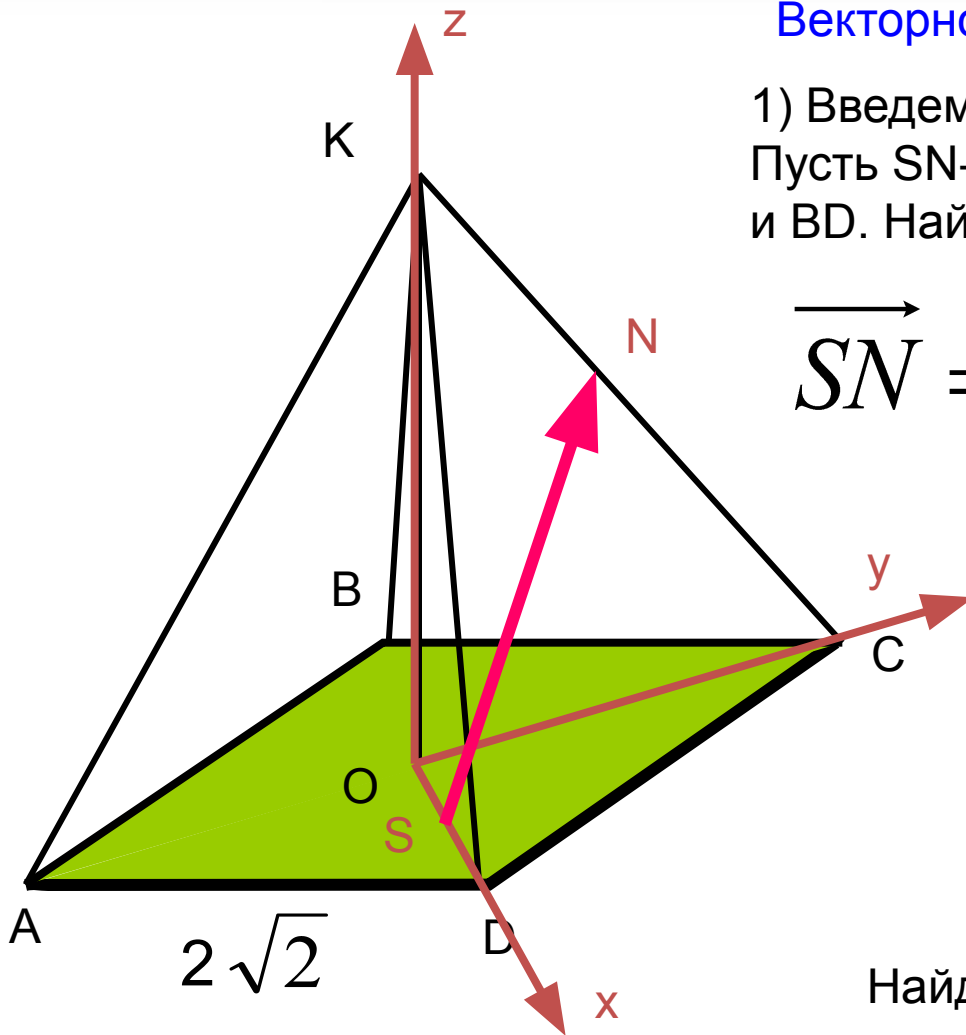
$$\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CK} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{SN} = x\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CK}$$

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BD}\{4;0;0\}, \overrightarrow{DC}\{-2;2;0\}, \overrightarrow{CK}\{0;-2;2\} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{SN}\{4x-2;2-2y;2y\}$$



Учитывая, что $\overrightarrow{SN} \perp \overrightarrow{BD}$, $(\overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0)$

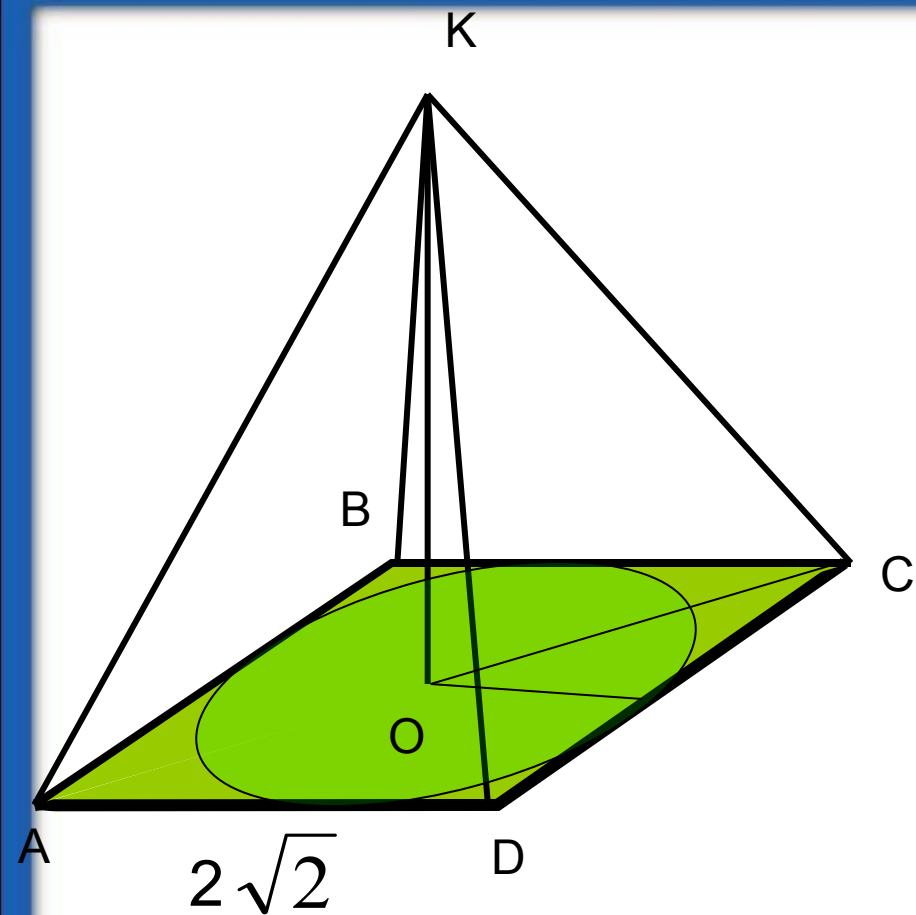
$$\overrightarrow{SN} \perp \overrightarrow{CK} (\overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{CK} = 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (4x - 2)4 = 0 \\ (2 - 2y)(-2) + 2y \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5, \\ y = 0,5. \end{cases}$$

Получаем $\overrightarrow{SN} \{0; 1; 1\}$

$$|\overrightarrow{SN}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$





л) Высота вписанного конуса равна высоте пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, поэтому

$$V_{\text{вписан.конуса}} = \frac{1}{3} \cdot \pi (\sqrt{2})^2 \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi$$

м) Образующая описанного конуса равна боковому ребру пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, описанной около квадрата $ABCD$, поэтому

$$S_{\text{впис.конуса}} = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi.$$



Спасибо за внимание.

