

ТЕМА УРОКА: Повторение геометрии при
подготовке к итоговой аттестации

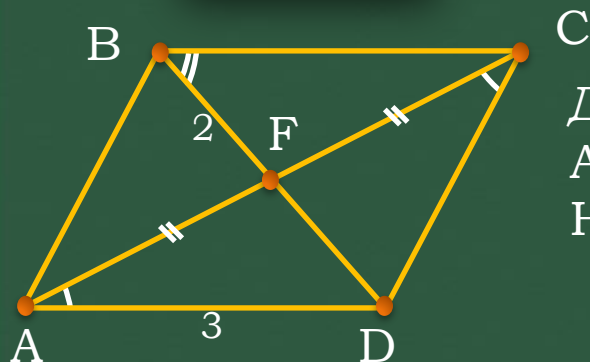
ЦЕЛИ УРОКА: ✓ обобщить и систематизировать полученные
и приобретенные знания, умения, навыки;
✓ активация элементов ранее изученного
материала;
✓ повторить свойства фигур, рассмотреть
различные способы расположения
геометрических фигур на плоскости;
✓ при решении стандартных задач
рассматривать возможность другой
конфигурации фигур.

АВТОРЫ: Веприкова Римма Хабибулаевна (учитель математики)
Зайцева Вера Васильевна (учитель информатики)
МОУ – Гимназия № 2 г. Клин Московской области

Задача 1

Задача 2

Задача 3



Дано: $\angle CBD = 35^\circ$; $BF = 2\text{ см}$; $AD = 3\text{ см}$;
 $AF = FC$; $\angle CAD = \angle ACB$.
Найти: $\angle ADF$; FD ; BC .

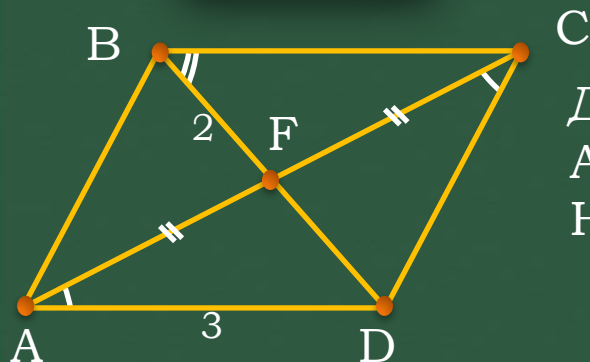
Решение



Задача 1

Задача 2

Задача 3



Дано: $\angle CBD = 35^\circ$; $BF = 2$ см; $AD = 3$ см;
 $AF = FC$; $\angle CAD = \angle ACB$.
Найти: $\angle ADF$; FD ; BC .

Решение

1). Так как $\angle CAD = \angle ACB$ – накрест лежащие, то по признаку параллельности прямых $BC \parallel AD$.

2). Рассмотрим $\triangle AFD = \triangle BFC$ по стороне и двум прилежащим углам (1. $AF = FC$; 2. $\angle CAD = \angle ACB$; 3. $\angle AFD = \angle BFC$).

$\Rightarrow BF = FD$; $\angle FBC = \angle ADF$; $BC = AD$

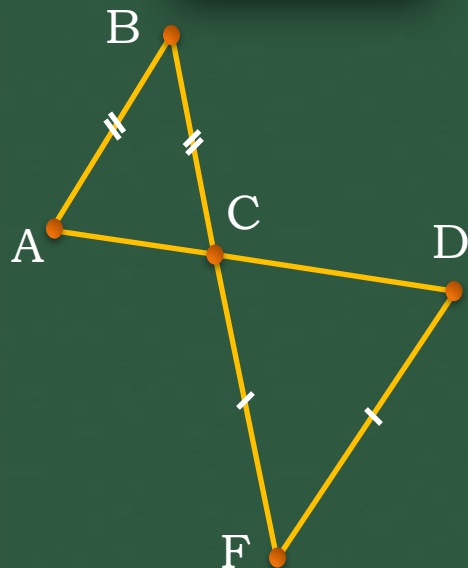
$\Rightarrow BC = AD = 3$ (см); $BF = FD = 2$ (см); $\angle ADF = 35^\circ$.

Ответ: 35° ; 3 см; 2 см.

Задача 1

Задача 2

Задача 3



Дано:

$AB=BC$; $CF=FD$.

Доказать, что $AB \parallel DF$.

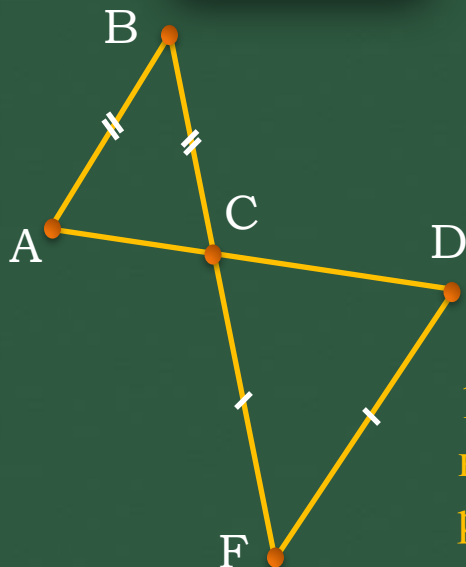
Доказательство



Задача 1

Задача 2

Задача 3



Дано:

$AB=BC$; $CF=FD$.

Доказать, что $AB \parallel DF$.

Доказательство

1). $\triangle ABC$ – равнобедренный (по определению), так как $AB=BC \Rightarrow \angle BAC = \angle ACB$ по свойству равнобедренного треугольника.

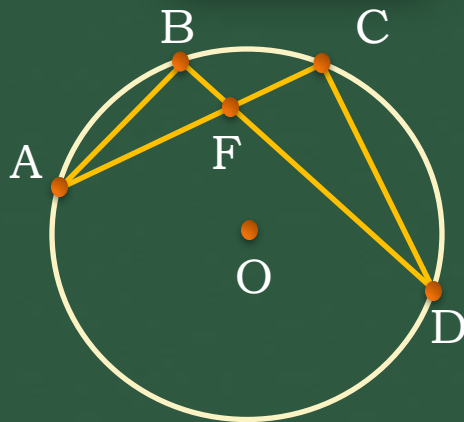
2). $\triangle CDF$ – равнобедренный по определению, так как $CF=FD \Rightarrow \angle DCF = \angle CDF$ (по свойству).

3) $\angle ACB = \angle DCF$ – вертикальные $\Rightarrow \angle BAC = \angle CDF$ – накрест лежащие, то по признаку параллельности прямых $\Rightarrow AB \parallel FD$, что и требовалось доказать.

Задача 1

Задача 2

Задача 3



Дано: $(O; R)$ – окружность

$\text{т. } A, B, C, D \in (O; R)$

$AC \cap BD = \text{т. } F$

Записать: пропорциональные отрезки.

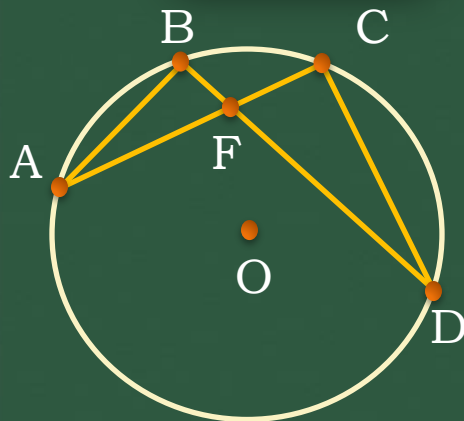
Решение



Задача 1

Задача 2

Задача 3



Дано: $(O; R)$ – окружность

$\text{т. } A, B, C, D \in (O; R)$

$AC \cap BD = \text{т. } F$

Записать: пропорциональные отрезки.

Решение

1). $\angle ABD = \angle ACD$ – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу $\cup AD$.

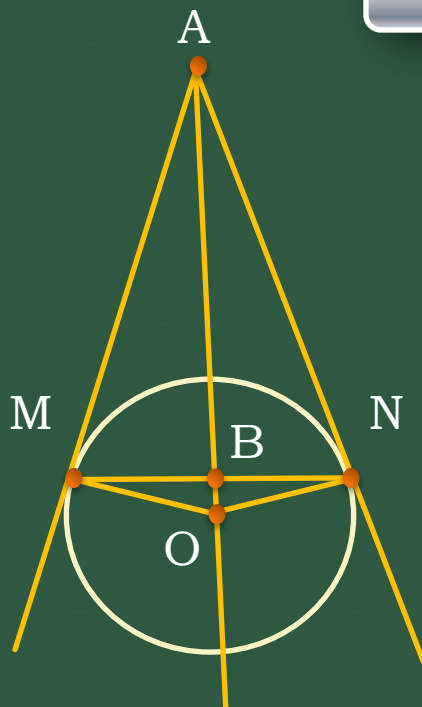
2). $\angle BAC = \angle CDB$ – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу $\cup BC$.

3). $\angle AFB = \angle CFD$ – вертикальные $\Rightarrow$ стороны AF и DF ; BF и CF ; AB и CD – сходственные стороны $\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle CDF \Rightarrow$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BF}{CF} = \frac{AF}{DF} - \text{пропорциональные стороны.}$$

Задача 1

Задача 2



Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса r в точках M и N . Найти длину отрезка MN , если расстояние от точки A до центра окружности равно a .

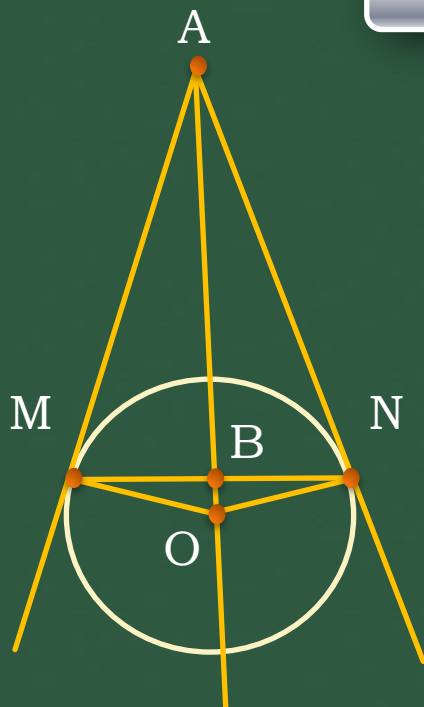
Решение



Задача 1

Задача 2

Решение



ОМ и ОN – радиусы окружности; по свойству радиуса, проведенного в точку касания, $ОМ \perp МА$; $ОN \perp NA$.

$\triangle AMO = \triangle ANO$ – прямоугольные (по катету и гипотенузе: $ОМ = ОN = r$; $ОА$ – общая) $\Rightarrow \angle OAM = \angle OAN$.

$AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ – равнобедренный (по определению) $\angle AOM = \angle AON$.

По свойству равнобедренного треугольника: АВ – биссектриса, медиана и высота $МВ = BN$; $AB \perp MN$.

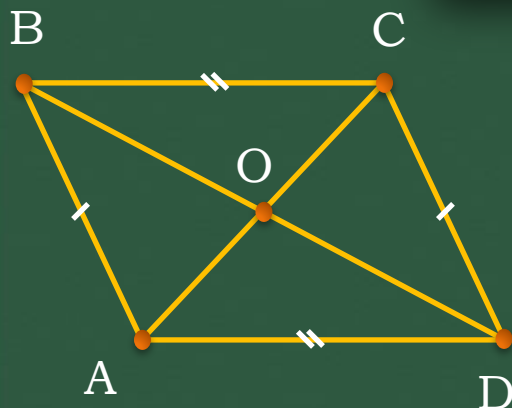
$$S(\triangle AMO) = \frac{1}{2} MB \cdot AO \text{ или } S(\triangle AMO) = \frac{1}{2} MO \cdot AM$$

Из $\triangle AMO$: по теореме Пифагора: $MA = \sqrt{OA^2 - OM^2}$; $MA = \sqrt{a^2 - r^2}$.

$$MB = \frac{r}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad \text{и} \quad MN = \frac{2r}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad \text{Ответ:} \quad \frac{2r}{a} \sqrt{a^2 - r^2}$$

Задача 1

Задача 2

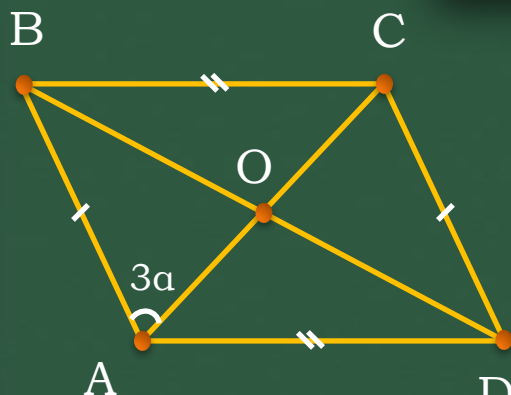


В параллелограмме $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагонали $AC = c$; $BD = 3c/2$. Найти площадь параллелограмма, если $\angle CAB = 2\angle ABD$.

Решение



Задача 1



Задача 2

Решение

Точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Для вычисления площади применим формулу $S(ABCD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB$;
 $S(ABCD) = \frac{3}{4}c^2 \cdot \sin \angle AOB$

Пусть $\angle DBA = \alpha$, тогда $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle AOB = \pi - 3\alpha$.

По теореме синусов из $\triangle AOB$:

$$\frac{c}{2 \sin \alpha} = \frac{3c}{4 \sin 2\alpha}, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{3}{4}; \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

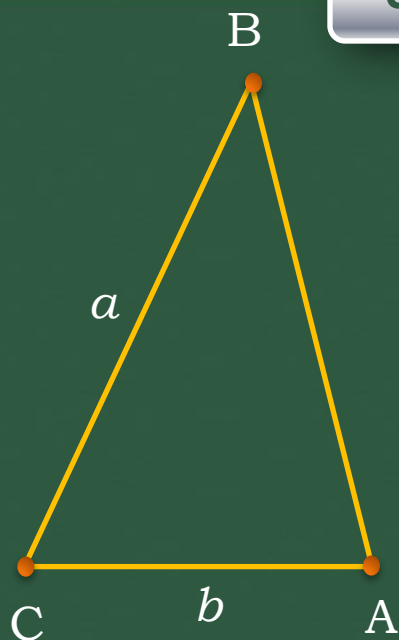
Тогда, используя формулу $\sin 3\alpha$, получаем

$$\sin \angle AOB = \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ и } S = \frac{15\sqrt{7}}{64} c^2$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{7}}{64} c^2$

Задача 1

Задача 2



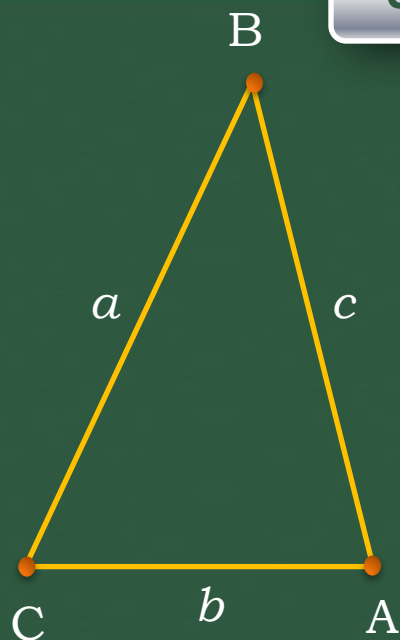
Две стороны треугольника равны a и b . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b .

Решение

Искомую сторону $\triangle ABC$ обозначим c , то есть $AB=c$

Задача 1

Задача 2



Две стороны треугольника равны a и b . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b .

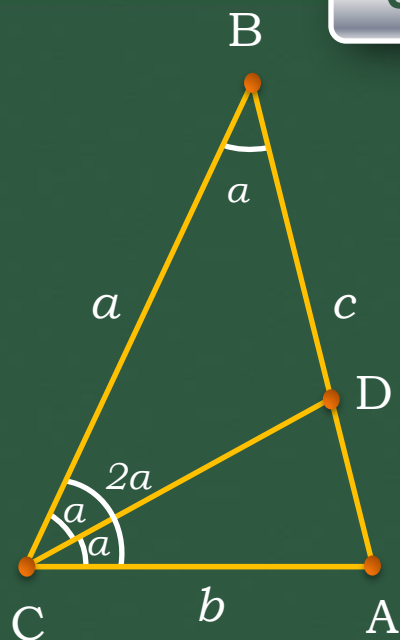
Решение

Искомую сторону $\triangle ABC$ обозначим c , то есть $AB=c$
 $\angle B=\alpha$, тогда $\angle C=2\alpha$. Проведем CD – биссектрису $\angle C$.



Задача 1

Задача 2



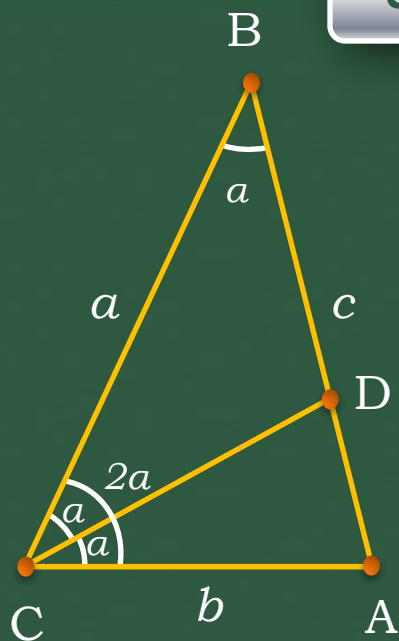
Две стороны треугольника равны a и b . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b .

Решение

Искомую сторону $\triangle ABC$ обозначим c , то есть $AB=c$
 $\angle B=\alpha$, тогда $\angle C=2\alpha$. Проведем CD – биссектрису $\angle C$.

Задача 1

Задача 2



Две стороны треугольника равны a и b . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b .

Решение

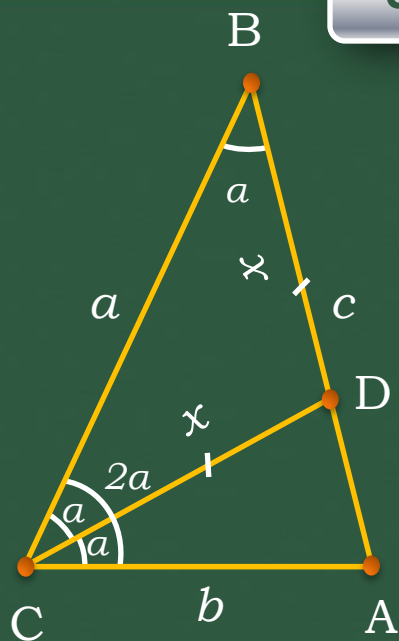
Искомую сторону $\triangle ABC$ обозначим c , то есть $AB=c$.
 $\angle B=a$, тогда $\angle C=2a$. Проведем CD – биссектрису

Рассмотрим $\triangle CBD$ – равнобедренный, так как $\angle BCD=\angle B=a$ (углы при основании $\triangle ABD$) $\Rightarrow BD=CD$.

Пусть $BD = x$, тогда $AD=c - x$, $CD=x$.

Задача 1

Задача 2



Две стороны треугольника равны a и b . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b .

Решение

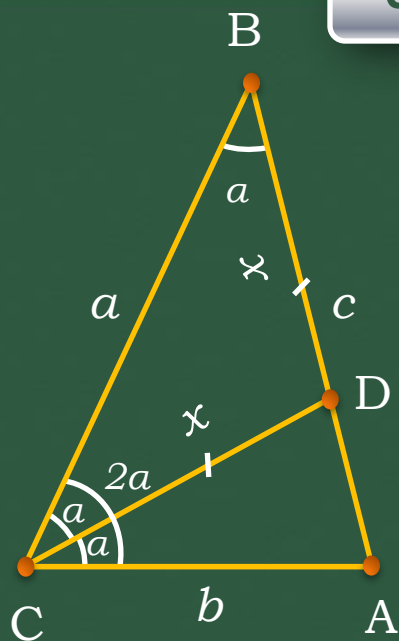
Искомую сторону $\triangle ABC$ обозначим c , то есть $AB=c$
 $\angle B=\alpha$, тогда $\angle C=2\alpha$. Проведем CD – биссектрису

Рассмотрим $\triangle CBD$ – равнобедренный, так как $\angle BCD=\angle B=\alpha$ (углы при основании $\triangle ABD$) $\Rightarrow BD=CD$.

Пусть $BD=x$, тогда $AD=c-x$, $CD=x$.

Задача 1

Задача 2



Две стороны треугольника равны a и b . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b .

Решение

Искомую сторону $\triangle ABC$ обозначим c , то есть $AB=c$
 $\angle B=\alpha$, тогда $\angle C=2\alpha$. Проведем CD – биссектрису

Рассмотрим $\triangle CBD$ – равнобедренный, так как $\angle BCD=\angle B=\alpha$ (углы при основании $\triangle ABD$) $\Rightarrow BD=CD$.

Пусть $BD=x$, тогда $AD=c-x$, $CD=x$.

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника



Задача 1

Задача 2

**Теорема о биссектрисе**

Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Доказательство

Пусть AD – биссектриса $\triangle ABC$.

Так как площади треугольников, имеющих общую вершину A, относятся как длины их оснований, то

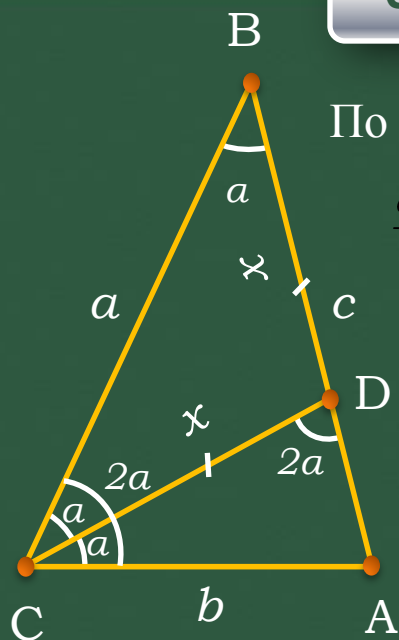
$\frac{S_{(\triangle ACD)}}{S_{(\triangle ABD)}} = \frac{CD}{BD}$ (1), с другой стороны, эти площади относятся как длины сторон:

$$\frac{S_{(\triangle ACD)}}{S_{(\triangle ABD)}} = \frac{0,5 AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD}{0,5 AB \cdot AD \cdot \sin \angle DAB} = \frac{AC}{AB} \quad (2).$$

Из (1) и (2) следует, что $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$. Теорема доказана

Задача 1

Задача 2



По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника:

$$\frac{c-x}{x} = \frac{b}{a} \text{ или } x = \frac{a}{a+b} \cdot c \quad (1)$$

С другой стороны, $\angle ACD = \alpha$, а $\angle ADC = 2\alpha$ (как внешний угол $\triangle CBD$). Тогда три угла $\triangle ACD$ равны трем углам $\triangle ABC$, следовательно, $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.

Из подобия треугольников найдем

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{x}; \quad x = \frac{ab}{c} \quad (2)$$

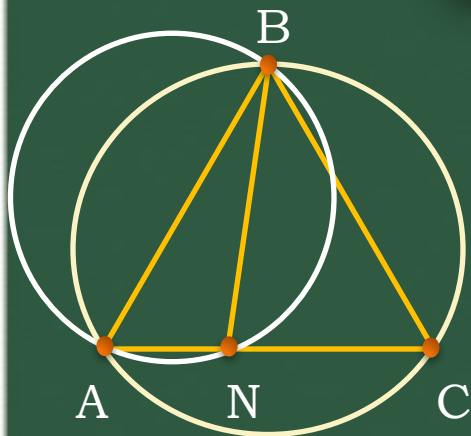
Приравнявая правые части (1) и (2) равенства, получим

$$\frac{ab}{c} = \frac{ac}{a+b}; \quad ac^2 = ab(a+b); \quad c^2 = \frac{ab(a+b)}{a}; \quad c^2 = b(a+b); \quad c = \sqrt{(a+b)b}$$

Ответ: $BC = \sqrt{(a+b)b}$

Задача 1

Задача 2



Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если $AN:AC=n$

Решение

Обозначим сторону треугольника ABC через a , тогда $AN=na$.

Сторону BN найдем по теореме косинусов:

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 - 2AB \cdot AN \cdot \cos 60^\circ; \quad BN = a\sqrt{1+n^2-n}$$

R_1 – радиус окружности, описанной около $\triangle ABN$.

R_2 – радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Применим формулу $S = \frac{abc}{4R}$



Задача 1

Задача 2

Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон этого треугольника.

Радиус R окружности, описанной около треугольника, по его сторонам и полупериметру вычисляется по формуле:

$$R = \frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}; \text{ где } p - \text{полупериметр: } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Также радиус R окружности, описанной около треугольника, может быть вычислен по формулам:

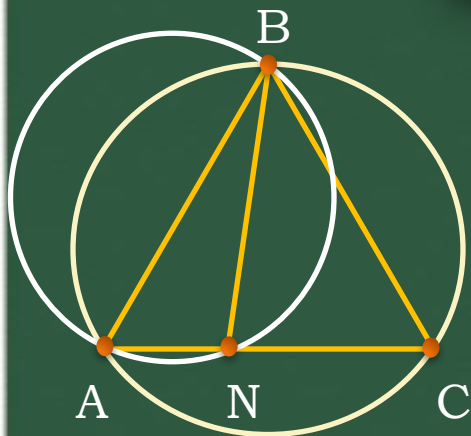
$$R = \frac{ab}{2h_c}; R = \frac{abc}{4S},$$

где S – площадь треугольника,

h_c – высота, проведенная из вершины C .

Задача 1

Задача 2



Применяя формулу
получим, что

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S_{(\triangle ABN)} = \frac{na^3 \sqrt{1+n^2-n}}{4R_1}; S_{(\triangle ABC)} = \frac{a^3}{4R_2}.$$

Если у треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания. А так как $\triangle ABN$ и $\triangle ABC$ имеют общую высоту, проведенную из вершины B , то их площади относятся как длины оснований: $S_{(\triangle ABN)} = n \cdot S_{(\triangle ABC)}$.

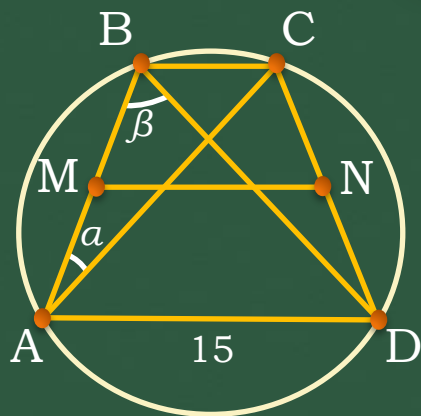
Подставляя выражения для площадей, получим:

$$\frac{na^3 \sqrt{1+n^2-n}}{4R_1} = \frac{na^3}{4R_2}; \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}.$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}.$

Задача 1

Задача 2



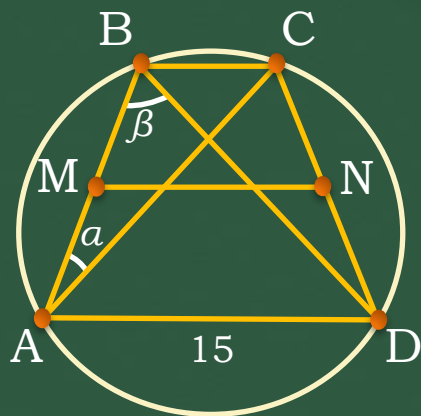
Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найти среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус $\angle BAC$ равен $1/3$, синус $\angle ABD$ равен $5/9$.

Решение



Задача 1

Задача 2



Решение

Средняя линия трапеции равна $MN = \frac{AD + BC}{2}$.

Для нахождения средней линии надо найти длину основания BC.

Используя свойства вписанных и центральных углов окружности, а также радиус описанной окружности R , выразим:

$$AD = 2R \cdot \sin \angle \beta; BC = 2R \cdot \sin \angle \alpha;$$

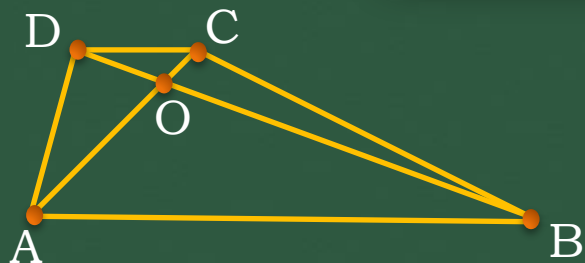
$$\frac{BC}{AD} = \frac{\sin \angle \alpha}{\sin \angle \beta} = \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}; BC = \frac{3}{5} AD; BC = 9$$

$$\text{Длина } MN = \frac{15 + 9}{2}; MN = 12$$

Ответ: 12

Задача 1

Задача 2



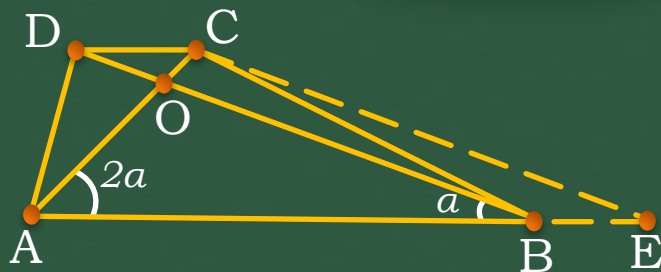
В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$)
диагонали $AC=a$ и $BD=7/5a$.
Найти площадь трапеции, если
 $\angle CAB=2\angle DBA$.

Решение



Задача 1

Задача 2



Решение

Пусть $\angle DBA = \alpha$, тогда $\angle CAB = 2\alpha$.

Через вершину C проведем $CE \parallel DB$ до пересечения ее с продолжением основания AB в точке E.

$BE = CD$; $CE = BD$; $\angle CEA = \angle DBA = \alpha$ – соответственные при $DB \parallel CE$ и AE секущая.

$$S(\triangle ACE) = \frac{1}{2} AE \cdot h = \frac{1}{2} (AB + BE) \cdot h = \frac{1}{2} (AB + DC) \cdot h = S(ABCD)$$

h – высота $\triangle ACE$ и трапеции ABCD.

$$S(\triangle ACE) = \frac{1}{2} AC \cdot EC \cdot \sin \angle ACE = \frac{1}{2} a \cdot \frac{7a}{5} \cdot \sin(\pi - 3\alpha) = \frac{7}{10} a^2 \cdot \sin 3\alpha.$$

Для $\triangle ACE$ применим теорему синусов: $\frac{CE}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$; $\cos \alpha = \frac{7}{10}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$.

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; \quad \sin 3\alpha = \frac{12\sqrt{51}}{125}, \text{ следовательно,}$$

$$S(\triangle ABCD) = S(\triangle ACE) = \frac{42\sqrt{51}}{125 \cdot 5} \cdot a^2$$

Ответ:

$$\frac{42\sqrt{51}}{625} \cdot a^2$$

Устная работа

Проверка д/з

Решение задач

Д/з

Спасибо за внимание

Выход