

Построение сечения куба, нахождение его координат и площади

***Ларионова Н.Е.
учитель математики МАОУ ЛМИ
г. Саратов***

ЗАДАЧА

по нахождению сечения куба,
его координат и площади

- **Задача №1**

**Построить сечение куба,
проходящего через точки P, Q, R,
найти координаты точек сечения и
площадь сечения,
если P-середина BB_1 ,
Q-середина B_1C_1 ,
 $R=D$.**

Дано:

Куб $ABCD A' B' C' D'$

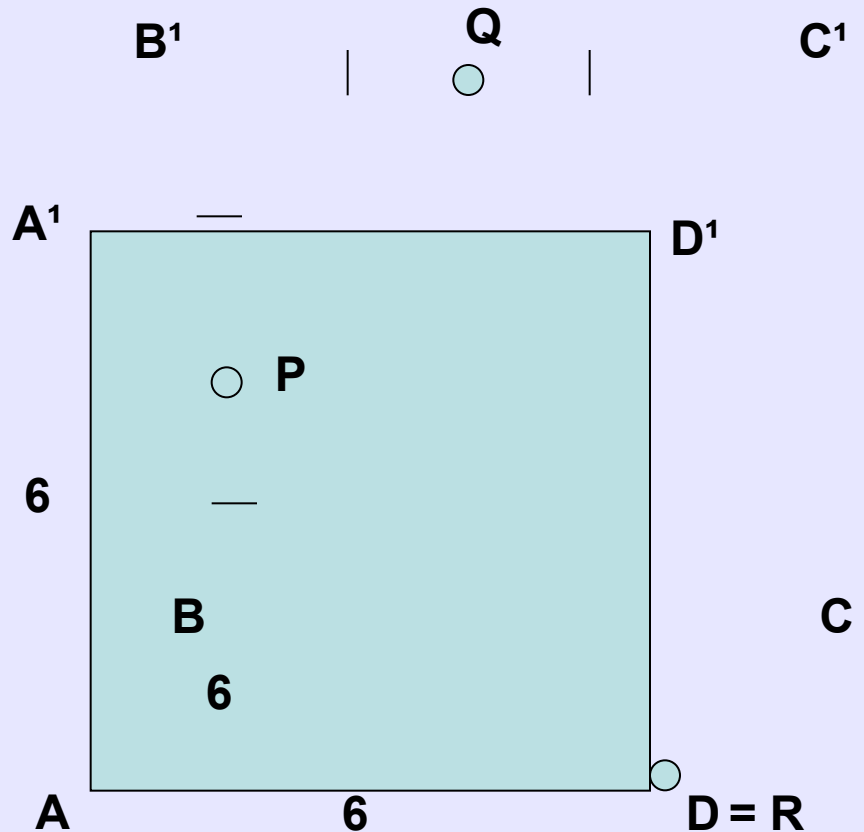
P – середина BB'

Q – середина $B' C'$

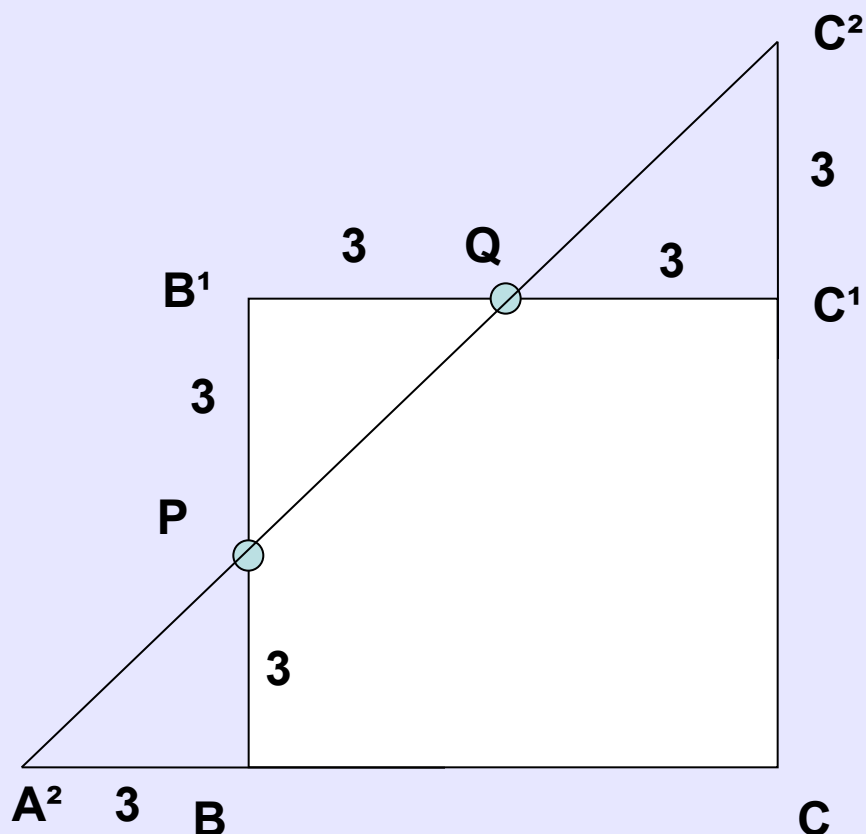
$R = D$

$AB = AA' = AD = 6$

Построить сечение куба, проходящего через точки P , Q , R , найти координаты точек сечения и площадь сечения.



Рассмотрим заднюю плоскость **ВВ¹СС¹**



Решение

$$BB^1 = B^1C^1 = 6 \text{ (по условию)}$$

$B^1P = PB = 3$ (P середина BB^1)

$$B^1Q = QC^1 = 3 \text{ (Q середина } B^1C)$$

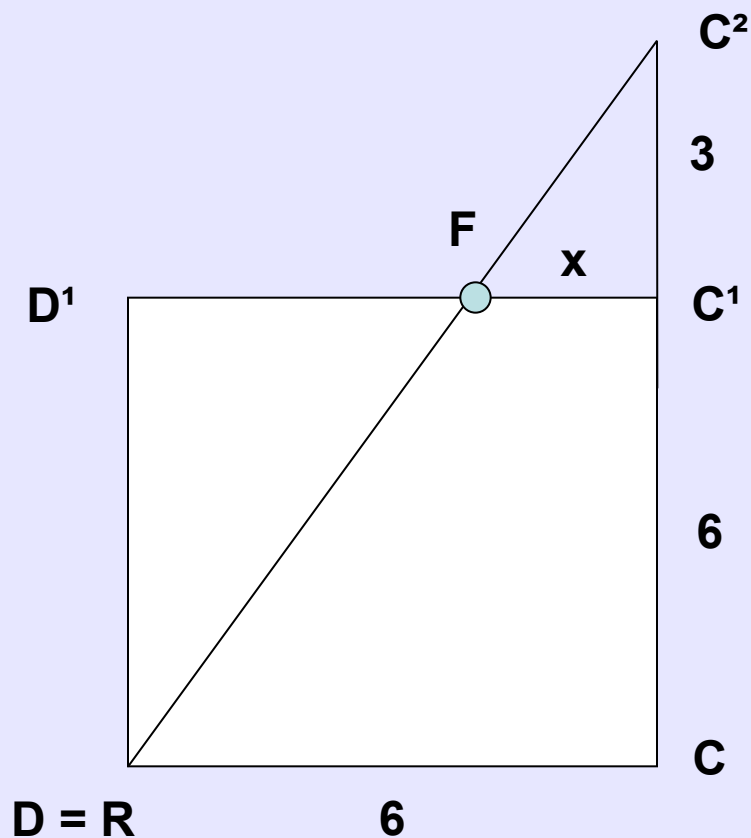
Продлим ВС и СС¹. Соединим точки Р и Q. $PQ \cap BC = A^2$ $PQ \cap CC^1 = C^2$

Рассмотрим $\triangle B^1PQ$.

$\angle B'PQ = \angle B'QP = 45^\circ$ (т.к. $\triangle B'PQ$ – равнобедренный ($B'P = B'Q$))

Рассмотрим $\triangle B'PQ$ и $\triangle C'QC^2$
 $\triangle B'PQ = \triangle C'QC^2$ (по 2-ум сторонам и
 углу между ними) $\Rightarrow C'C^2 = B'P = 3$

Рассмотрим боковую плоскость DD^1CC^1



Решение

$DC = CC^1 = 6$ (по условию).
Продлим CC^1 , так чтобы $C^1C^2 = 3$

Пусть $FC^1 = x$

Рассмотрим $\triangle DC^2C$ и $\triangle FC^2C^1$

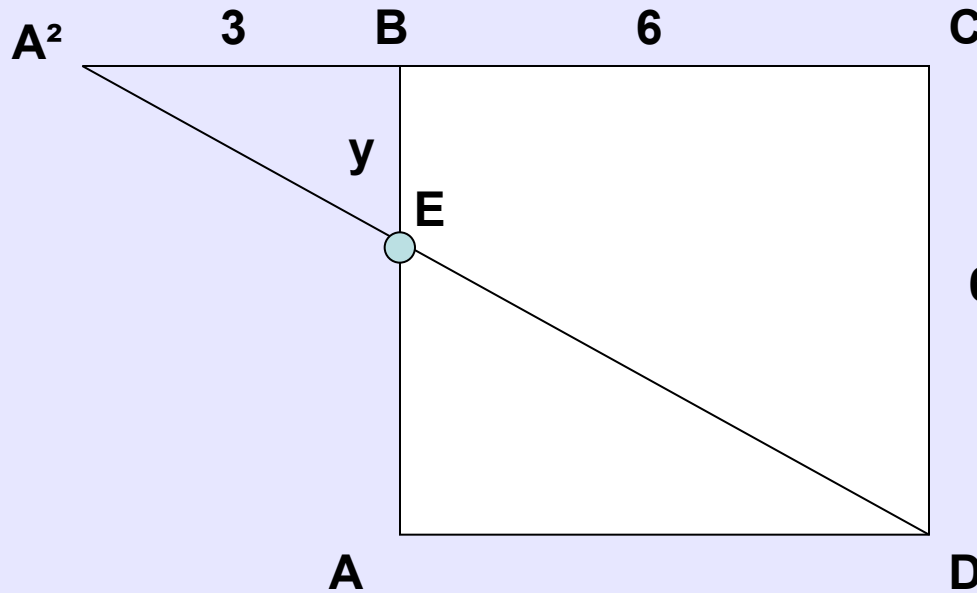
$DC^2C \sim \triangle FC^2C^1$ (по 2-ум
сторонам и углу между ними)

$$\frac{CC^2}{C^1C^2} = \frac{DC}{FC^1} \Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 2$$

$FC^1 = 2$, а $FD^1 = 4$

Рассмотрим нижнюю плоскость **ABCD**

Решение



BC = CD = 6 (по условию)
Продлим CB, так чтобы A²B = 3

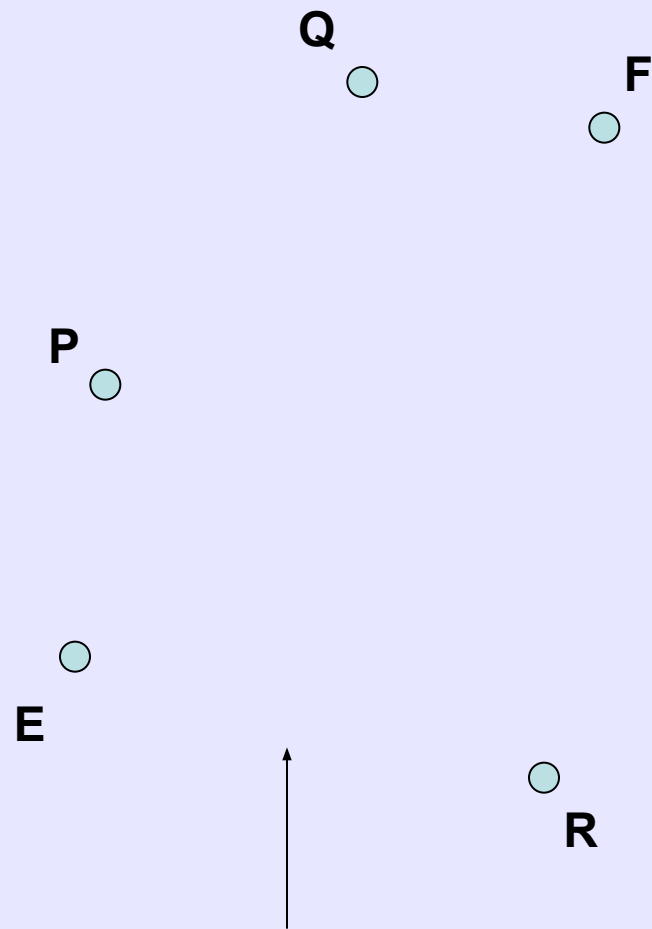
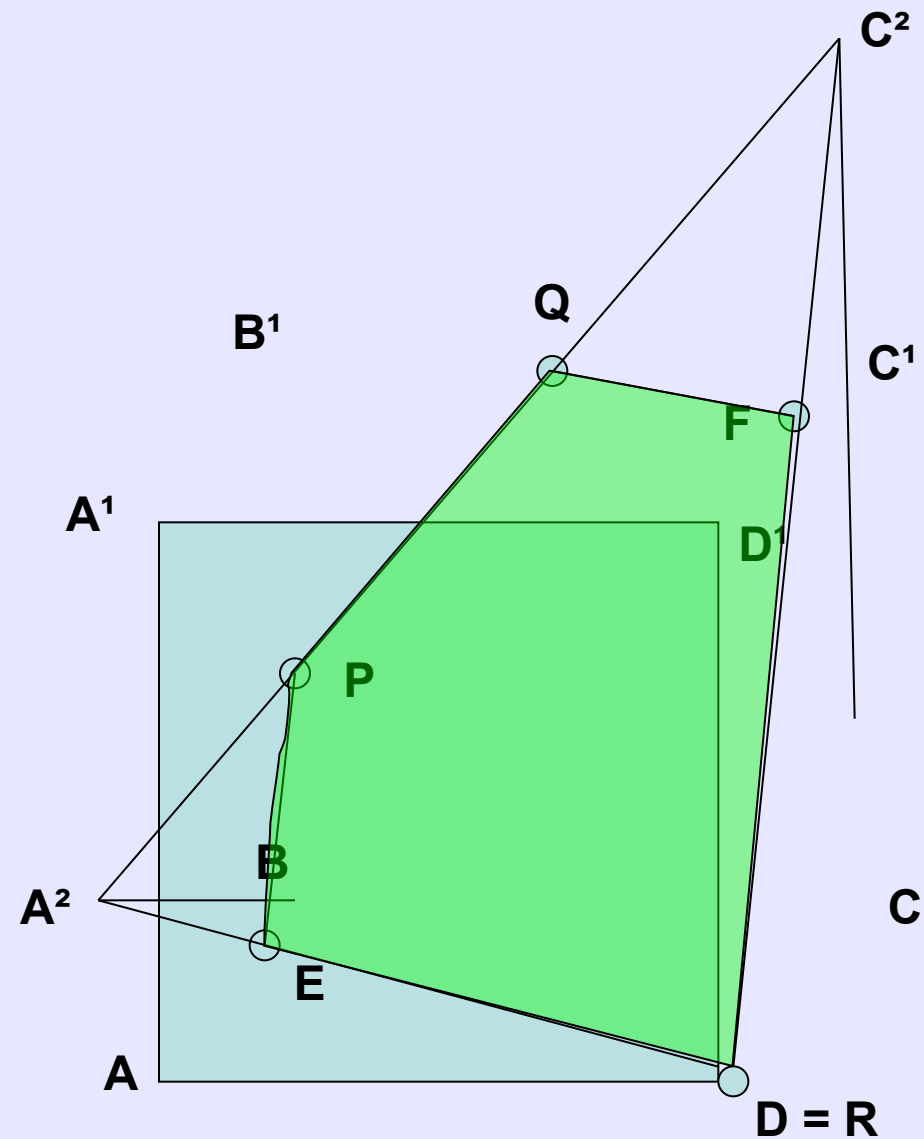
Пусть BE = y

6 Рассмотрим $\triangle A^2BE$ и $\triangle A^2CD$
 $\triangle A^2BE \sim \triangle A^2CD$ (по 2-ум
сторонам и углу между ними)

$$\frac{A^2B}{A^2C} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 2$$

BE = 2, а AE = 4

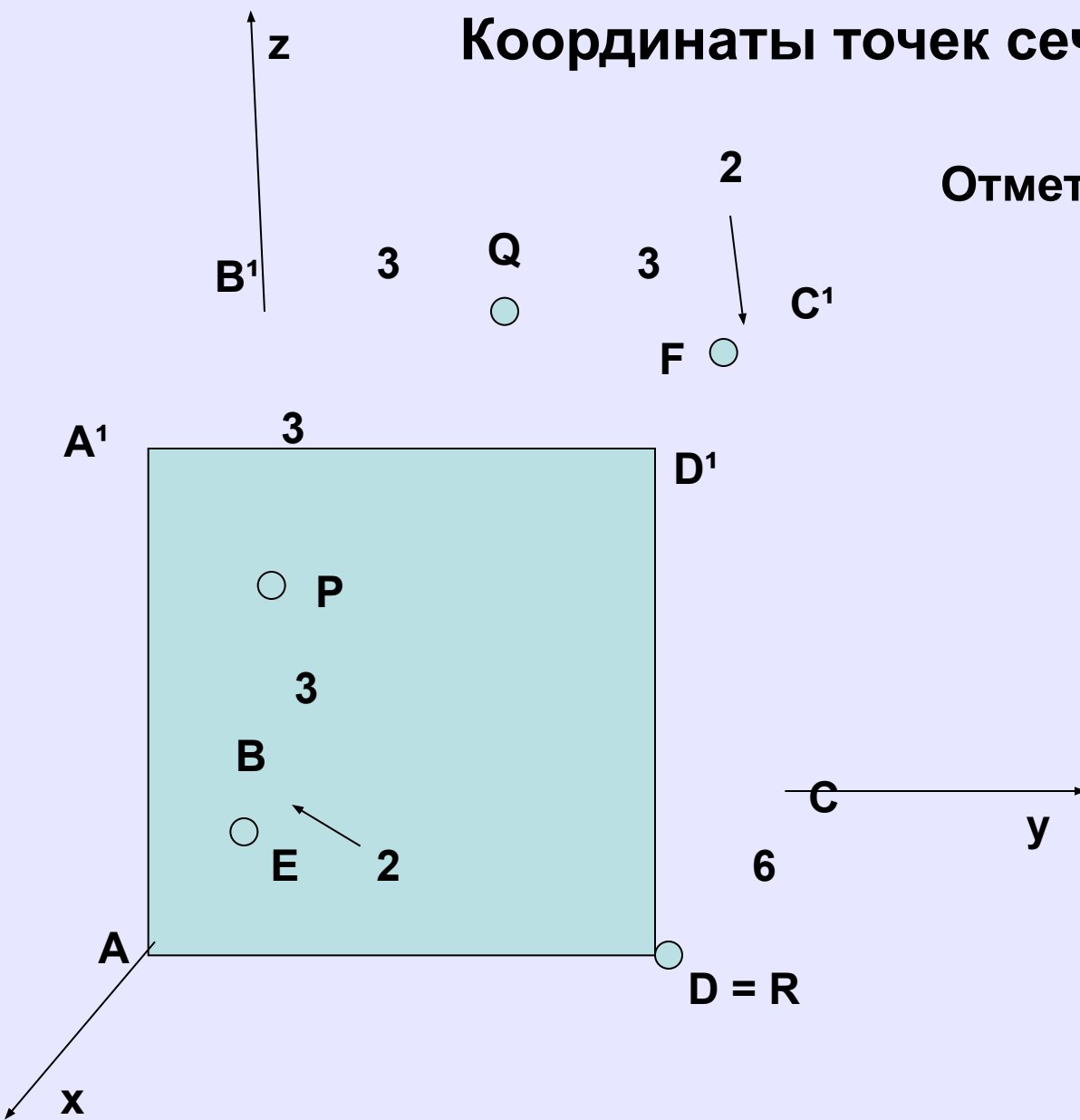
Сечение куба, проходящей через точки P, Q, R



Сечение куба (PQFRE)

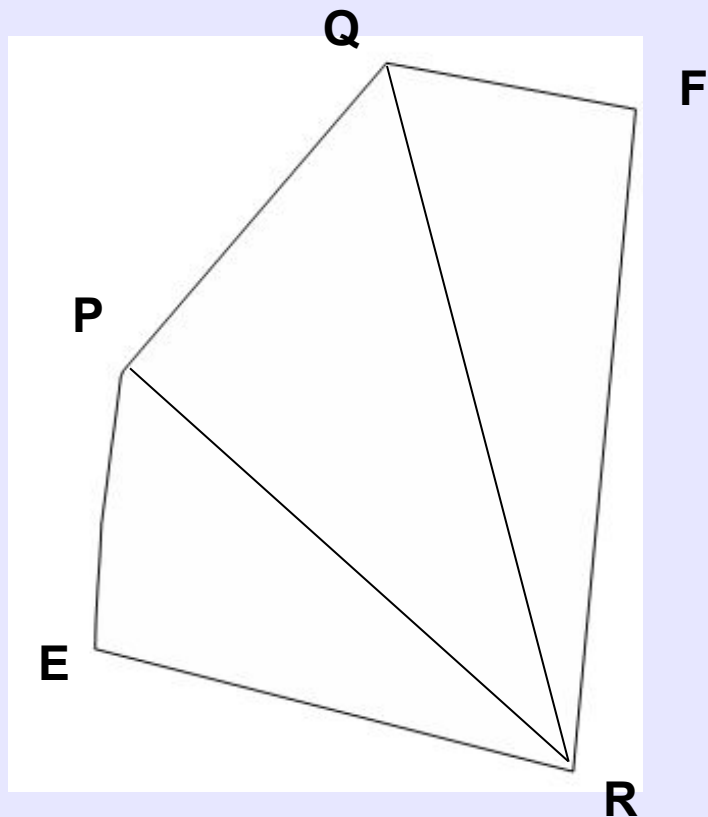
Координаты точек сечения куба

Отметим оси координат x, y, z



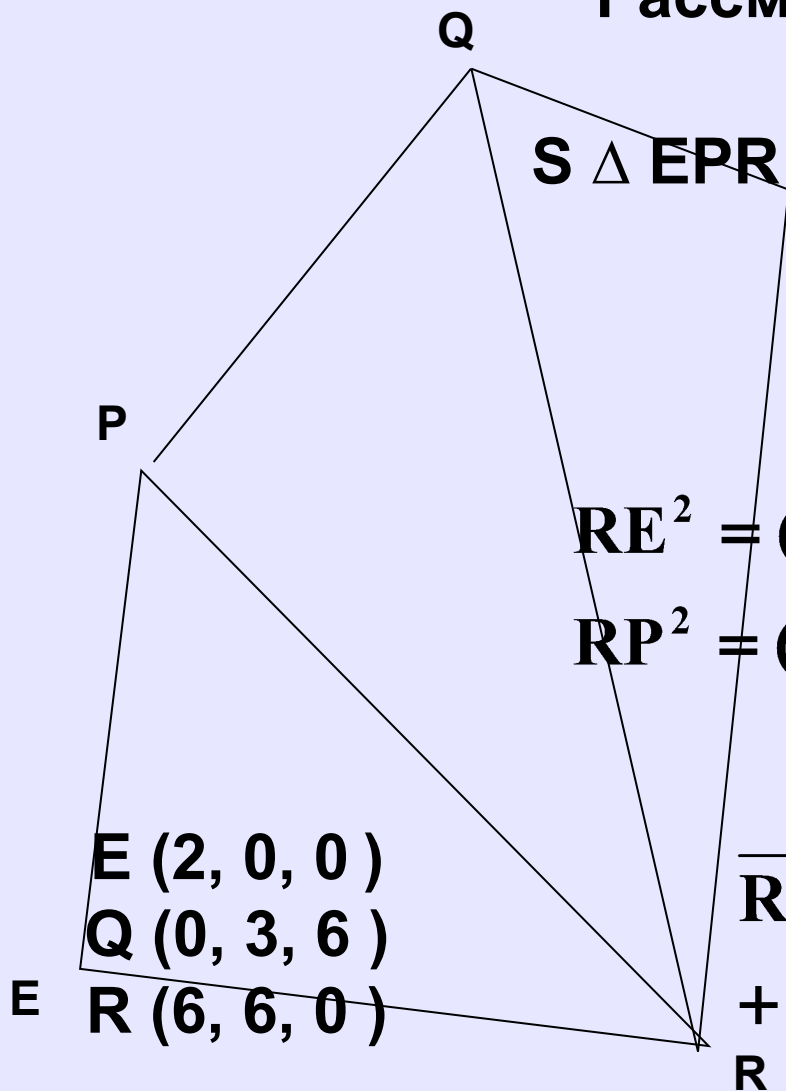
x	y	z
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
P	$(0, 0, 3)$	
Q	$(0, 3, 6)$	
F	$(2, 6, 6)$	
R	$(6, 6, 0)$	
E	$(2, 0, 0)$	

Нахождение площади сечения куба



Разобьём плоскость сечения куба на три треугольника, чтобы подсчитать площадь всего сечения куба.

Рассмотрим $\triangle EPR$



$$S_{\triangle EPR} \neq \frac{1}{2} \sqrt{RE^2 * RP^2 - (\overline{RE} * \overline{RP})^2}$$

$$\overline{RE} = (-4, -6, 0)$$

$$\overline{RP} = (-6, -6, 3)$$

$$RE^2 = (-4)^2 + (-6)^2 + (0)^2 = 16 + 36 + 0 = 52$$

$$RP^2 = (-6)^2 + (-6)^2 + (3)^2 = 36 + 36 + 9 = 81$$

$$\begin{aligned} \overline{RE} * \overline{RP} &= ((-4) * (-6)) + ((-6) * (-6)) + \\ &+ ((0) * (3)) = 24 + 36 + 0 = 60 \end{aligned}$$

$$S_{\triangle EPR} = \frac{1}{2} \sqrt{52 * 81 - (60)^2} = \frac{\sqrt{612}}{2} = \sqrt{153}$$

Рассмотрим $\triangle QPR$

Q

$$S_{\triangle QPR} = \frac{1}{2} \sqrt{RQ^2 * RP^2 - (\overline{RQ} * \overline{RP})^2}$$

$$\overline{RQ} = (-6, -3, 6)$$

$$\overline{RP} = (-6, -6, 3)$$

$$RQ^2 = (-6)^2 + (-3)^2 + (6)^2 = 36 + 9 + 36 = 81$$

$$RP^2 = (-6)^2 + (-6)^2 + (3)^2 = 36 + 36 + 9 = 81$$

$$\begin{aligned} \overline{RQ} * \overline{RP} &= ((-6) * (-6)) + ((-3) * (-6)) + \\ &+ ((6) * (3)) = 36 + 18 + 18 = 72 \end{aligned}$$

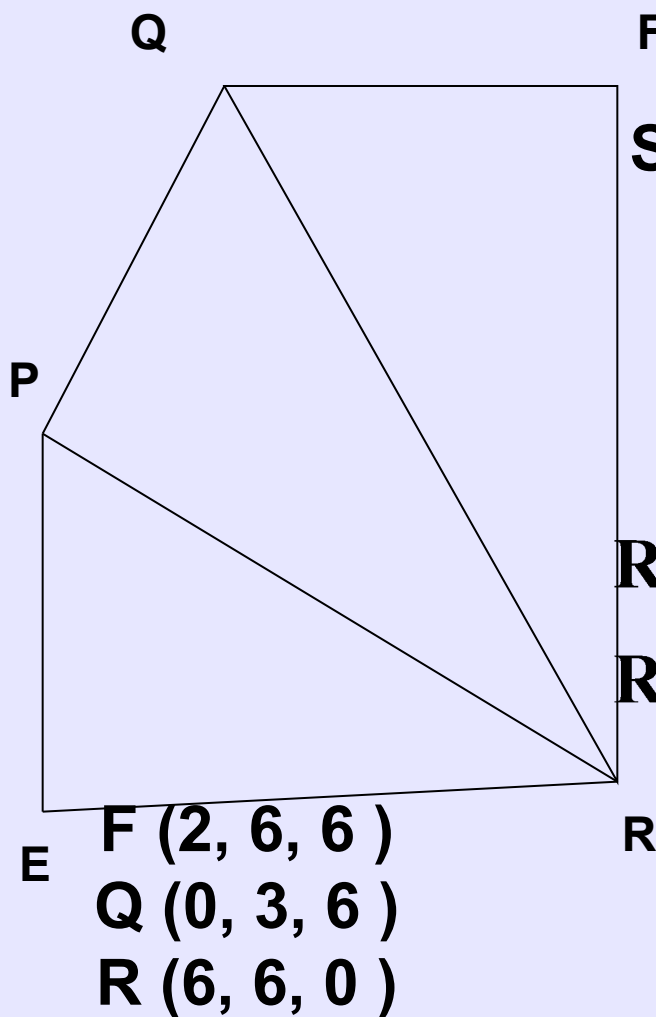
$$S_{\triangle QPR} = \frac{1}{2} \sqrt{81 * 81 - (72)^2} = \frac{\sqrt{1377}}{2} = \frac{3\sqrt{153}}{2}$$

E

$$\begin{aligned} P &(0, 0, 3) \\ Q &(0, 3, 6) \\ R &(6, 6, 0) \end{aligned}$$

P

E



F Рассмотрим $\triangle FQR$

$$S_{\triangle FQR} = \frac{1}{2} \sqrt{RQ^2 * RF^2 - (\overline{RQ} * \overline{RF})^2}$$

$$\overline{RQ} = (-6, -3, 6)$$

$$\overline{RF} = (-4, 0, 6)$$

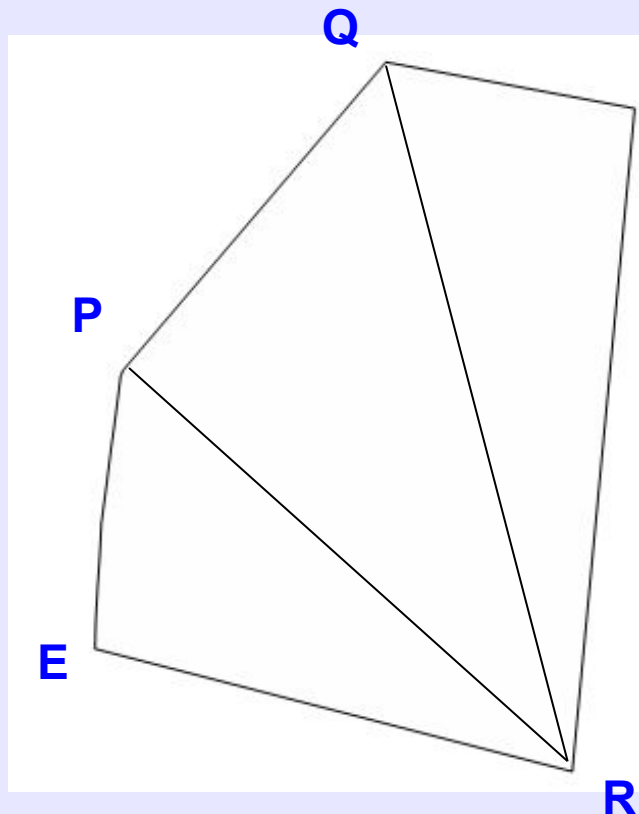
$$RQ^2 = (-6)^2 + (-3)^2 + (6)^2 = 36 + 9 + 36 = 81$$

$$RF^2 = (-4)^2 + (0)^2 + (6)^2 = 16 + 0 + 36 = 52$$

$$\begin{aligned} \overline{RQ} * \overline{RF} &= ((-6) * (-4)) + ((-3) * (0)) + \\ &+ ((6) * (6)) = 24 + 0 + 36 = 60 \end{aligned}$$

$$S_{\triangle FQR} = \frac{1}{2} \sqrt{81 * 52 - (60)^2} = \frac{\sqrt{612}}{2} = \sqrt{153}$$

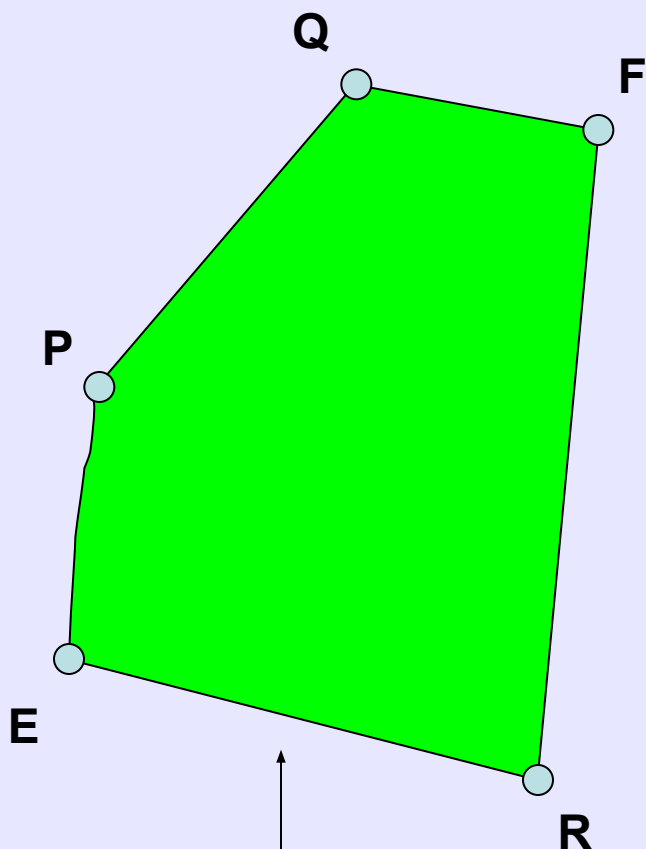
Нахождение площади сечения куба



$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = \Delta QPR + \\ + \Delta QPR + \Delta FQR$$

$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = \sqrt{153} + \\ + \frac{3\sqrt{153}}{2} + \sqrt{153} = \\ = (7\sqrt{153})/2 = (21\sqrt{17})/2$$

$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = (21\sqrt{17})/2$$



Сечение куба (PQFRE)

P (0, 0, 3)

Q (0, 3, 6)

F (2, 6, 6)

R (6, 6, 0)

E (2, 0, 0)

Координаты точек
сечения куба

Площадь
сечения куба

$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = (21\sqrt{17}) / 2$$

- **Задача №2**

**Построить сечение куба,
проходящего через точки P, Q, R,
найти координаты точек сечения и
площадь сечения,**

если P-середина AA_1 ,

Q-середина A_1B_1 ,

R- середина AD .

Дано:

Куб $ABCD A' B' C' D'$

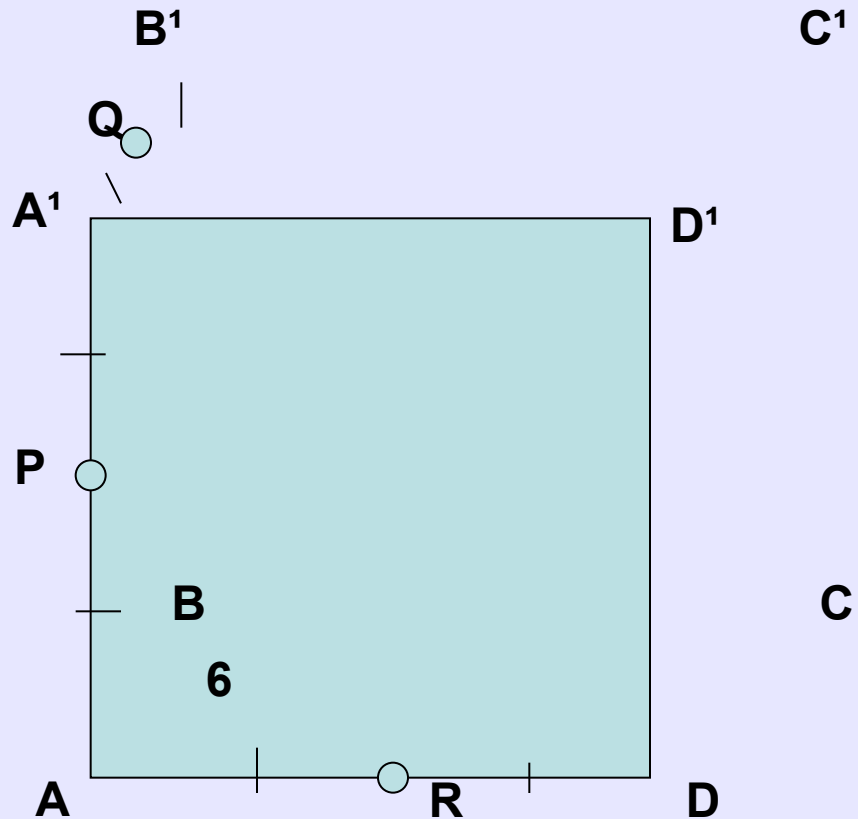
P – середина AA'

Q – середина $A'B'$

R – середина AD

$AB = AA' = AD = 6$

Построить сечение куба, проходящего через точки P, Q, R , найти координаты точек сечения и площадь сечения.



Координаты точек:

P(6;0;3)

Q(3;0;6)

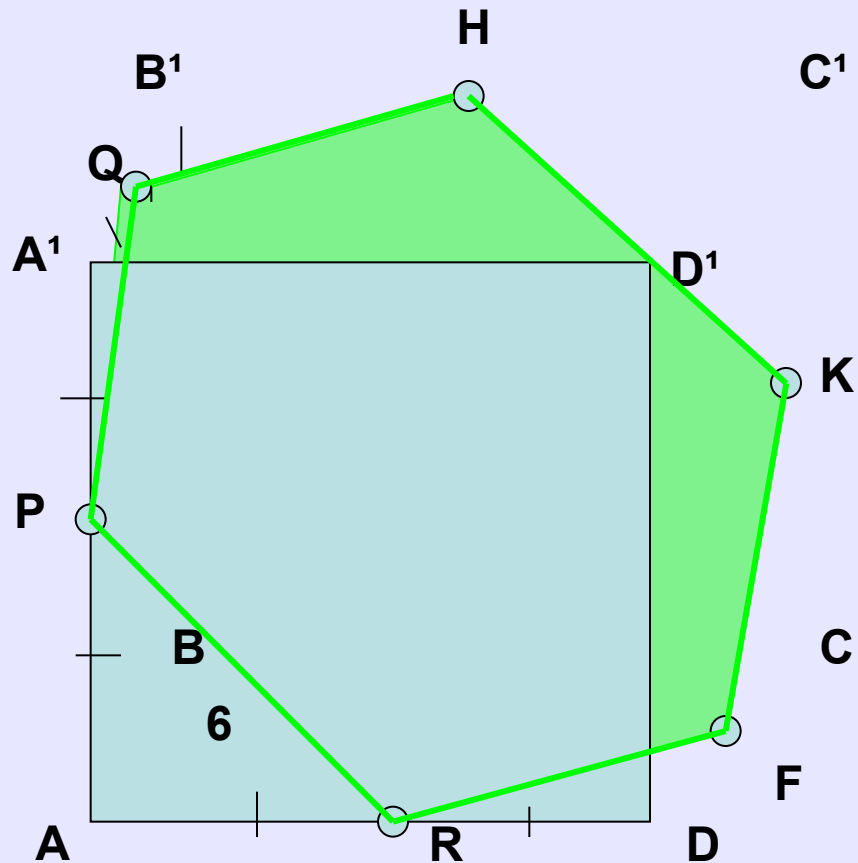
H(0;3;6)

K(0;6;3)

F(3;6;0)

R(6;3;0)

$$S_{PQHKFR} = 27\sqrt{3}$$



- **Задача №3**

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения, если P принадлежит AA₁,

AP=2,

Q принадлежит A₁D₁,

D₁Q=2,

R=B.

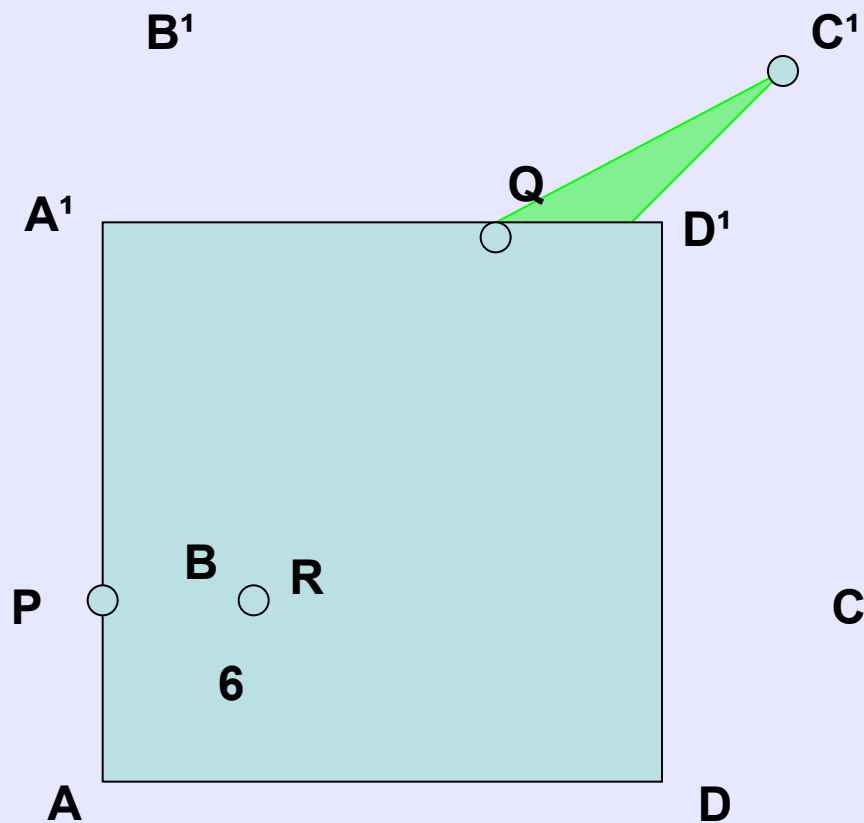
Координаты точек:

$P(6;0;2)$

$Q(6;4;6)$

$R(0;0;0)$

$C_1(0;6;6)$



- **Задача №4**

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения, если P принадлежит AA_1 ,

$AP=2$,

Q –середина B_1C_1 ,

R принадлежит DD_1 ,

$D_1R=2$.

Координаты точек:

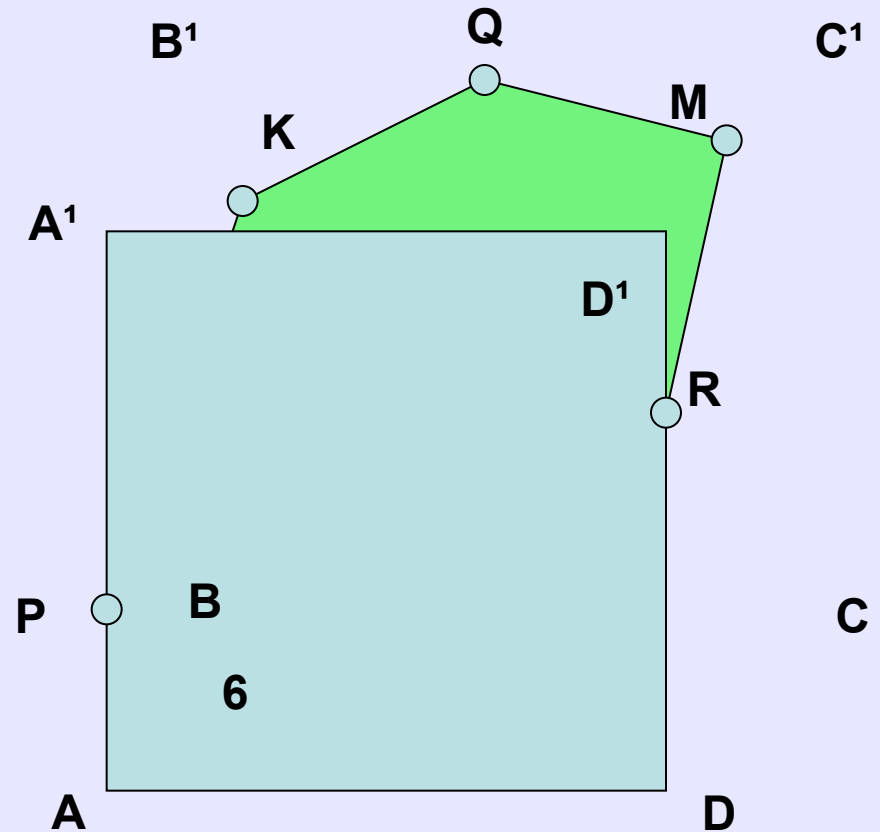
$Q(0;3;6)$

$K(0;0;5)$

$P(6;0;2)$

$R(6;6;4)$

$M(2;6;6)$



- **Задача №4**

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения,

если P принадлежит BB_1 ,

$BP=2$,

Q –середина CC_1 ,

$C_1Q=2$,

R принадлежит DD_1 ,

$D_1R=2$.

Координаты точек:

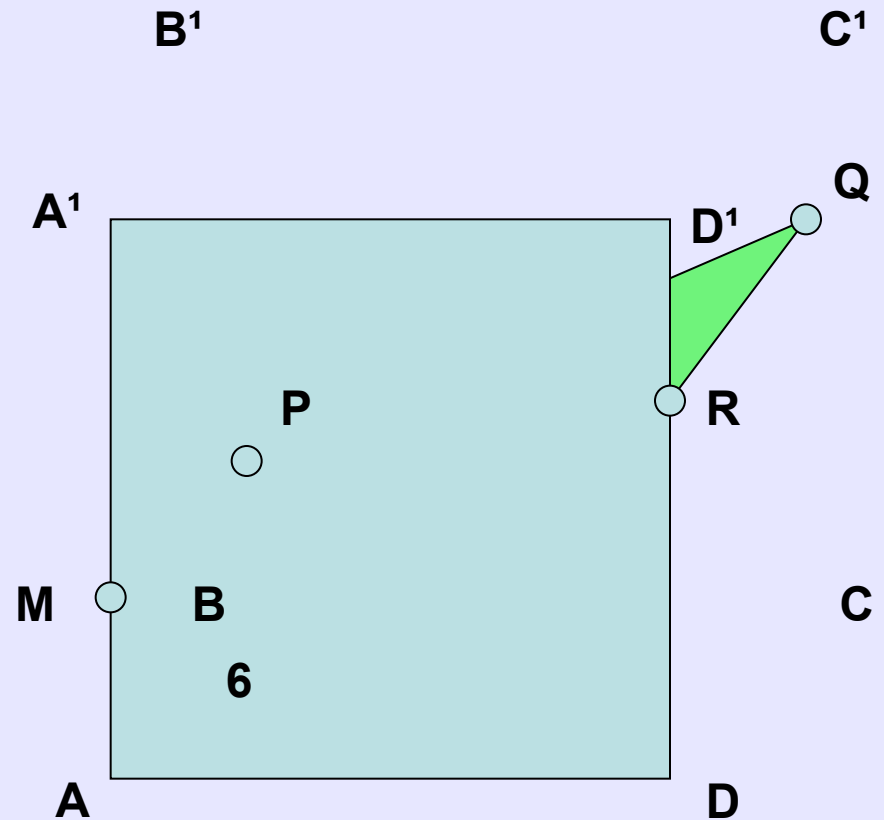
$P(0;0;2)$

$Q(0;6;4)$

$R(6;6;4)$

$M(6;0;2)$

$$S_{PQRM} = 12\sqrt{10}$$



Задачи для самостоятельного решения:

- Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P , Q , R , найти координаты точек сечения и площадь сечения, если:

1. P принадлежит CC_1 , $C_1P=2$,

Q - середина AD , R -середина A_1B_1 .

2. P принадлежит CC_1 , $C_1P=1$,

Q - середина AD , R -середина AA_1 .

3. P принадлежит $DD_1, D_1P=1$,
Q- середина AD, R -середина AB .
4. P принадлежит $AA_1, A_1P=1$,
Q- середина D_1D, R принадлежит CC_1 ,
 $CR=1$.
5. P принадлежит $BB_1, BP=2$,
Q- середина C_1D_1, R -середина AA_1 .