

Площадь

Работу выполняла ученица 11«4» класса Степанова Аня



Основные свойства площадей.

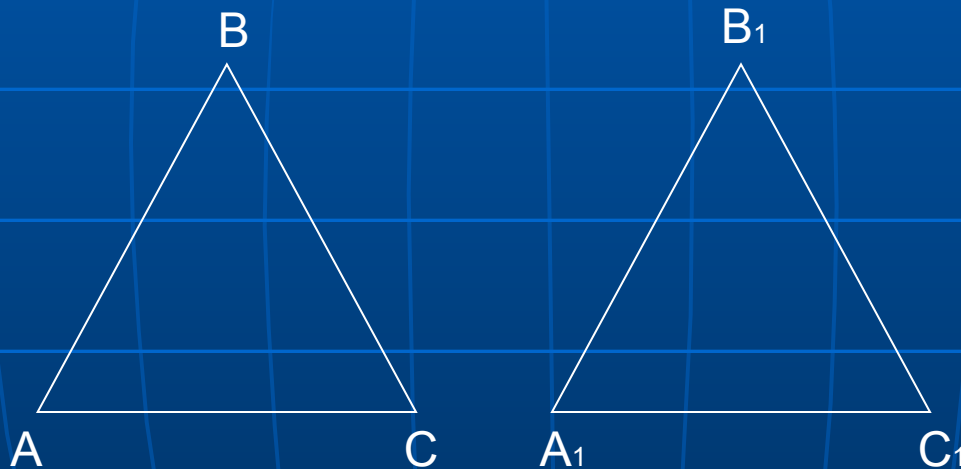
Первое свойство:

Площадь плоской фигуры – неотрицательное число.



Второе свойство:

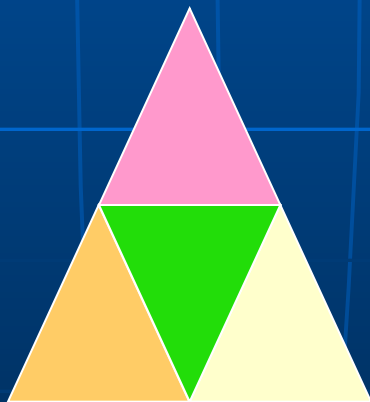
Площади равных фигур равны.



$$S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$$

Третье свойство:

Если фигура разрезана на несколько частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

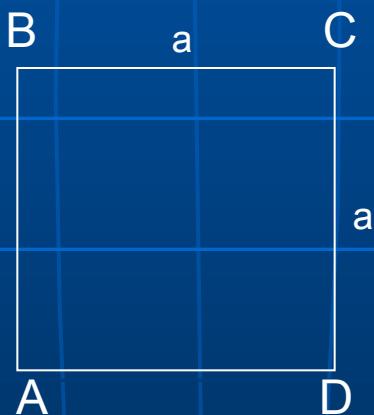


Четвертое свойство:

Площадь квадрата со стороной 1
равна 1.

$$a=1$$

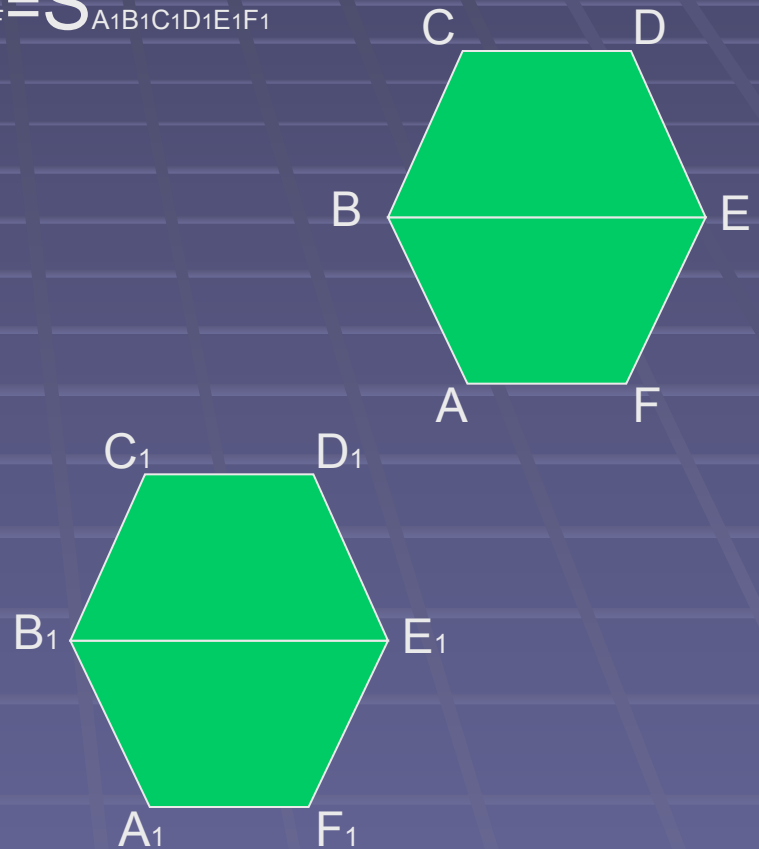
$$S_{ABCD} = a^2$$



Разрезания и складывания

- Основной принцип метода "разрезания и складывания" основан на том, что если два многоугольника удастся разбить на одинаковые части (такие многоугольники называют *равносоставленными*), то отсюда вытекает, что площади этих многоугольников равны (фигуры, площади которых равны, называются *равновеликими*).

$$S_{ABCDEF} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$$

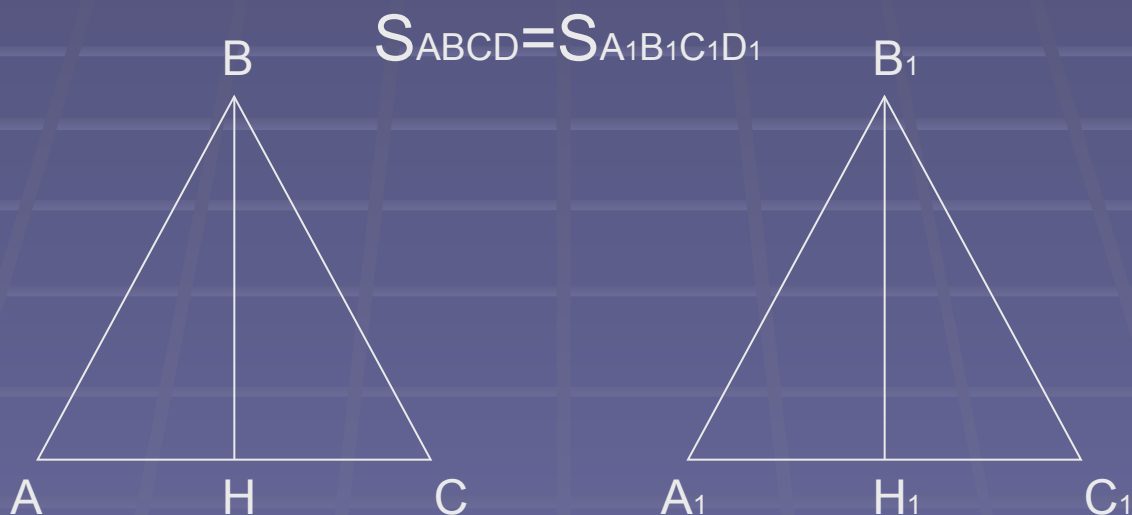


Теорема

- ◆ Если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых можно составить другой многоугольник.

Отношения площадей

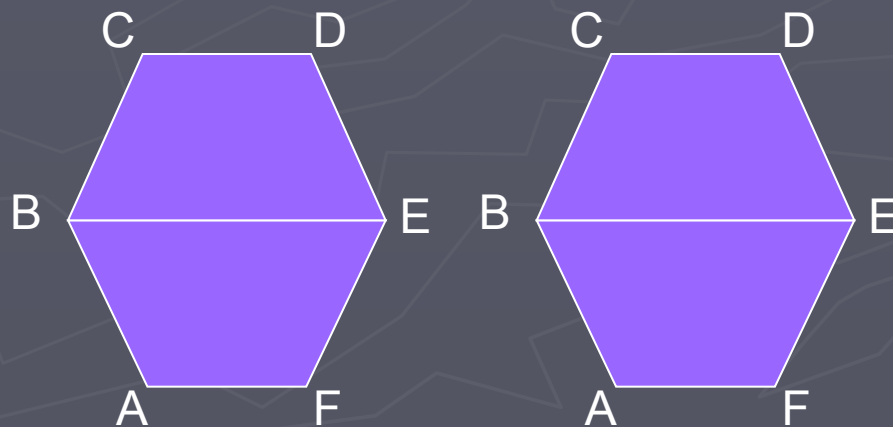
- для того, чтобы установить связь двух площадей, часто бывает удобно сравнивать площади двух треугольников, используя 5 свойство.



Площадь многоугольника

1. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
2. Равные многоугольники имеют равные площади.

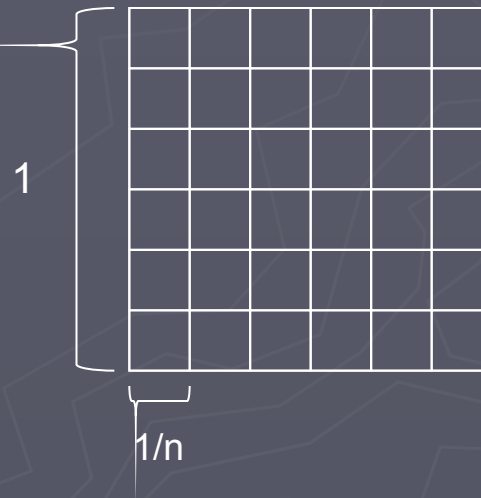
$$S_{ABCDEF} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$$



Площадь квадрата

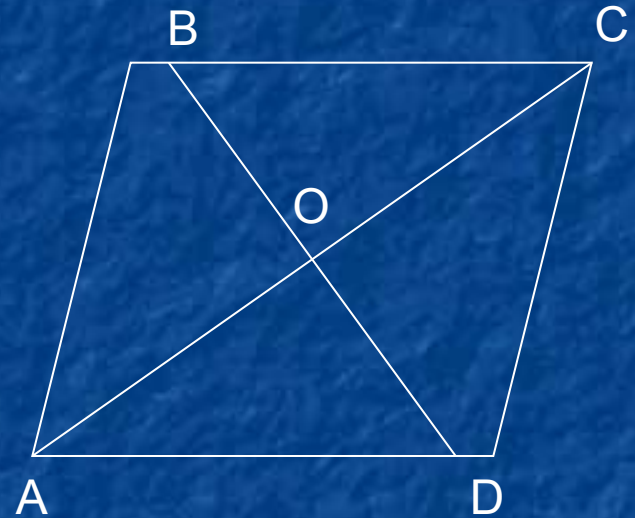
Рассмотрев 4 свойство, докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2 .

Начнем с того случая, когда $a=1/n$. Где n -целое число. Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на n^2 равных квадратов. Так как площадь большого квадрата равна 1 То площадь каждого маленького квадрата равна $1/n^2$



Задача

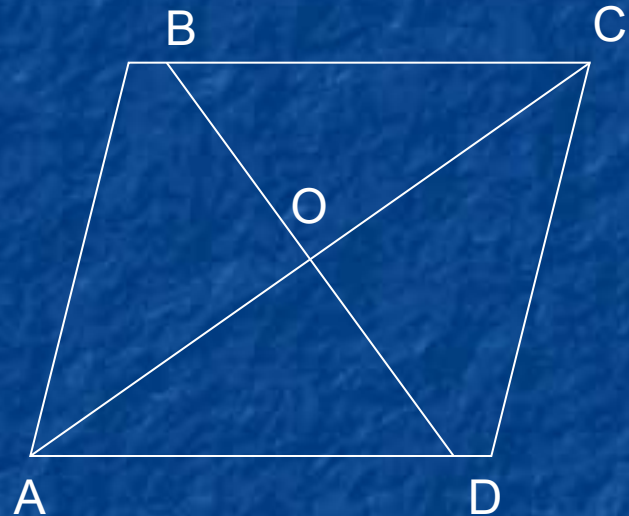
- Пусть O – точка пересечения отрезков AC и BD (рис. 4.2). Докажите, что для того, чтобы площади треугольников AOB и COD были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны.



Решение:

Для того, чтобы решить эту задачу, нужно доказать *два* утверждения:

1. Если прямые BC и AD параллельны, то площади треугольников AOB и COD равны;
2. Если площади треугольников AOB и COD равны, то прямые BC и AD параллельны.



$$S_{AOB} = S_{COD} \rightarrow BC \parallel AD$$

Площадь прямоугольника.

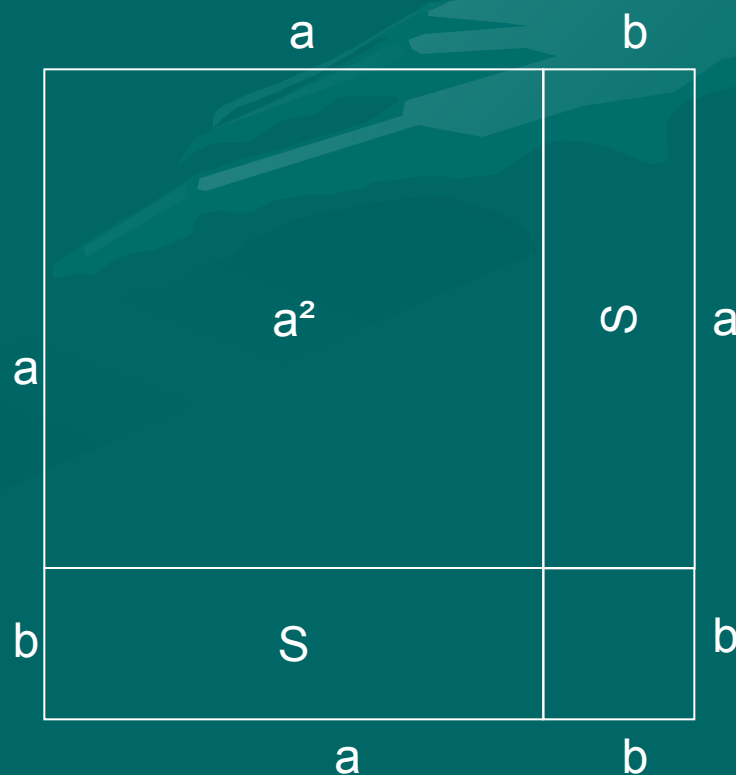
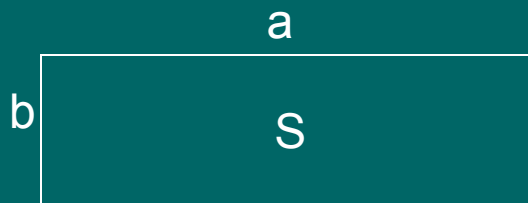
Теорема:

Площадь прямоугольника равна
произведению его смежных сторон.



Доказательство теоремы:

- Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a+b$, площадь этого квадрата равна $(a+b)^2$.
- Рассмотрим прямоугольник со сторонами a , b и площадью S . Докажем, что $S=ab$.



решение

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S , равного ему прямоугольника с площадью S и двух квадратов с площадями a^2 и b^2 . Имеем:

$$(a+b)^2 = S + S + a^2 + b^2$$

Отсюда получаем $S = ab$.

Теорема доказана.

Площадь параллелограмма.

Теорема:

Площадь параллелограмма равна
произведению его основания на высоту.

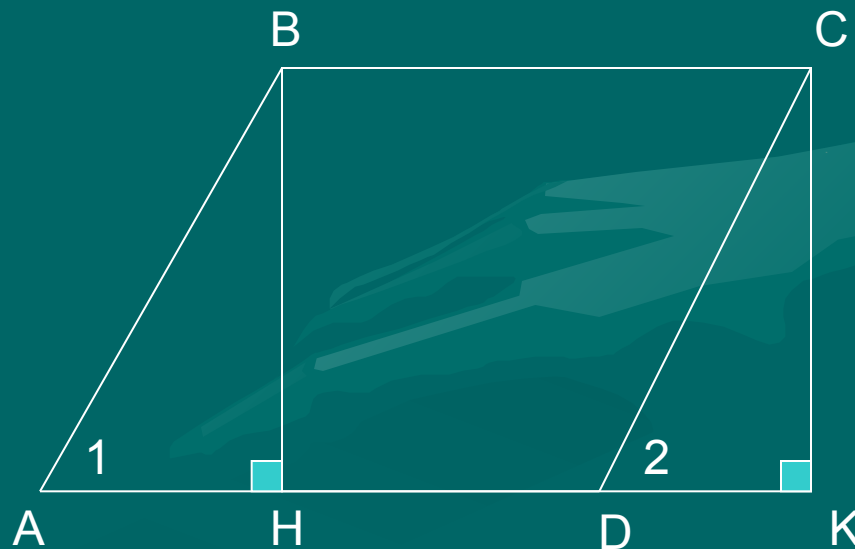


Доказательство:

Рассмотрим
параллелограмм $ABCD$
с площадью S . Примем
сторону AD за
основание и проведем
высоту BH и CK .

Требуется доказать, что

$$S = AD \cdot BH$$



Докажем сначала, что площадь прямоугольника $HBSK$ также равна S . Трапеция $ABSK$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DSK . С другой стороны, она составлена из прямоугольников $HBSK$ и треугольник ABH . Но прямоугольные треугольники DSK и ABH равны по гипотенузе и остр. углу ($AB=CD$, углы $1=2$), поэтому их площади равны. Следовательно, площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBSK$ также равны, т. е. площадь прямоугольника $HBSK$ равна S . По теореме о площади прямоугольника $S=BS \cdot BH$, а так как $BS=AD$, то $S=AD \cdot BH$. Теорема доказана.

Площадь треугольника.

Теорема:

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

Доказательство:

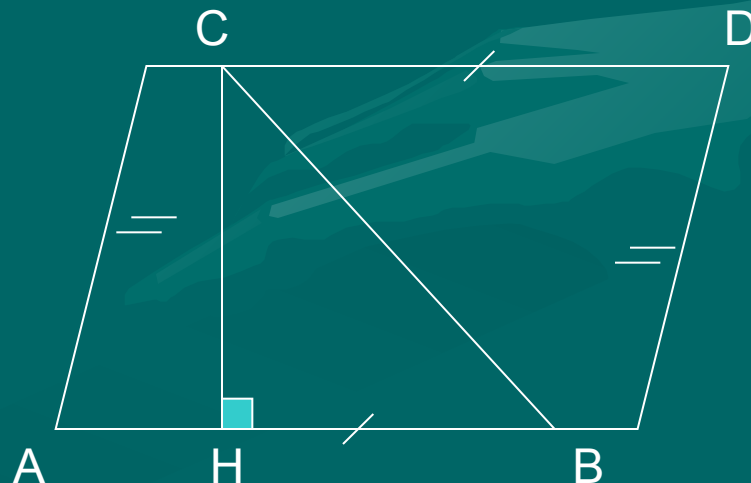
Пусть S – площадь треугольника ABC . Примем сторону AB за основание и проведем высоту CH . Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$.

Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам (BC – их общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь

S треугольника ABC равны половине площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$. Теорема доказана.



Следствие 1:

Площадь прямоугольного
треугольника равна половине
произведения его катетов.

Следствие 2:

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Воспользовавшись этим следствием докажем теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Теорема:

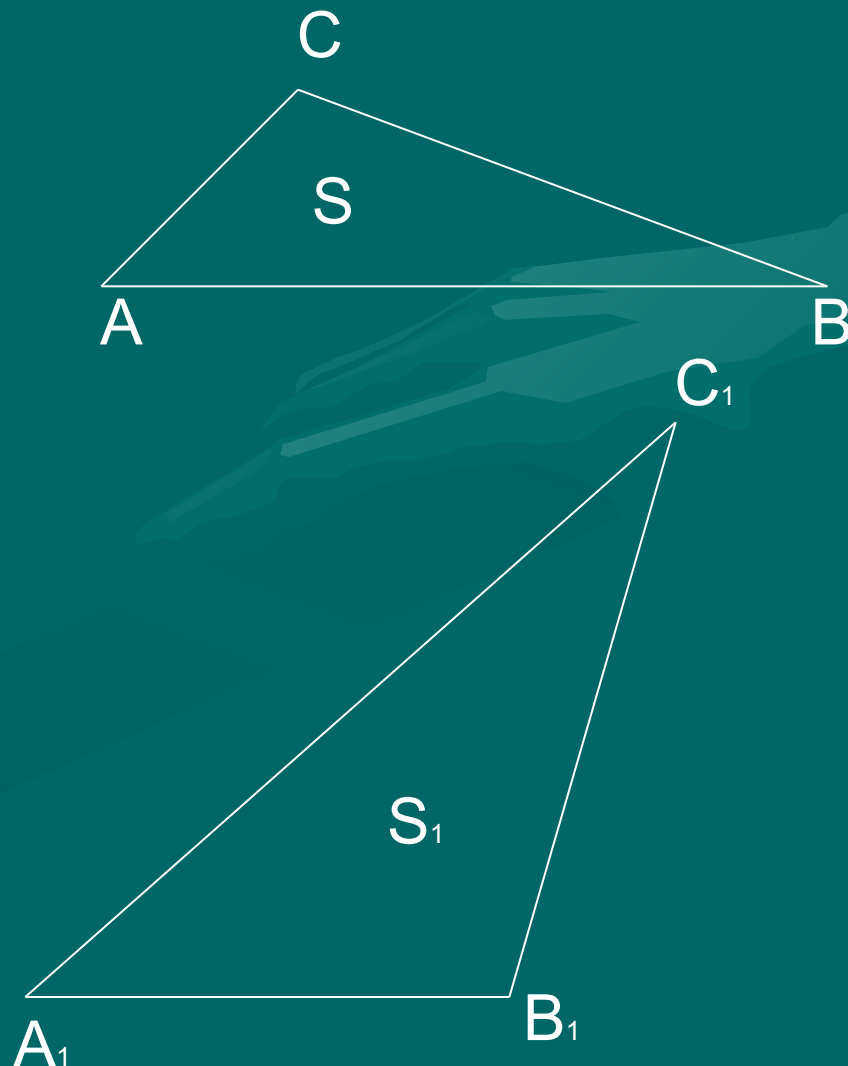
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Доказательство:

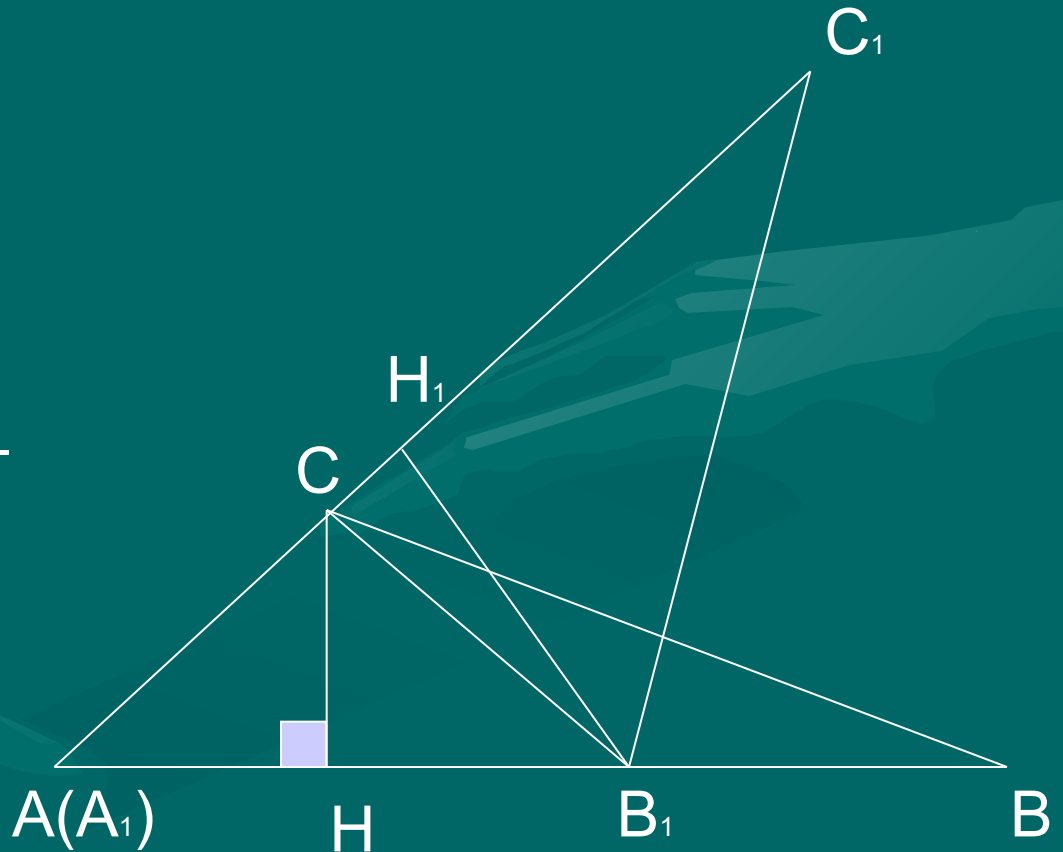
Пусть S и S_1 — площади
треугольников ABC и
 $A_1B_1C_1$, у которых
углы $A=A_1$.

Докажем, что

$$S/S_1 = AB/A_1B_1 \cdot AC/A_1C_1$$

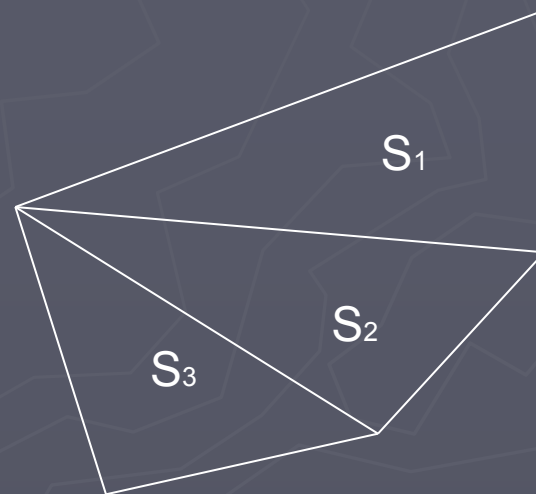


Наложим треугольники ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1 , а стороны AB и AC наложились соответственно на лучи AB_1 и AC_1 . Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую высоту CH , поэтому $S/S_{A_1B_1C_1} = AB/AB_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ также имеют общую высоту – B_1H_1 , поэтому $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = AC/AC_1$. Перемножаем полученные равенства. Теорема доказана.



Площадь трапеции.

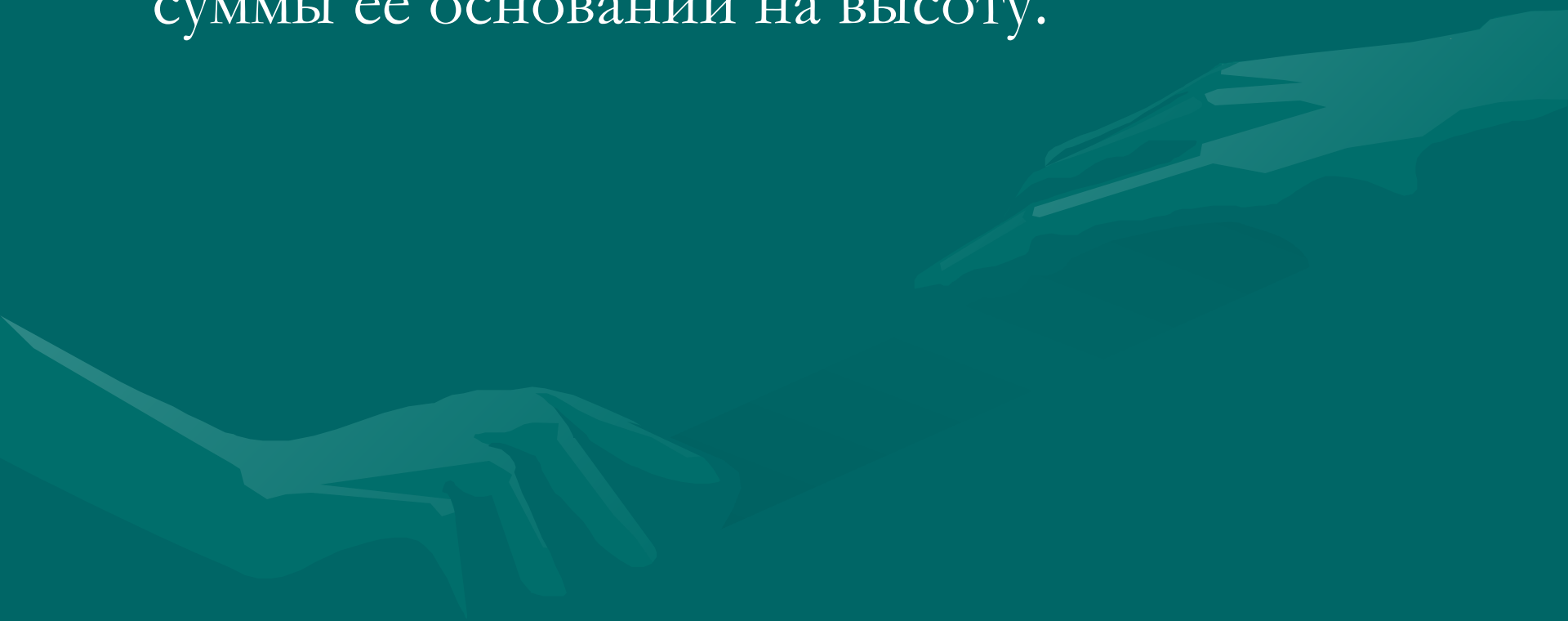
Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника.



$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

Теорема:

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.



Доказательство:

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основанием AD и BC , высотой BH и площадью S . Докажем, что $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$.

Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD и BCD , поэтому $S = S_{ABD} + S_{BCD}$.

Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD , а отрезки BC и DH_1 за основания и высоту треугольника BCD . Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH, S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DH_1.$$

Так как $DH_1 = BH$, то

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH. \text{ Таким образом, } S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Теорема доказана.

