

Площадь криволинейной трапеции

Определение производной:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Найти производную функции по определению:

$$y = -2x + x^2 \text{ в точке } x_0$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 + 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -2 + 2x_0, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Вставьте вместо *

$$1) 3x = \left(\frac{3}{2} *^2 \right)'$$

$$3) 3 \cos 3x = (\sin 3 *)'$$

$$2) \sin 5x = \left(* \frac{1}{5} \cos 5x \right)'$$

$$4) \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{*}{x} \right)'$$

Определение первообразной:

$F(x)$ первообразная для $f(x)$,

если $F'(x) = f(x)$

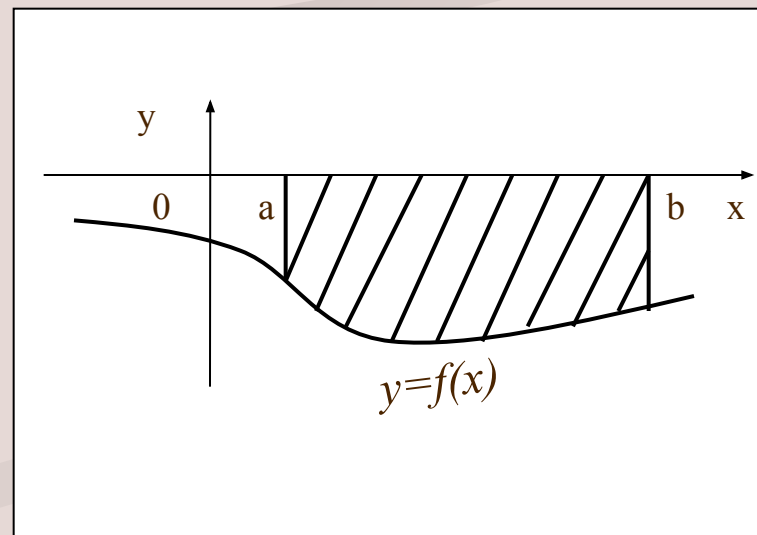
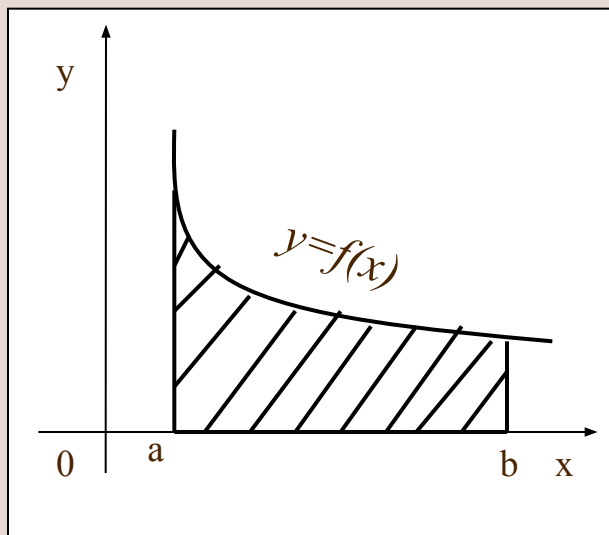
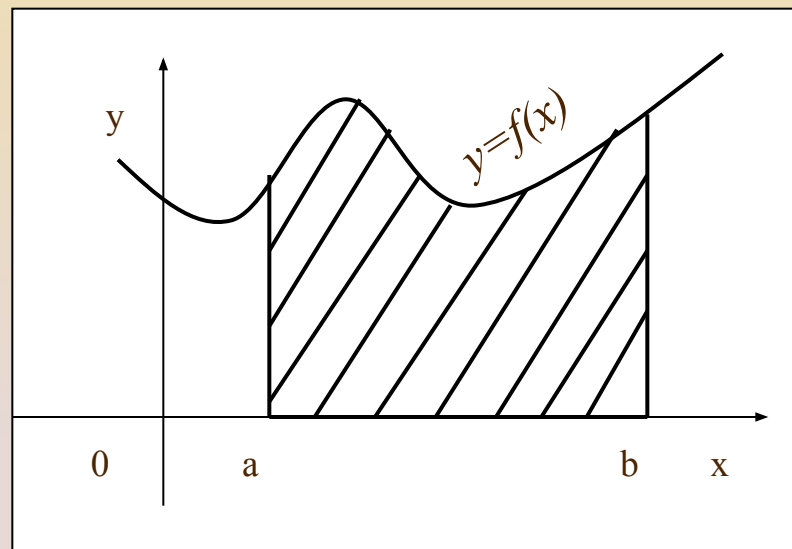
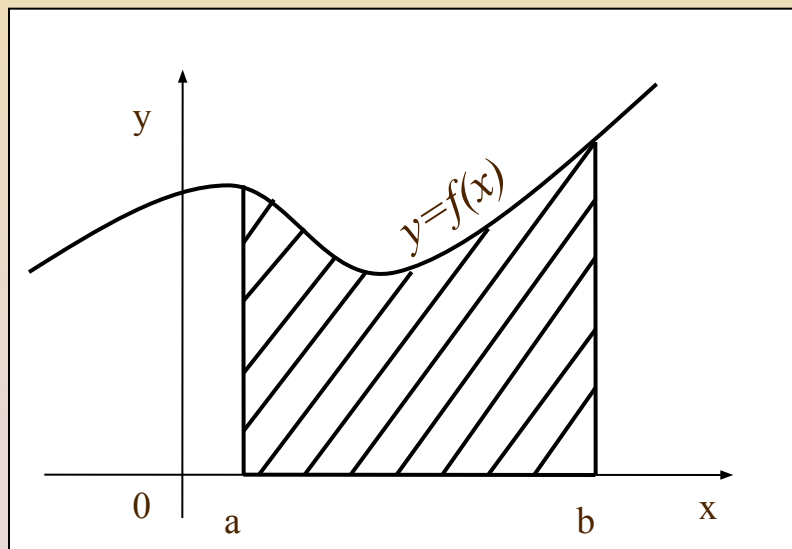
Будут ли первообразными следующие функции

$$1) y = \frac{x^3}{3} + 5 - x^2; \quad 2) y = \frac{x^3}{3} - 10 - x^2;$$

$$3) y = 7 - \frac{x^3}{3}; \quad 4) y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 25.$$

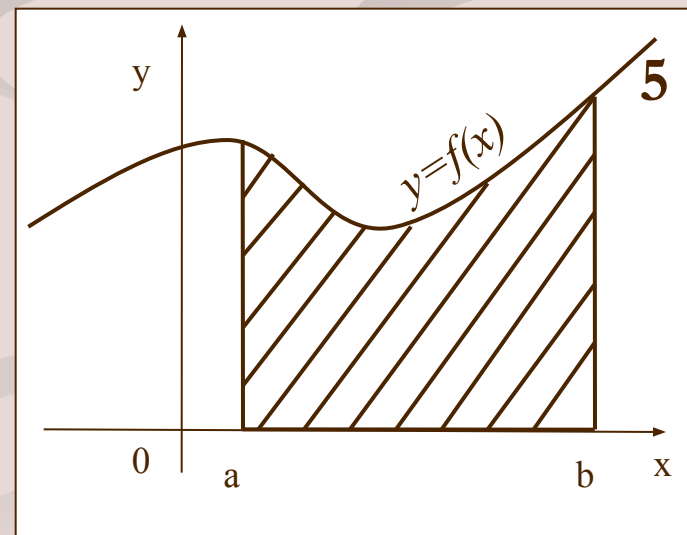
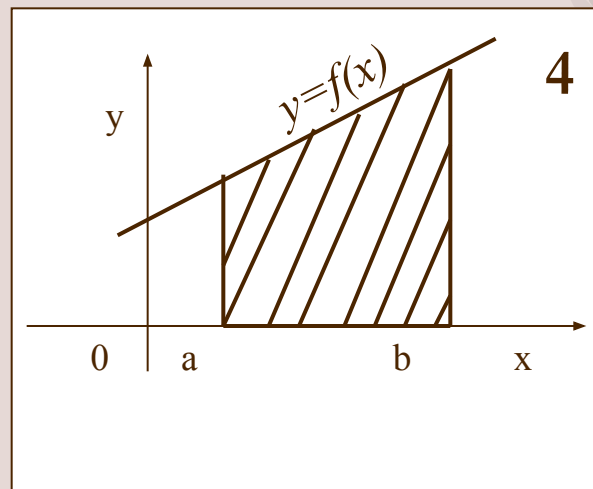
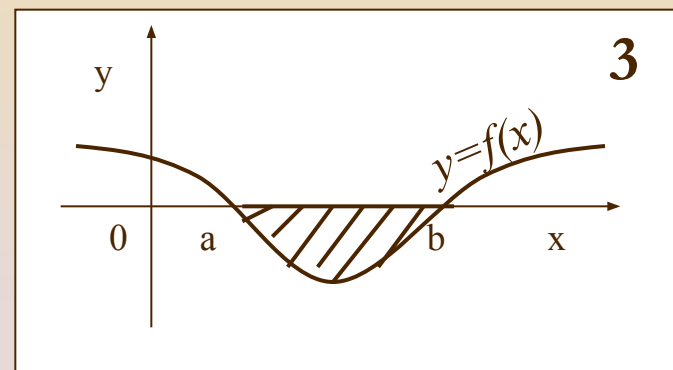
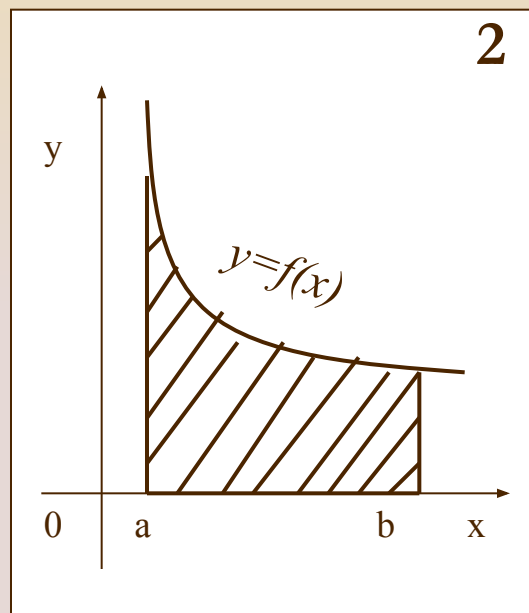
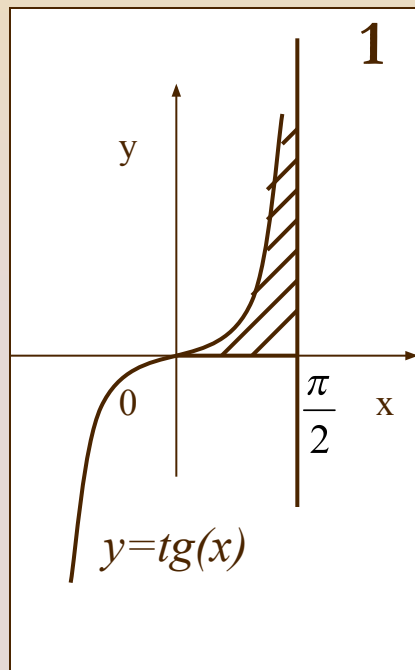
для функции $y = x^2 - 2x$.

Рассмотрим следующие чертежи

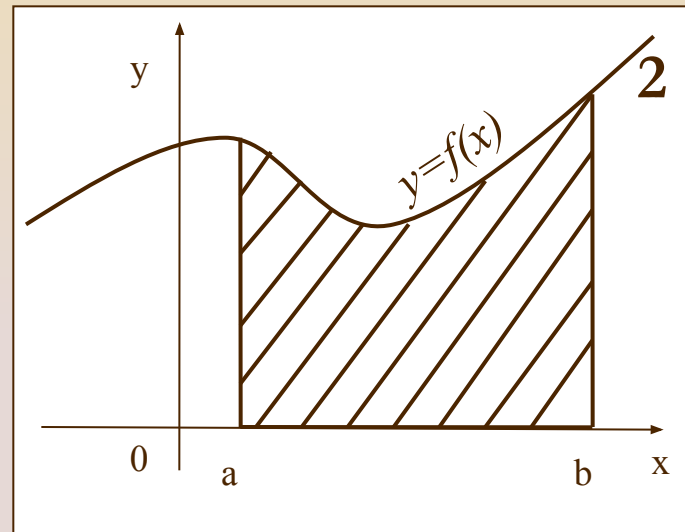
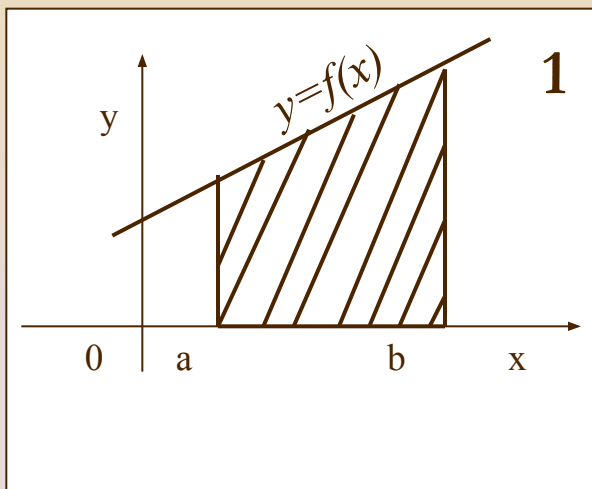


Определение: фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке $[a; b]$ функции, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a; b]$ называется *криволинейной трапецией*.

Указать криволинейные трапеции, ответ обосновать.



Как вычислить площадь данной криволинейной трапеции?



Площадь равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту.

?

Площадь криволинейной трапеции

Вычислите площадь криволинейной трапеции 2-мя способами

1) Используя формулу площади трапеции из геометрии, получим:

$$S = \frac{5+3}{2} \cdot 2 = 8$$

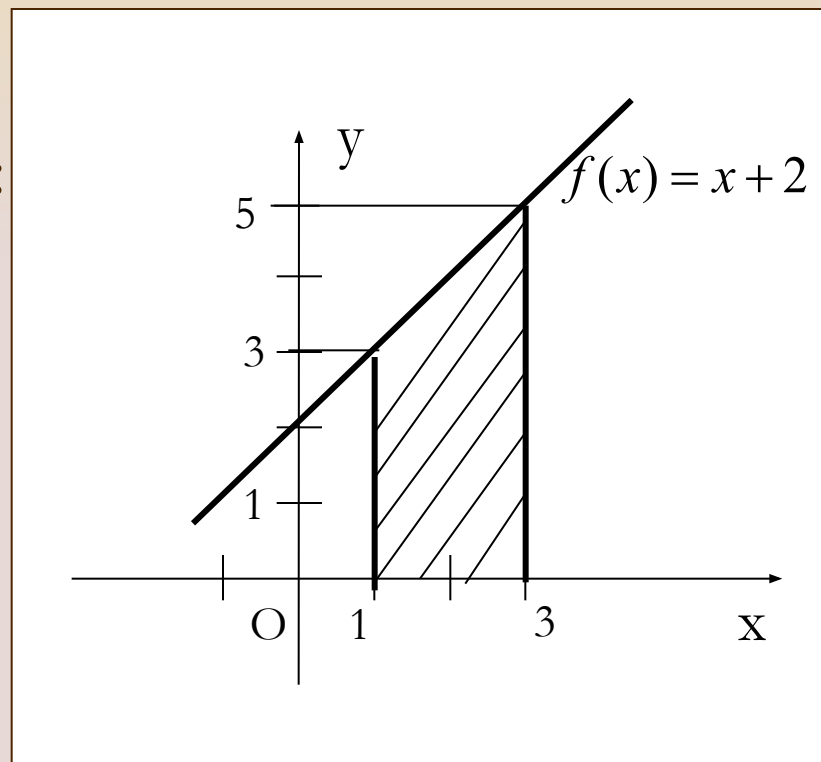
2) Найдите $F(x)$ и вычислите S по формуле $S=F(b)-F(a)$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$F(b) = F(3) = 10,5$$

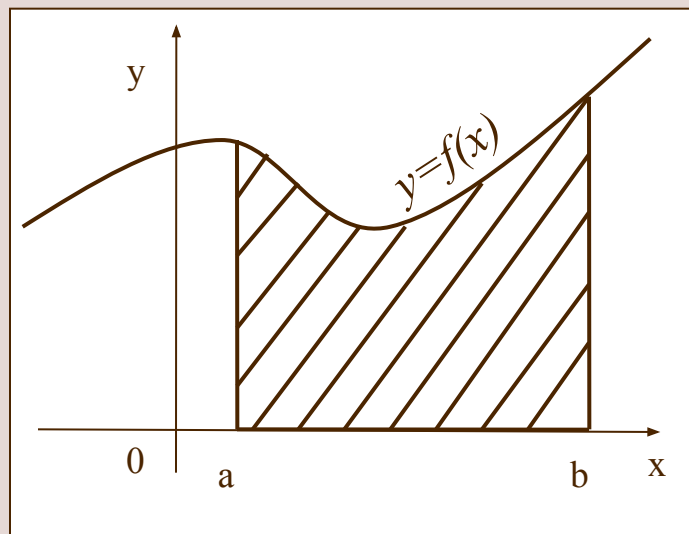
$$F(a) = F(1) = 2,5$$

$$S = 10,5 - 2,5 = 8$$



Теорема:

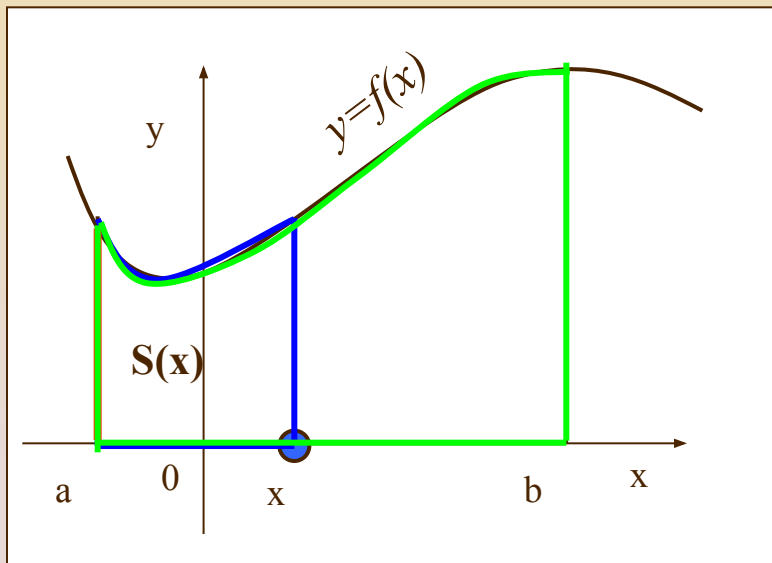
Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е. $S = F(b) - F(a)$.



Дано: f – функция непрерывная, неотрицательная на отрезке $[a; b]$
криволинейная трапеция

Док-ть: $S = F(b) - F(a)$

Доказательство:



Выберем между a и b на оси абсцисс фиксированную точку x и рассмотрим криволинейную трапецию, обозначим ее площадь через $S(x)$.

Каждому x из отрезка $[a; b]$ соответствует вполне определенное значение $S(x)$, то есть $S(x)$ можно назвать функцией, зависящей от x .

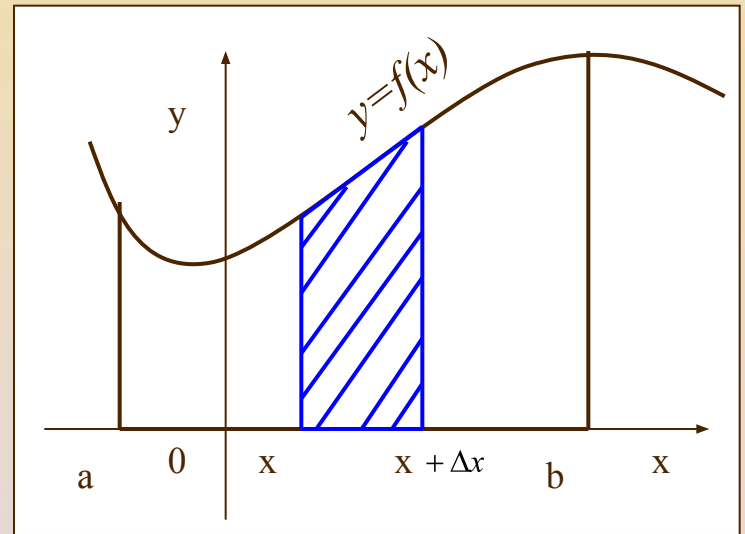
$x=a$, то $S(a)=0$.

Если $x=b$, то $S(b)=S$ (где S -площадь криволинейной трапеции).

Докажем, что $S'(x) = f(x)$

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x), \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$



$\Delta S(x)$ — это площадь криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок $[x; x+\Delta x]$ (площадь фигуры заштрихованной на рисунке)

Возьмем прямоугольник, равновеликий этой криволинейной трапеции и с длиной Δx . Верхнее основание этого прямоугольника пересекает график функции в точке с координатами $(c; f(c))$.

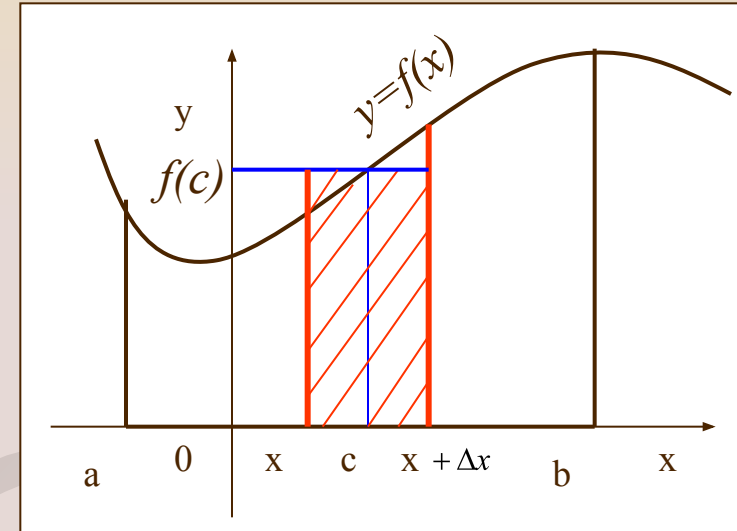
$$S_{\text{пр-ка}} = \Delta S(x) = \Delta x \cdot f(c)$$

$$f(c) = \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$$

$$f(c) \rightarrow f(x), \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$$

$$S'(x) = f(x)$$



$S(x) = F(x) + C$ Найдем C :

при $x = b$, $S = S(b)$, $S(b) = F(b) + C$

при $x = a$, $S(a) = F(a) + C$, но $S(a) = 0$,

получаем $C = -F(a)$

Тогда

$S(x) = F(x) - F(a)$, поскольку $S = S(b)$,

получим $S = S(b) = F(b) - F(a)$

Таким образом, мы доказали теорему и в дальнейшем площадь криволинейной трапеции будем вычислять по формуле

$$S = F(b) - F(a)$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, y = 0, x = 1, x = 3$$

Решение:

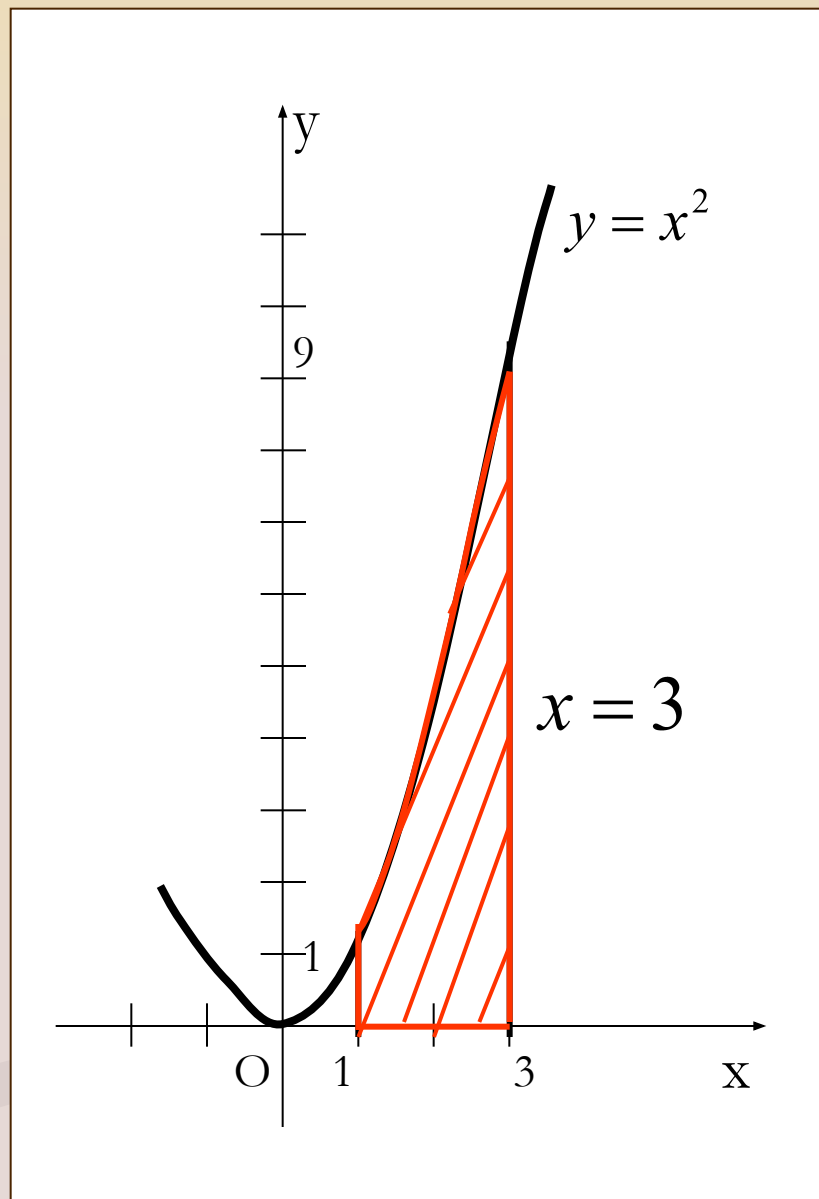
$$F(x) = \frac{x^3}{3}, a = 1, b = 3,$$

$$F(3) = 9, F(1) = \frac{1}{3}$$

$$S = F(3) - F(1)$$

$$S = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$$

Ответ: $8\frac{2}{3}$



Алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции:

1. Изобразить чертеж и убедиться, является ли данная фигура криволинейной трапецией
2. Найти первообразную $F(x)$
3. Применить формулу $S=F(b)-F(a)$