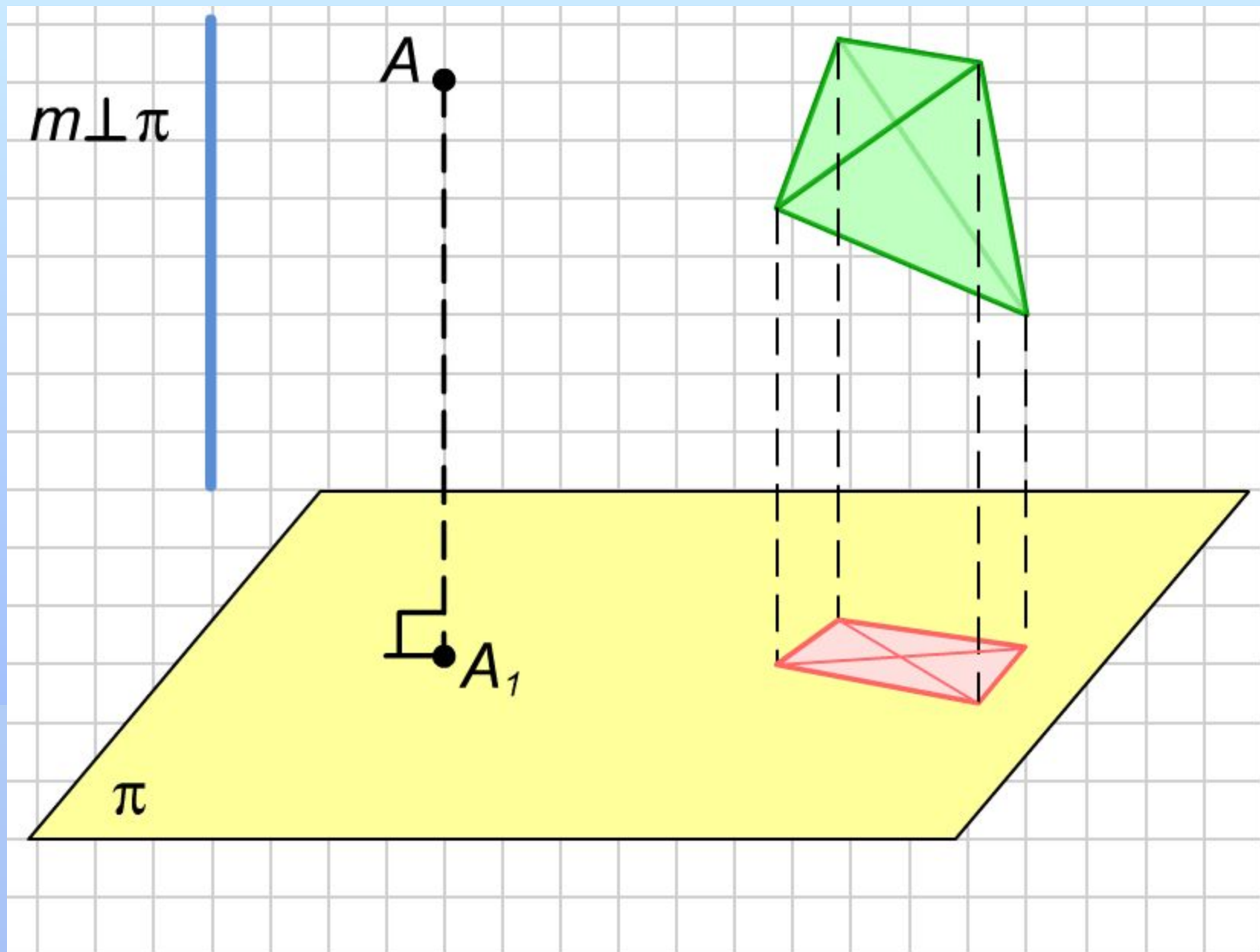


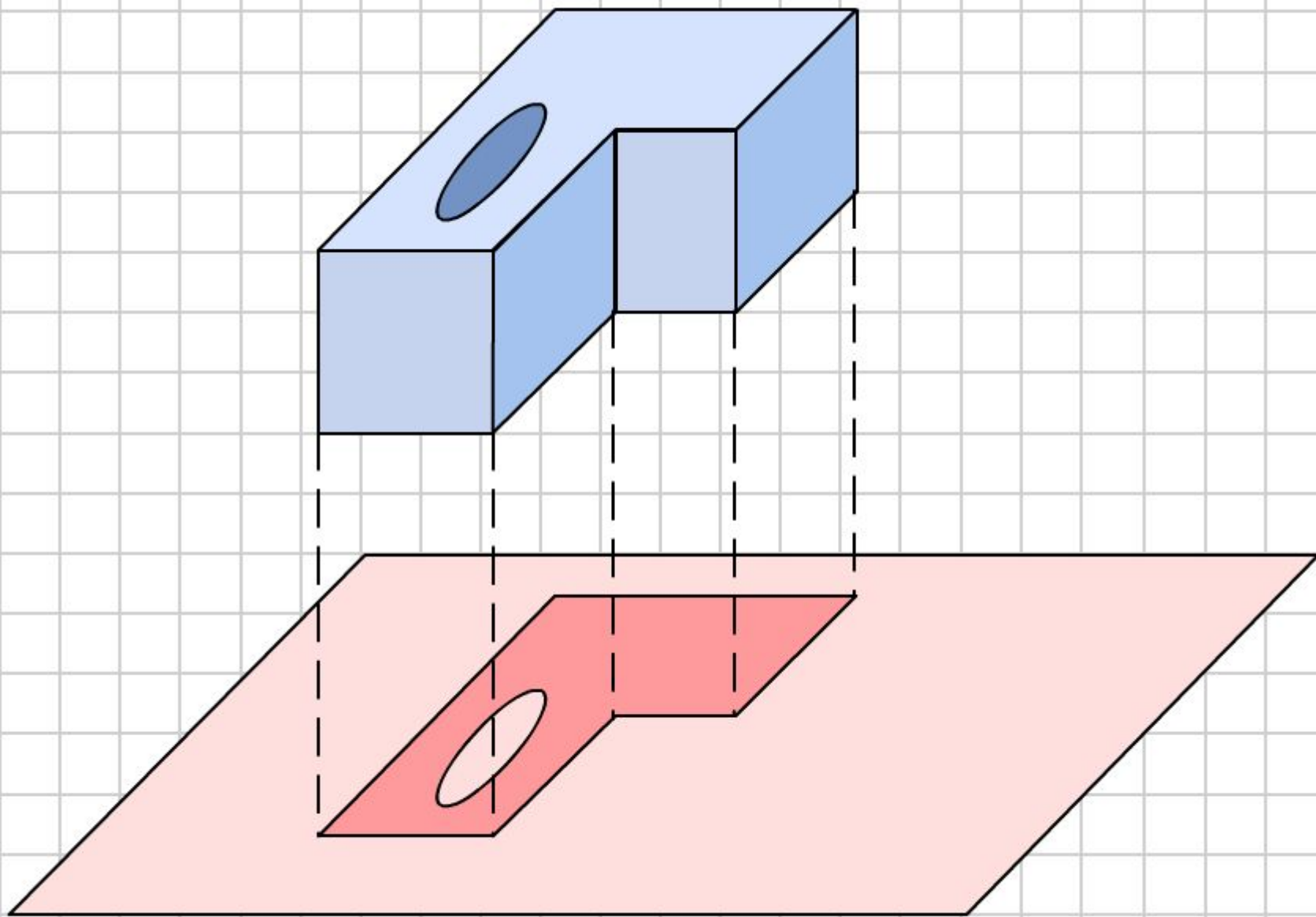
Перпендикуляр и наклонная

На одном из предыдущих уроков вы познакомились с понятием проекции точки на данную плоскость параллельно данной прямой.

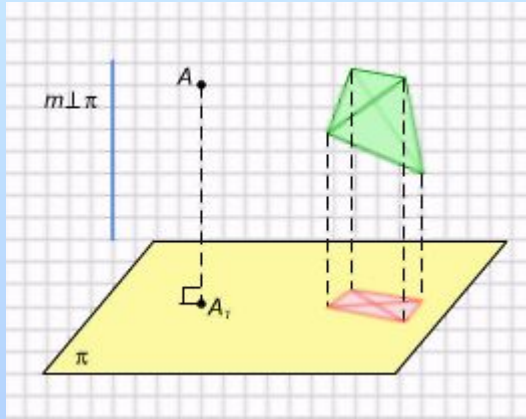
На этом уроке вы продолжите изучение прямых и плоскостей; узнаете, как находится угол между прямой и плоскостью. Вы познакомитесь с понятием ортогональной проекции на плоскость и рассмотрите ее свойства. На уроке будут даны определения расстояния от точки до плоскости и от точки до прямой, угла между прямой и плоскостью. Будет доказана знаменитая теорема о трех перпендикулярах.



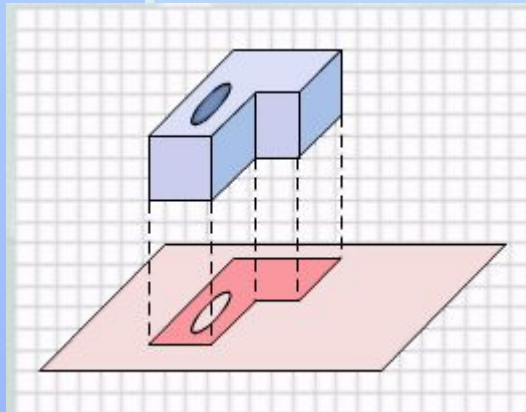
Ортогональная проекция точки и фигуры.



Ортогональная проекция



Ортогональная проекция точки и фигуры.



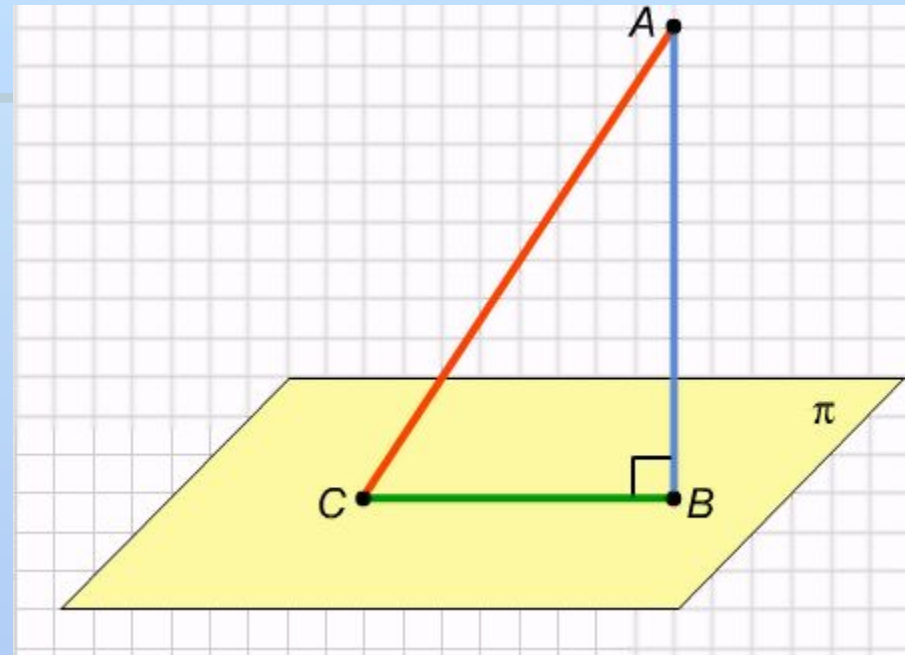
Ортогональная проекция детали.

Ортогональной проекцией точки A на данную плоскость называется проекция точки на эту плоскость параллельно прямой, перпендикулярной этой плоскости. Ортогональная проекция фигуры на данную плоскость p состоит из ортогональных проекций на плоскость p всех точек этой фигуры. Ортогональная проекция часто используется для изображения пространственных тел на плоскости, особенно в технических чертежах. Она дает более реалистичное изображение, чем произвольная параллельная проекция, особенно круглых тел.

Перпендикуляр и наклонная

Пусть через точку A , не принадлежащую плоскости π , проведена прямая, перпендикулярная этой плоскости и пересекающая ее в точке B . Тогда отрезок AB называется *перпендикуляром*, опущенным из точки A на эту плоскость, а сама точка B — основанием этого перпендикуляра. Любой отрезок AC , где C — произвольная точка плоскости π , отличная от B , называется *наклонной* к этой плоскости.

Заметим, что точка B в этом определении является ортогональной проекцией точки A , а отрезок AC — ортогональной проекцией наклонной AB . Ортогональные проекции обладают всеми свойствами обычных параллельных проекций, но имеют и ряд новых свойств.



Перпендикуляр и наклонная.

Свойства ортогональной проекции

Пусть из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и несколько наклонных. Тогда справедливы следующие утверждения.

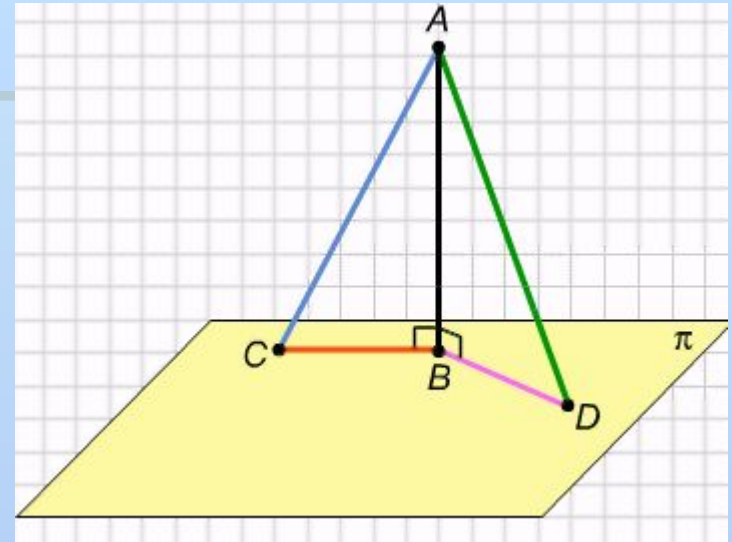
1. Любая наклонная длиннее как перпендикуляра, так и ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.
2. Равные наклонные имеют и равные ортогональные проекции, и наоборот, наклонные, имеющие равные проекции, также равны.
3. Одна наклонная длиннее другой тогда и только тогда, когда ортогональная проекция первой наклонной длиннее ортогональной проекции второй наклонной.

Свойства ортогональной проекции

Доказательство.

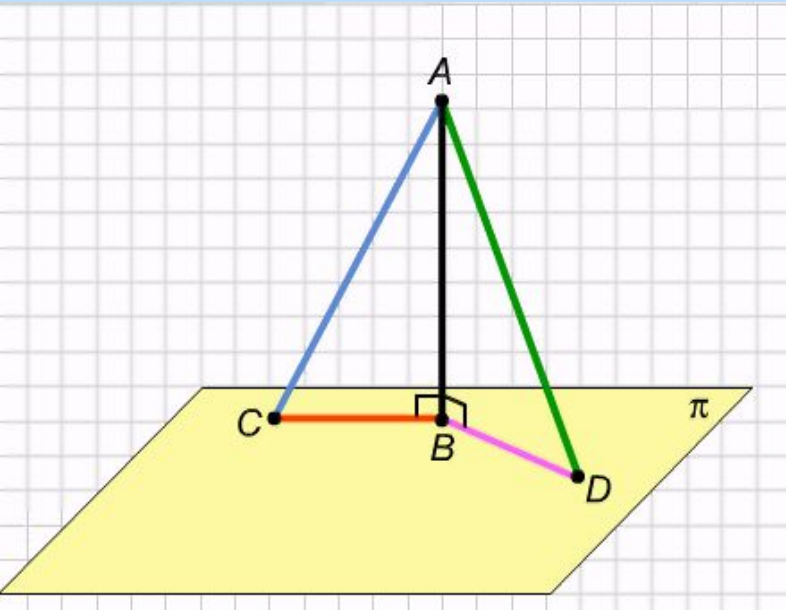
Пусть из точки A к плоскости π проведены перпендикуляр AB и две наклонные AC и AD ; тогда отрезки BC и BD — ортогональные проекции этих отрезков на плоскость π .

Докажем первое утверждение: любая наклонная длиннее как перпендикуляра, так и ортогональной проекции наклонной на эту плоскость. Рассмотрим, например, наклонную AC и треугольник ABC , образованный перпендикуляром AB , этой наклонной AC , и ее ортогональной проекцией BC . Этот треугольник прямоугольный с прямым углом в вершине B и гипотенузой AC , которая, как мы знаем из планиметрии, длиннее каждого из катетов, т.е. и перпендикуляра AB , и проекции BC .



Из точки A к плоскости π проведены перпендикуляр AB и две наклонные AC и AD .

Свойства ортогональной проекции

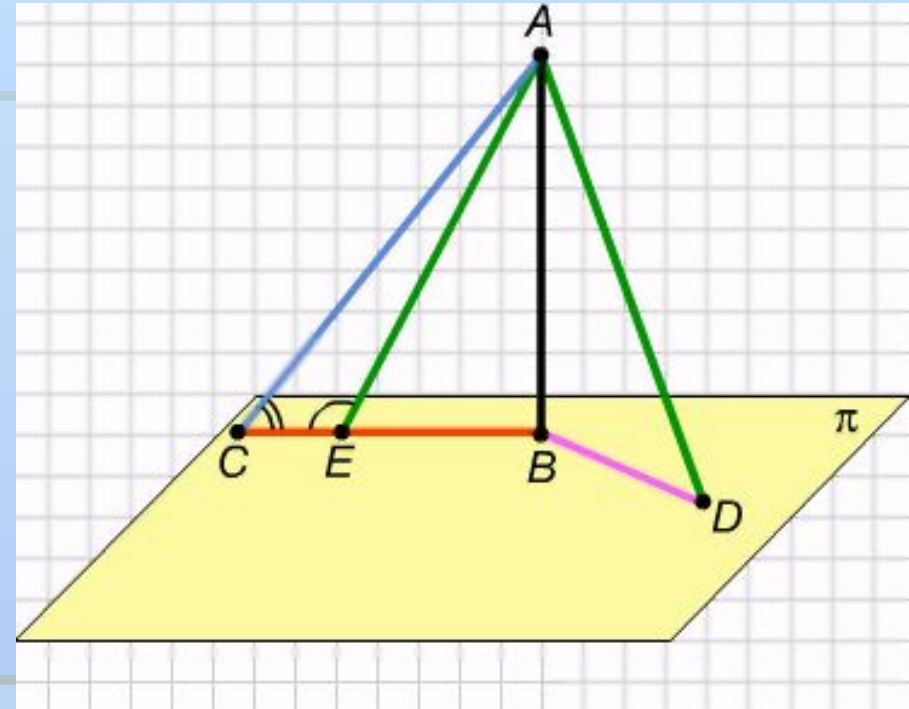


Треугольники ABC и ABD равны по катету и гипотенузе.

Теперь докажем второе утверждение, а именно: равные наклонные имеют и равные ортогональные проекции, и наоборот, наклонные, имеющие равные проекции, также равны. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и ABD . Они имеют общий катет AB . Если наклонные AC и AD равны, то прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по катету и гипотенузе, и тогда $BC=BD$. Обратно, если равны проекции BC и BD , то эти же треугольники равны по двум катетам, и тогда у них равны и гипотенузы AC и AD .

Свойства ортогональной проекции

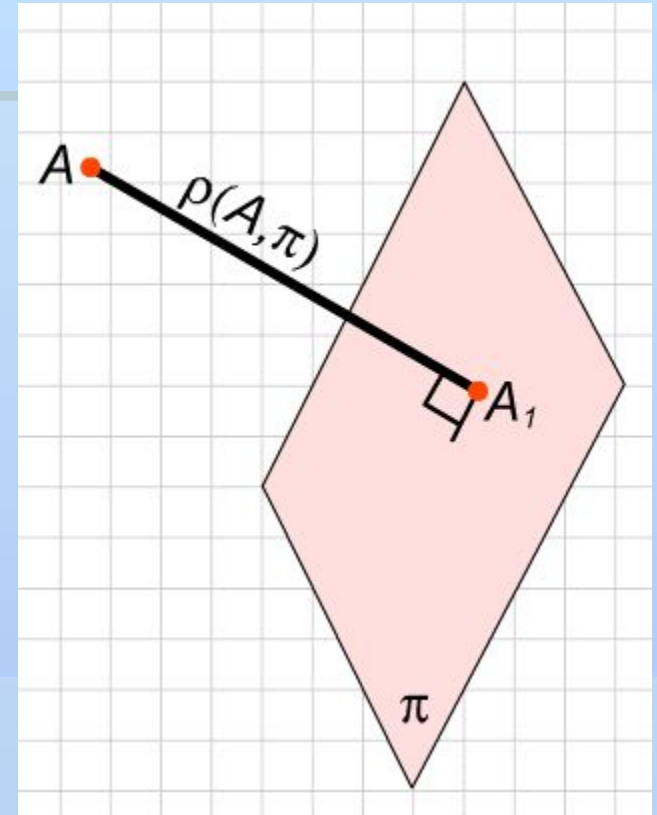
Докажем третье утверждение: одна наклонная длиннее другой тогда и только тогда, когда ортогональная проекция первой наклонной длиннее ортогональной проекции второй наклонной. Пусть, например, $BC > BD$. Отложим на отрезке BC точку E такую, что $BD = BE$. Тогда и $AD = AE$. В треугольнике ACE угол AEC тупой и поэтому больше угла ACE , следовательно, сторона AC больше стороны AE , равной AD .
Обратно, пусть $AC > AD$. Возможны три случая: а) $BC = BD$; б) $BC < BD$; в) $BC > BD$. Если $BC = BD$, то по доказанному выше в пункте 2, $AC = AD$, что противоречит условию. Если $BC < BD$, как мы только что доказали, $AC < AD$, что опять противоречит условию. Остается третья возможность: $BC > BD$. Теорема доказана.



Если BC больше BD ,
то AC больше стороны
 AE , равной AD .

Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки до плоскости (не проходящей через эту точку) называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость. Из теоремы о свойствах ортогональной проекции следует, что расстояние от точки A до плоскости π равно наименьшему расстоянию от точки A до точек этой плоскости.



Свойство расстояний от разных точек до плоскости

Замечание 1 (свойство расстояний от разных точек до плоскости).

Пусть две точки A и B не принадлежат плоскости π , а прямая AB пересекает плоскость π в точке C . Тогда расстояния от точек A и B до плоскости π относятся как отрезки AC и BC :

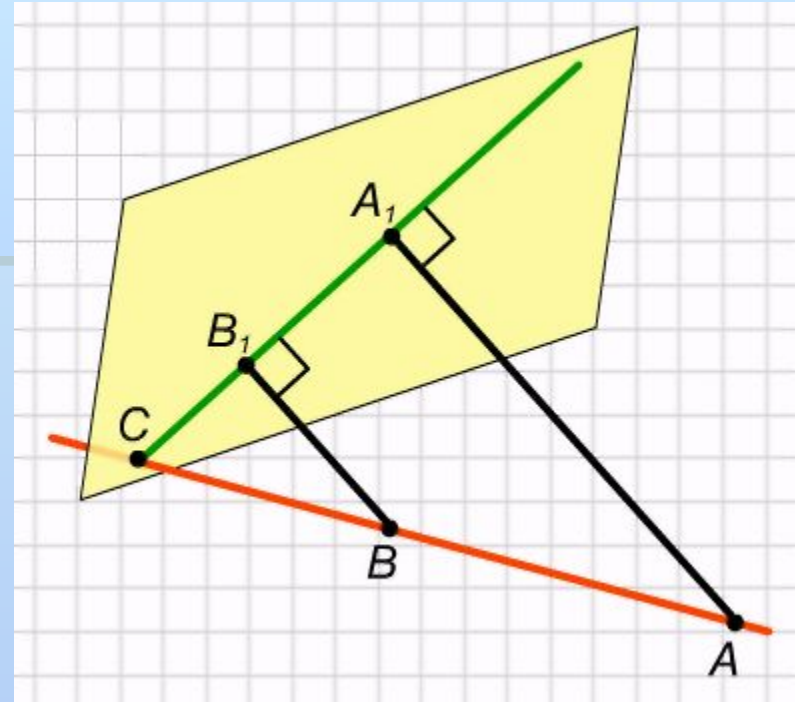
$$\frac{\rho(A, \pi)}{\rho(B, \pi)} = \frac{AC}{BC}.$$

Доказательство:

Рассмотрим два случая. В случае 1 точки A и B находятся по одну сторону от плоскости π .

Рассмотрим ортогональные проекции точек A и B на плоскость — точки A_1 и B_1 соответственно. Тогда прямая A_1B_1 является ортогональной проекцией прямой AB и проходит через точку C . В плоскости, проходящей через прямые AB и A_1B_1 , прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны, и поэтому их катеты пропорциональны гипотенузам:

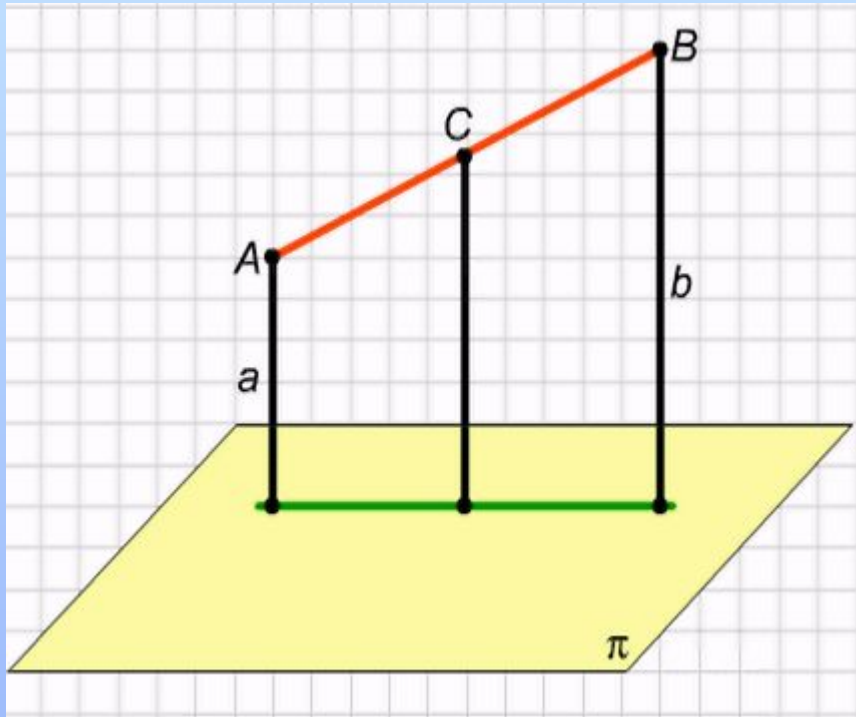
$$\frac{\rho(A, \pi)}{\rho(B, \pi)} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}.$$



Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны.

Случай 2, когда точки A и B расположены по разную сторону от плоскости, разберите самостоятельно. Замечание 1 доказано.

Свойство расстояния от середины отрезка до плоскости



Точки A и B расположены по одну сторону от плоскости π, если точки A и B расположены по одну сторону от плоскости π

Замечание 2 (свойство расстояния от середины отрезка до плоскости).
Пусть расстояния от точек A и B до плоскости π равны a и b соответственно. Тогда расстояние от середины C отрезка AB до этой плоскости равно:

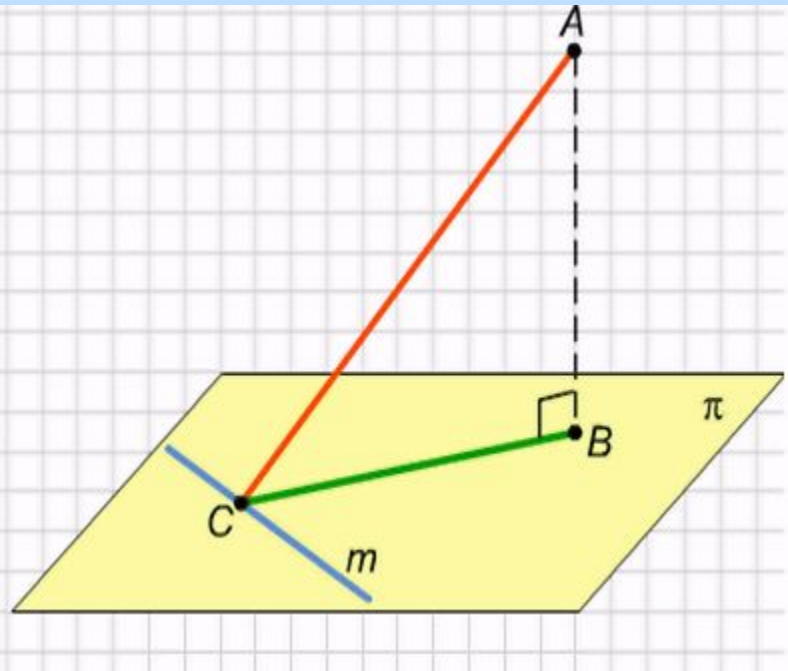
$$\frac{a + b}{2},$$

если точки A и B расположены по одну сторону от плоскости π;

$$\frac{|a - b|}{2},$$

если точки A и B расположены по разные стороны от плоскости π

Теорема о трех перпендикулярах



Перпендикуляр AB к плоскости π , наклонная AC и прямая m в плоскости π .

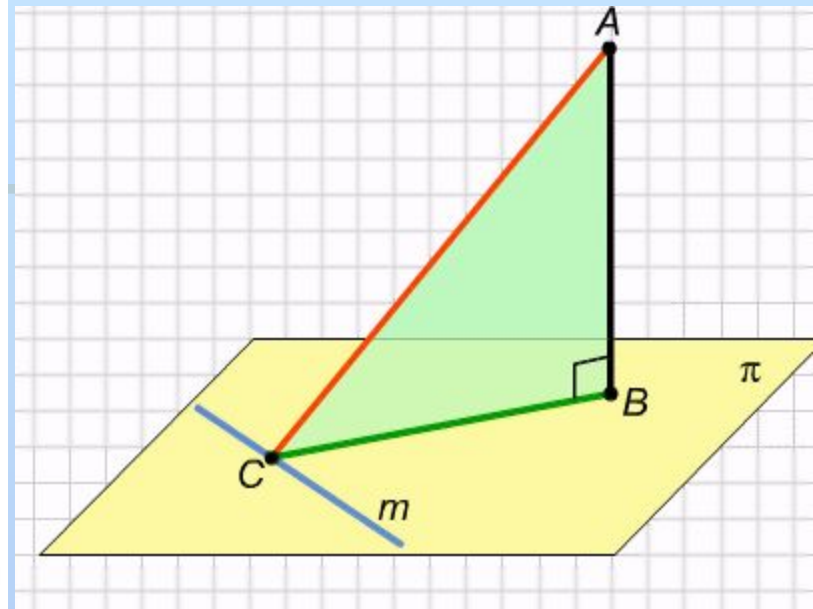
Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее ортогональной проекции.

Доказательство.

Пусть даны плоскость π , перпендикуляр AB на эту плоскость, наклонная AC , и прямая m в плоскости π . Нам надо доказать два взаимно обратных утверждения. Первое утверждение: если прямая m перпендикулярна наклонной AC , то она перпендикулярна и ее ортогональной проекции BC . И обратно: если прямая m перпендикулярна ортогональной проекции BC , то она перпендикулярна и наклонной AC .

Докажем, что если прямая m перпендикулярна наклонной AC , то она перпендикулярна и ее ортогональной проекции BC . Пусть $m \perp AC$. Прямая AB перпендикулярна плоскости, значит, она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в частности, прямой m . Следовательно, прямая m перпендикулярна плоскости ABC , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости: AC и BC . Поэтому прямая m перпендикулярна любой прямой плоскости ABC , в частности, проекции BC .

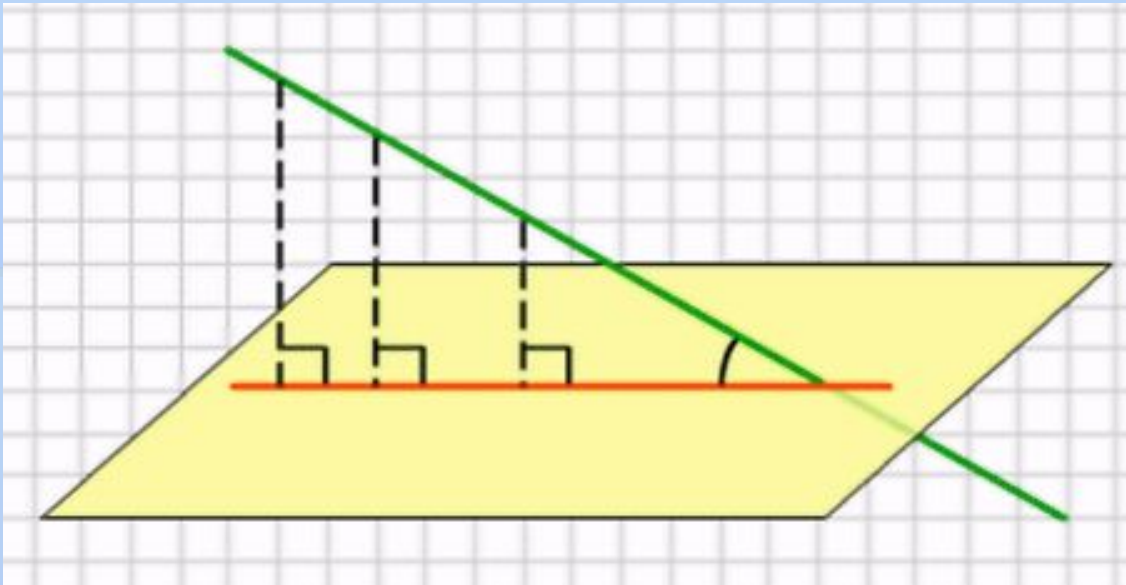
Доказательство обратного утверждения полностью аналогично: если $m \perp BC$, то прямая m перпендикулярна плоскости ABC , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости: AB и BC . Поэтому прямая m перпендикулярна любой прямой плоскости ABC , в частности, наклонной AC . Теорема доказана.



**Прямая m
перпендикулярна
плоскости ABC .**

Угол между наклонной и плоскостью

Пусть даны плоскость и наклонная прямая. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ней и плоскостью считается равным нулю. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ней и плоскостью прямой, т. е. равен 90° .



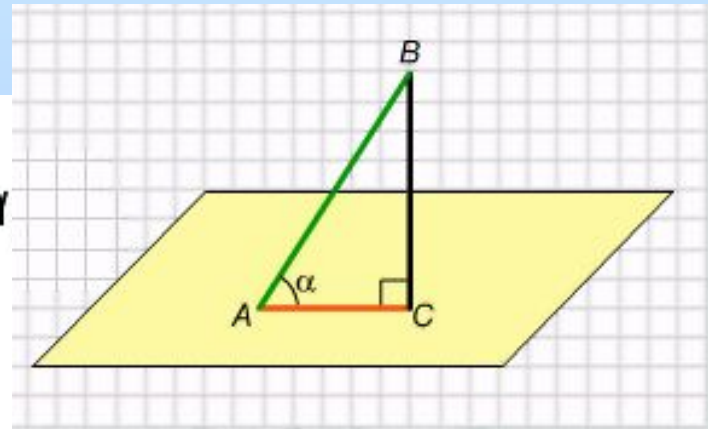
Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Пусть точка A принадлежит плоскости, а наклонная AB образует с этой плоскостью угол α тогда ортогональная проекция AC и перпендикуляр BC на эту плоскость связаны соотношениями:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$BC = AB \cdot \sin \alpha, \quad AC = AB \cdot \cos \alpha.$$

Это следует из того, что ABC — прямоугольный треугольник и $\angle BAC = \alpha$. Последняя формула верна и для произвольного отрезка прямой, пересекающей плоскость.



Перпендикуляр, наклонная и ее ортогональная проекция образуют прямоугольный треугольник.

**Автор: Аверкина Т.П., учитель МОУ «Тархановская СОШ»
Ичалковского района РМ**