

Векторы в пространстве

ВХОД

5klass.net

Содержание

- I. Понятие вектора в пространстве
- II. Коллинеарные векторы
- III. Компланарные векторы
- IV. Действия с векторами
- V. Разложение вектора
- VI. Базисные задачи

Проверь себя

Об авторе

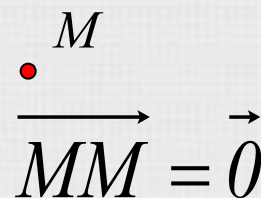
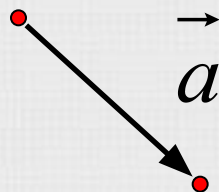
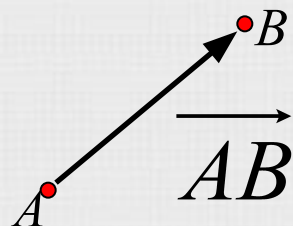
Помощь в управлении презентацией

Выход

Понятие вектора в пространстве

Вектор(направленный отрезок) –

отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.



Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ – длина отрезка AB.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \quad |\vec{0}| = 0$$



Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

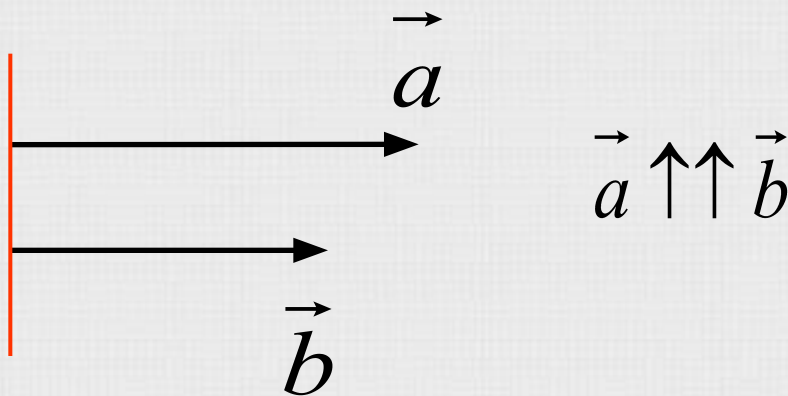
Среди коллинеарных различают:

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы



Сонаправленные векторы

Сонаправленные векторы - векторы, лежащие по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.



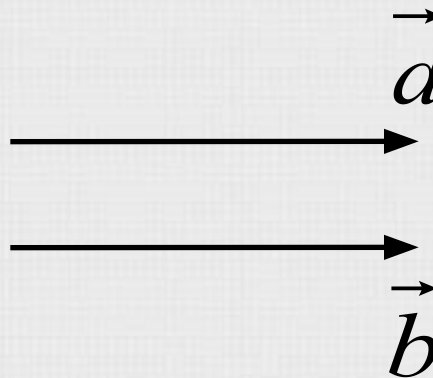
Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.

- Равные векторы



Равные векторы

Равные векторы - сонаправленные векторы, длины которых равны.

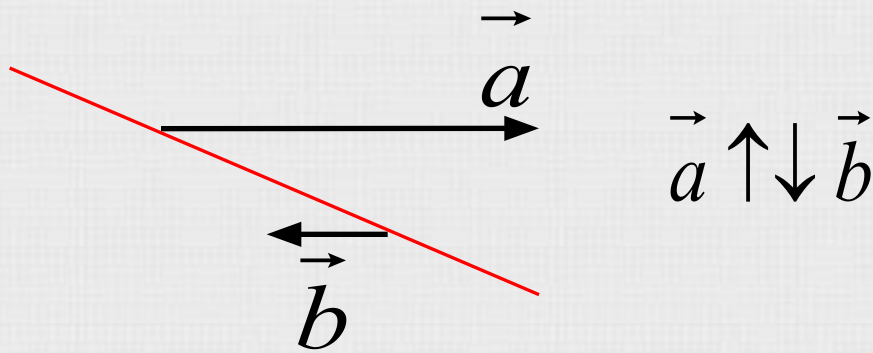

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.



Противоположно направленные векторы

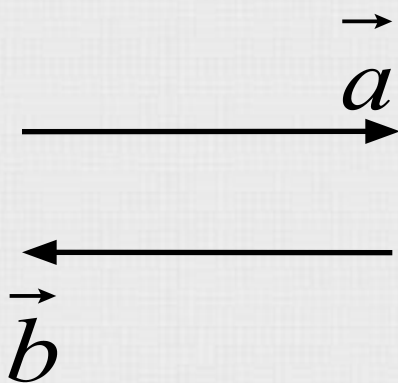
Противоположно направленные векторы – векторы, лежащие по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.



- Противоположные векторы

Противоположные векторы

Противоположные векторы – противоположно направленные векторы, длины которых равны.


$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.



Признак коллинеарности

Если существует такое число k при котором выполняется равенство $\vec{a} = k\vec{b}$ и при том вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Доказательств

о



Доказательство признака коллинеарности

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\vec{a} = k\vec{b}$

вектор $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$ (следует из определения
вектор $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$ произведения вектора на число)

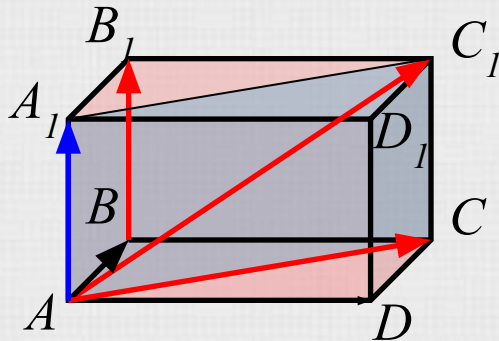
Значит вектор $\vec{b}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны,
т.к. сонаправленные и противоположно
направленные векторы лежат на одной
или параллельных прямых.
ч.т.д.



Определение компланарных векторов

Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.

Пример:

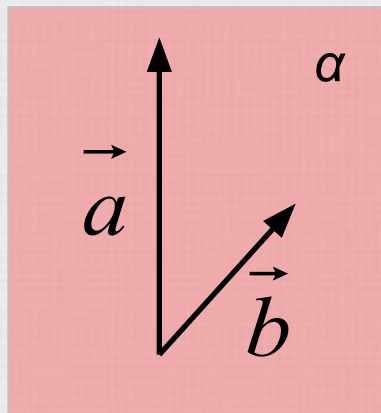
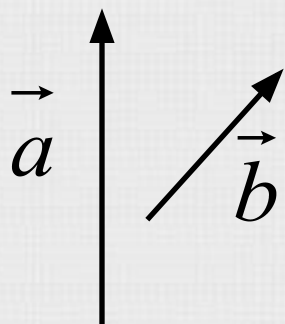


$\vec{BB_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$ – компланарны, т.к.
 $\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$, а векторы $\vec{AA_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$
лежат в плоскости (AA₁C)



О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.



$$\vec{a} \in \alpha$$

$$\vec{b} \in \alpha$$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – компланарны

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ –

компланарны

если

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

$$\vec{a} = k\vec{b}$$



Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Доказательство

Задачи



Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$?

Справка

Решение

2) *Известно, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.*

Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$;

б) $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}, 2\vec{b} - 3\vec{c}$?

Справка

Решение



Решение

а) векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ коллинеарны,
векторы $\vec{b}$ и $3\vec{b}$ коллинеарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ компланарны

б) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ компланарны,
векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны



Решение

а) если векторы $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n , что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом, значит векторы компланарны



Решение

б) если векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + 2\vec{c}) + y(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x\vec{a} + 2x\vec{c} + 2y\vec{b} - 3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1 - x) + \vec{b}(1 - 2y) + \vec{c}(-2x + 3y) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - x = 0 \\ 1 - 2y = 0 \\ 3y - 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,
значит векторы компланарны



ENERGYPIXEL.COM



x, y – некоторые числа

 $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — компланарны

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — не коллинеарны

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$
$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1} \in (OAB)$$

$$\overrightarrow{OA_l} = x \cdot \overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{OB_l} = y \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \overrightarrow{OA_l} + \overrightarrow{OB_l} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$$

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости

 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны ч.т.д

Свойство компланарных векторов

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.



Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение



Сложение векторов

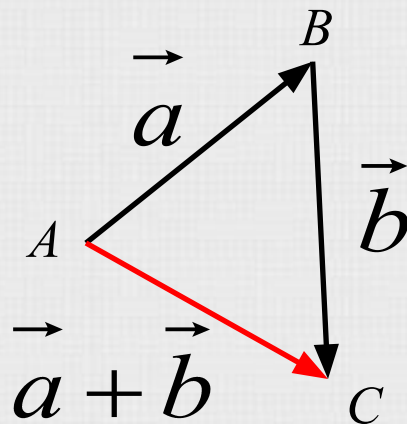
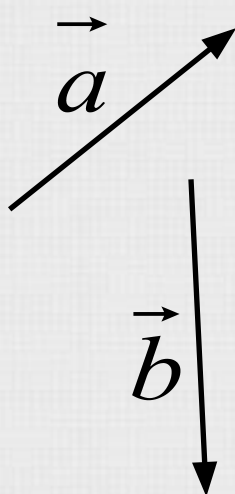
- Правило треугольника
- Правило параллелограмма
- Правило многоугольника
- Правило параллелепипеда
- Свойства сложения



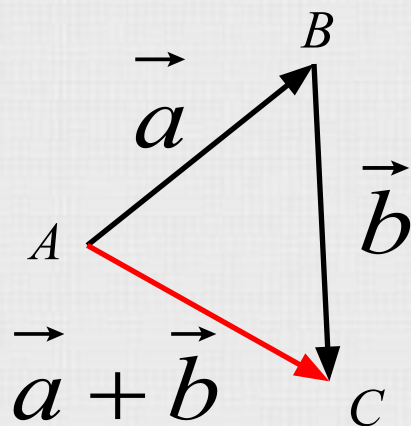
Правило треугольника

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$
2. от точки B отложить вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$
3. вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$



Правило треугольника



Для любых трех точек A , B и C справедливо равенство:

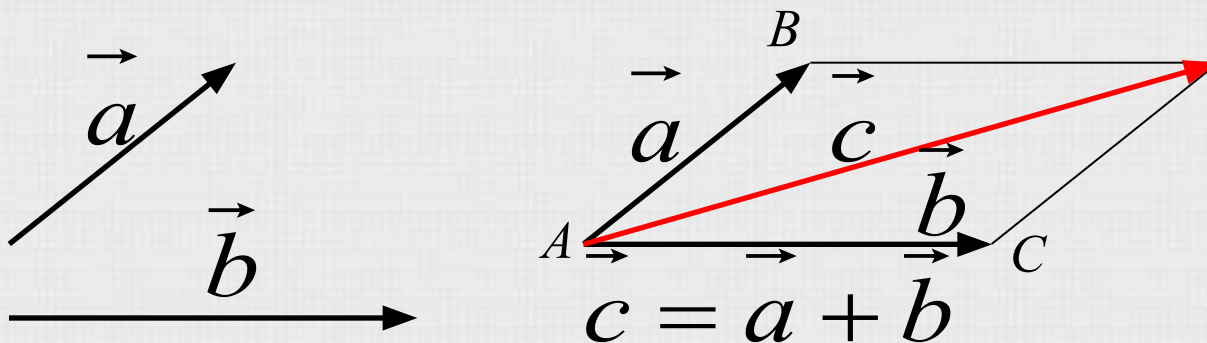
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{\overrightarrow{AC}}$$



Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо :

- 1. отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$*
- 2. от точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$*
- 3. построить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам*
- 4. диагональ параллелограмма – сумма векторов*



Свойства сложения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы
равенства :

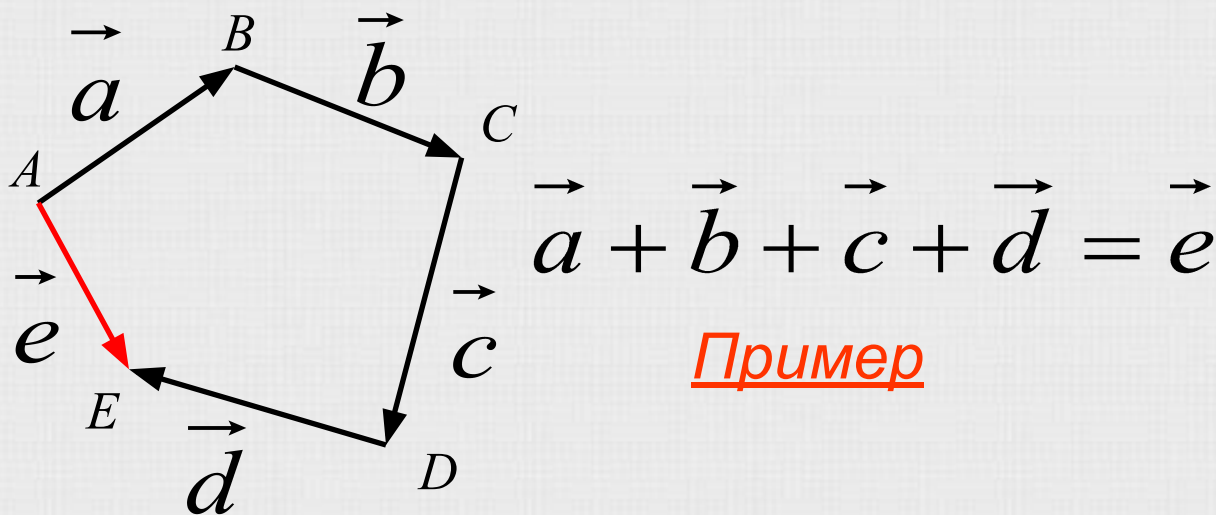
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{переместительный закон}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{сочетательный закон}$$



Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего (при последовательном откладывании).

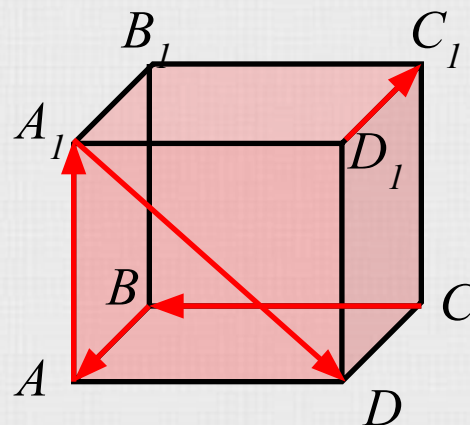


Пример

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{\overrightarrow{AE}}$$



Пример

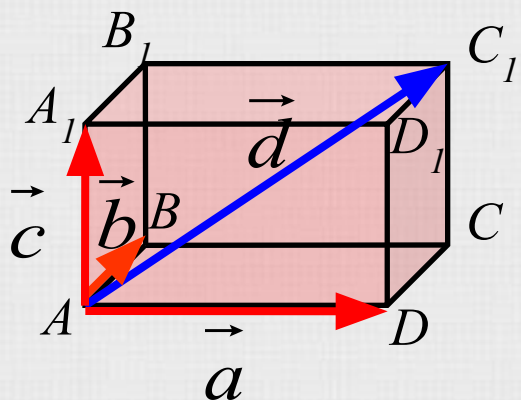


$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$



Правило параллелепипеда

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

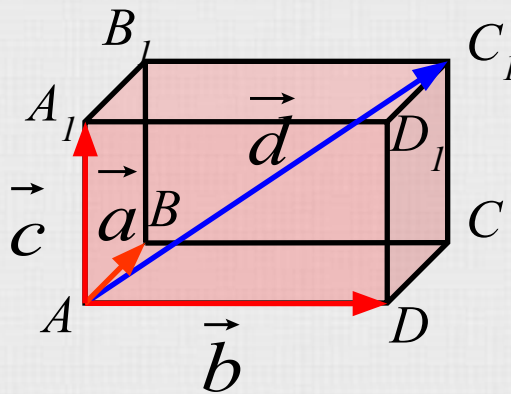
$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$



Свойства



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ для любого параллелепипеда
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ для прямоугольного
параллелепипеда

Вычитание векторов

- Вычитание
- Сложение с противоположным



Вычитание

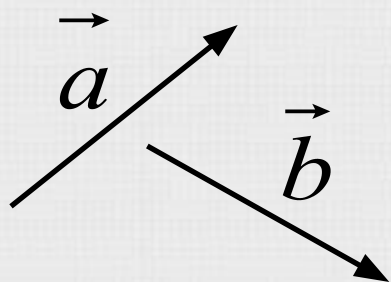
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.



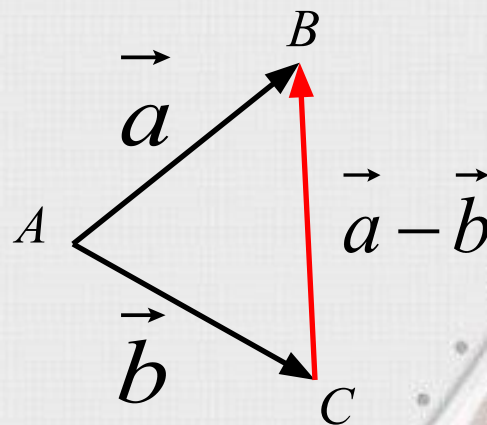
Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$
2. от этой же точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$
3. вектор $\overrightarrow{CB}$ называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

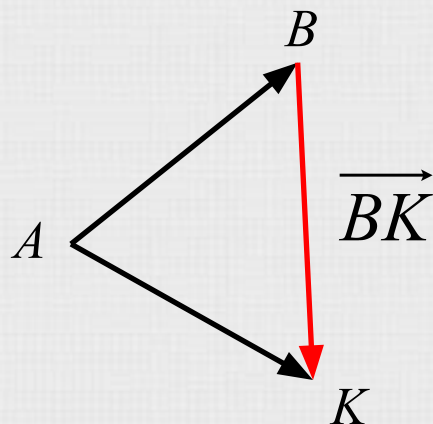


Правило трех точек



Правило трех точек

Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.

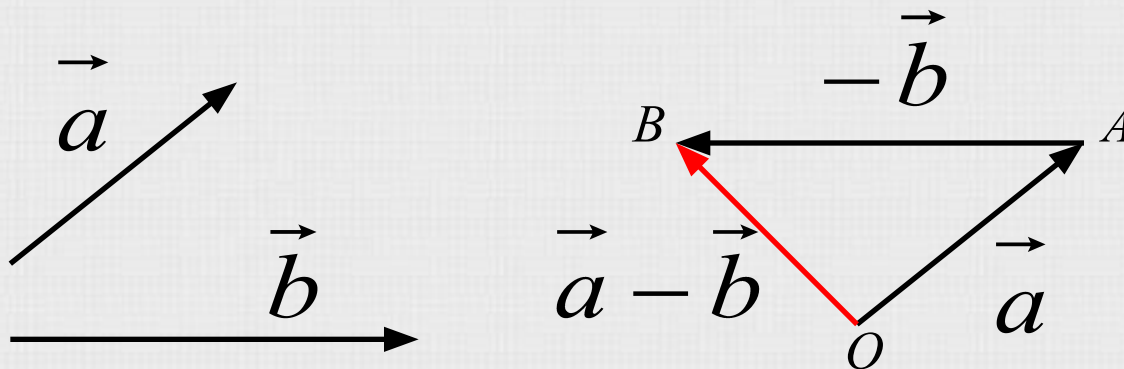


$$\underline{\overrightarrow{BK}} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$$

Сложение с противоположным

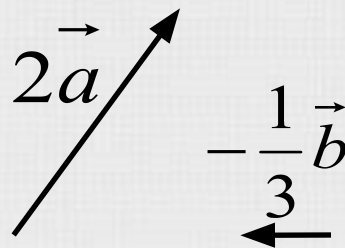
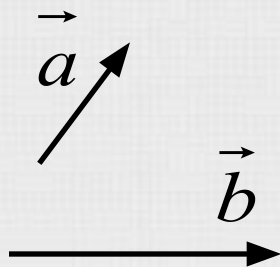
Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить как сумму вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного вектору $\vec{b}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, при чем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.



Свойства

- Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

- Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор.

$$n \cdot \vec{0} = \vec{0}$$



Свойства

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства :

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a}) \quad \text{сочетательный закон}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \text{1-ый распределительный закон}$$

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \quad \text{2-ой распределительный закон}$$



Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения



Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

- *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^2 = \left| \vec{a} \right|^2 = a^2$$



Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательств

во



Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство :

I. при $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, равенство

$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ справедливо, т.к. $\vec{0}\{0;0;0\}$

II. при $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

O – произвольная точка

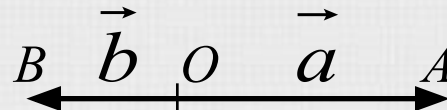
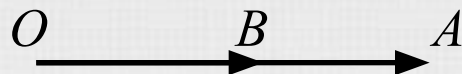
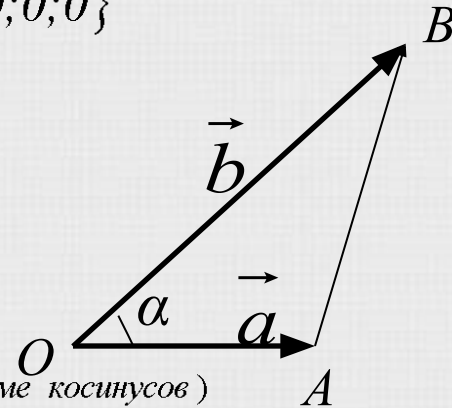
$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$

если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$ (по теореме косинусов)

это равенство верно и в том случае когда векторы

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны



$$\begin{aligned}
 \cos \alpha = 1, AB^2 &= (OA - OB)^2 = & \cos \alpha = -1, AB^2 &= (OA + OB)^2 = \\
 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB = & &= OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB = \\
 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \alpha & &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \alpha
 \end{aligned}$$



Доказательство формулы скалярного произведения

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$- (z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$- x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$



Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства :

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ причем } \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ при } \vec{a} \neq 0$$

$$2^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{переместительный закон})$$

$$3^0. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{распределительный закон})$$

$$4^0. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{сочетательный закон})$$



Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам



Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

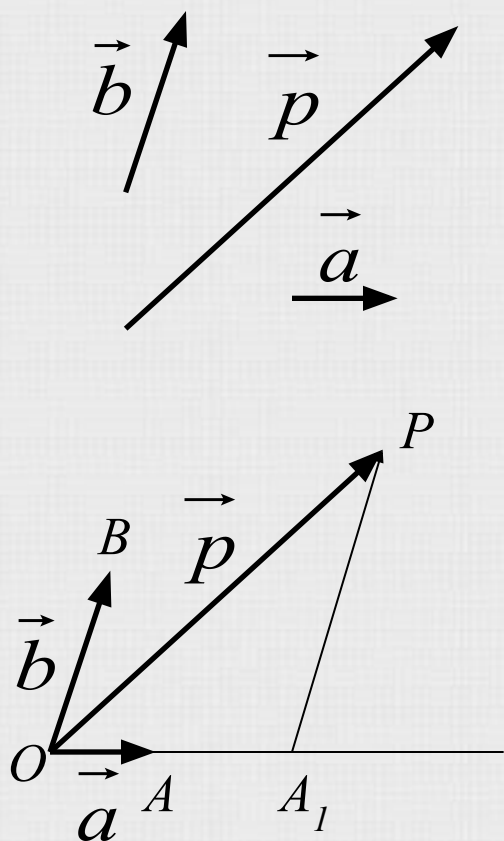
Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство



Доказательство теоремы



Дано :

$\vec{a}, \vec{b}$ – неколлинеарные
векторы

Доказать :

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Доказательство :

1) Пусть $\vec{p}$ коллинеарен $\vec{b}$
Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, где y –
некоторое число.

Следовательно,

$$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

т.е. $\vec{p}$ разложен по
векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Доказательство теоремы

2) $\vec{r}$ коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$

Отметим O – произвольную точку.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} \quad \overrightarrow{OP} = \vec{r}$$

$$PA_1 \parallel BO \quad PA_1 \cap OA = A_1$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P} \text{ (по правилу треугольника)}$$

но: $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1P}$ коллинеарны $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно,

$$\text{значит } \overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{A_1P} = y\vec{b},$$

следовательно $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т.е. $\vec{r}$ разложен по $\vec{a}$ и $\vec{b}$

ч.т.д.



Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b}$

Тогда: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$
 $\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$ 

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b}$$

$$x - x_1 = 0, y - y_1 = 0,$$

если бы $x - x_1 \neq 0$ то $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \vec{b}$

*а значит $\vec{a}$, и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию теоремы
значит $x - x_1 = 0, y - y_1 = 0$, откуда
 $x = x_1$ и $y = y_1$.*



Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y, z – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

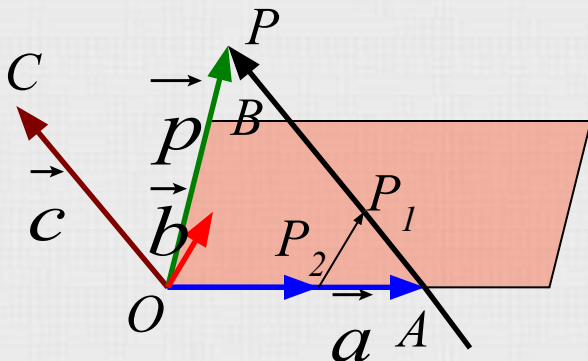
Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство



Доказательство теоремы



Дано :

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ –
некомпланрные
векторы

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Доказательство :

O – произвольная точка

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OP} = \vec{p}$$

$$AP \parallel OC, AP \cap (AOB) = P_1, P_2P_1 \parallel OB$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$$

$\overrightarrow{OP_2}$, и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{OC}$ – коллинеарны

$$\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ ч.т.д.}$$



Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$

Тогда: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$
 $\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b} + (z - z_1) \vec{c}$$

$$x - x_1 = 0, \quad y - y_1 = 0, \quad z - z_1 = 0$$

$$\text{если бы } z - z_1 \neq 0 \text{ то } \vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1} \vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1} \vec{b}$$

а значит $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$ компланарны, что противоречит условию теоремы

значит $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$



Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка

Вектор, проведенный в точку отрезка

Вектор, соединяющий середины двух отрезков

Вектор, проведенный в центроид треугольника

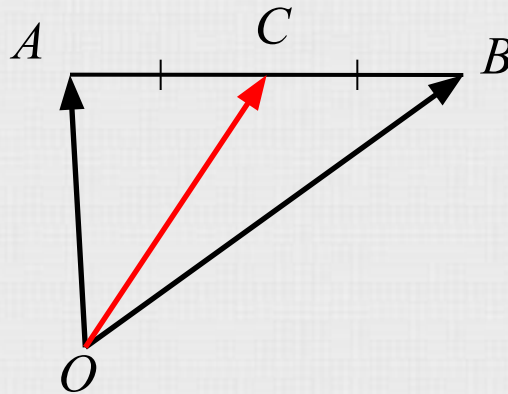
Вектор, проведенный в точку пересечения
диагоналей параллелограмма

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда



Вектор, проведенный в середину отрезка,

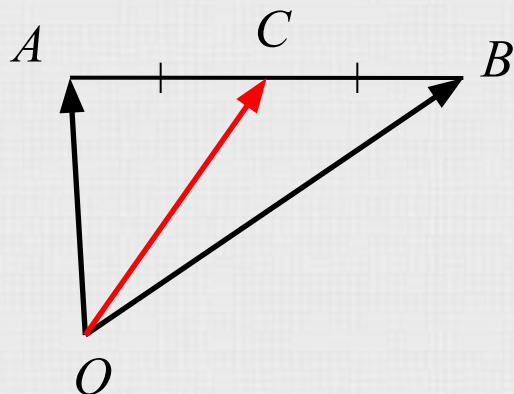
равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

AB – отрезок

$AC = CB$

Доказать :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \end{aligned} \right| +$$

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$$

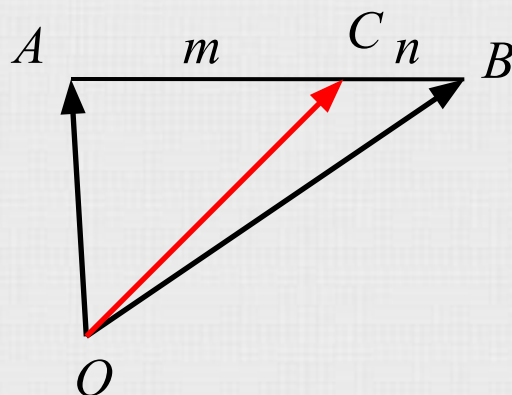
$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad | \div 2$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \quad | \text{ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в точку отрезка

Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$.

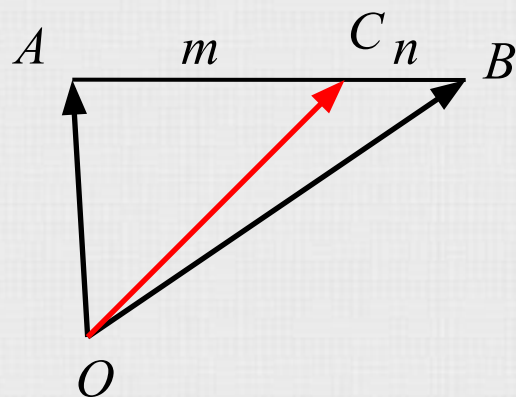


$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

AB – отрезок

$AC = m$

$CB = n$

Доказать :

Доказательство :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

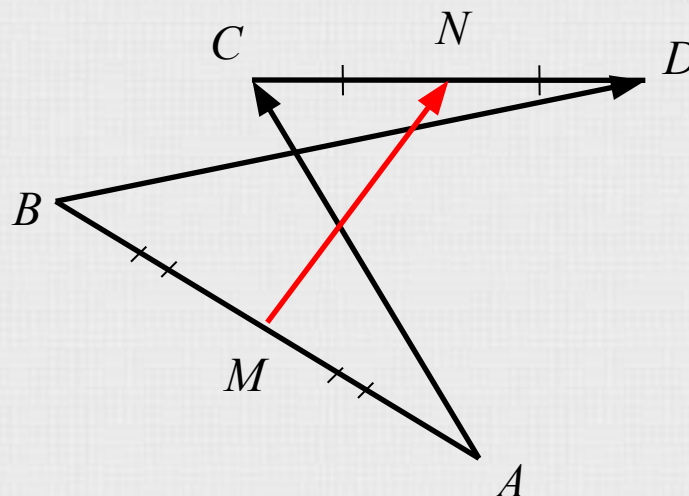
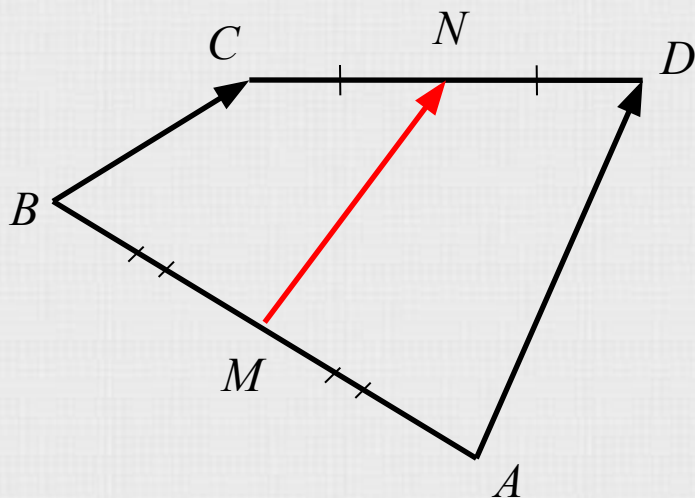
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB} - \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OA} =$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB} \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

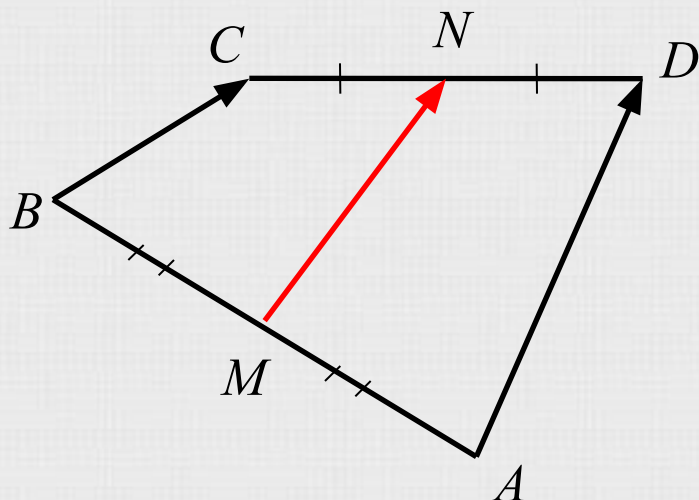
равен полусумме векторов, соединяющих их концы.



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{aligned} \right\} +$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

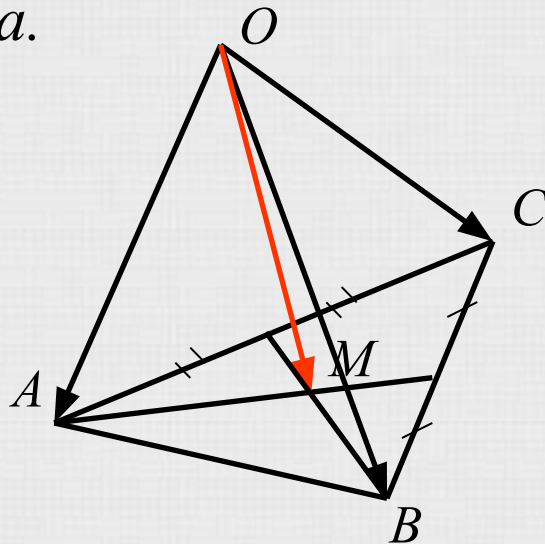
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в центроид треугольника,

равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.

Центроид – точка пересечения медиан треугольника.

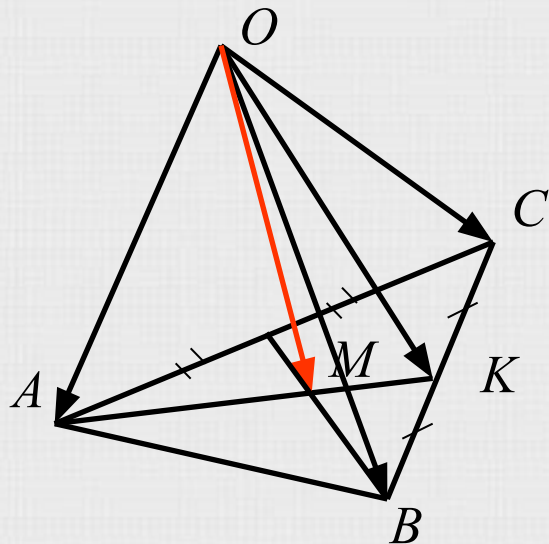


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

$\triangle ABC$

M – центр оид

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK} =$$

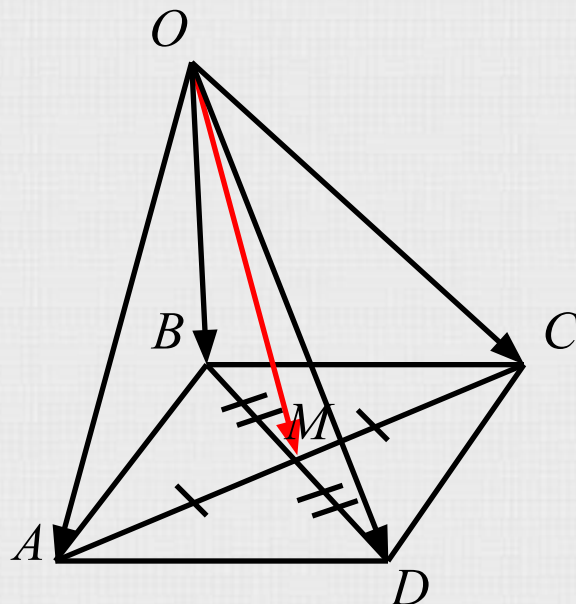
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма,

равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.

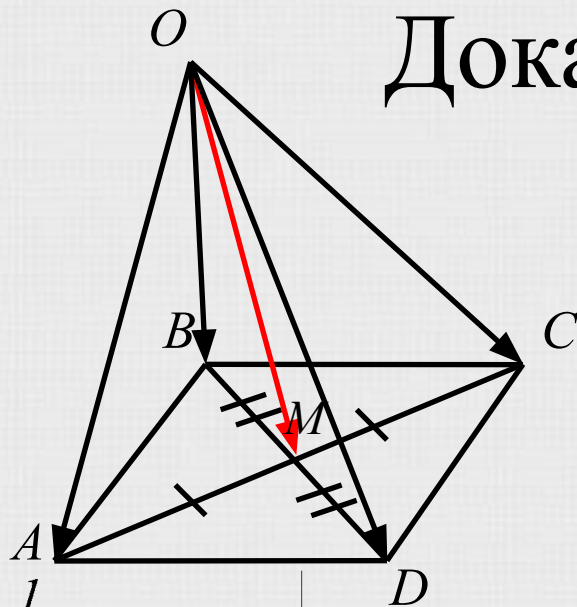


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

$ABCD$ – пар – м

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\left. \begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned} \right| +$$

$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

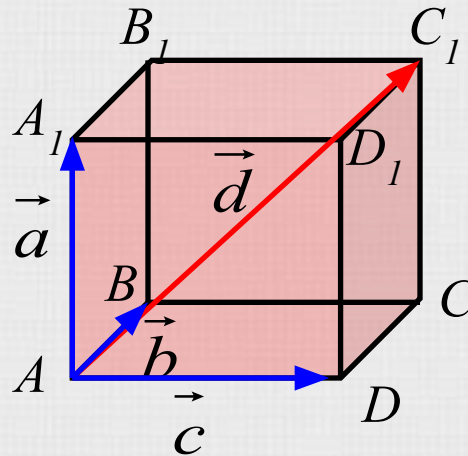
$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \div . \grave{o} . \grave{a} .$$



Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда,

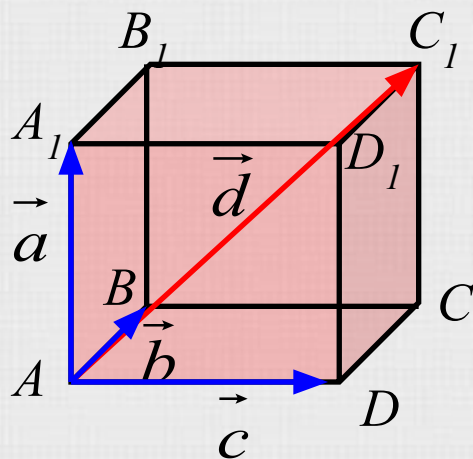
*равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах,
исходящих из одной вершины.*



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство

Доказательство



Доказательство :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} = \\ &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ ч.т.д.}\end{aligned}$$

Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – м

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

Доказать :

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



Помощь в управлении презентацией

- *управление презентацией осуществляется с помощью левой клавиши мыши*
- *переход от одного слайда к другому и на гиперссылки по одиночному щелчку*
- *завершение презентации при нажатии кнопки выход*



переход к следующему слайду

возврат к содержанию

возврат к подтеме

возврат с гиперссылок



Проверь себя

- Устные вопросы
- Задача 1 ~~Задача 1.~~ Задача на доказательство
- Задача 2. Разложение векторов
- Задача 3. Сложение и вычитание векторов
- Задача 4. Скалярное произведение



Устные вопросы

Справедливо ли утверждение:

а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны?

б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены?

в) любые два равных вектора коллинеарны?

г) любые два сонаправленных вектора равны?

д) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$?

е) существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

Ответ

ы



Ответы

а) ДА

б) НЕТ (могут быть и противоположно направленными)

в) ДА

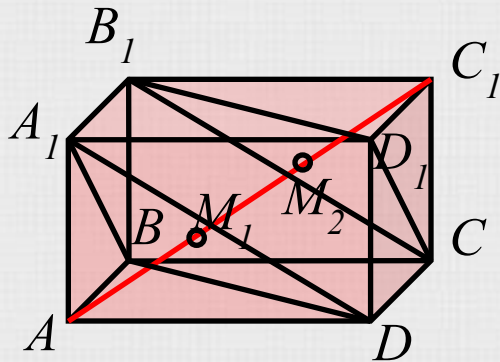
г) НЕТ (могут иметь разную длину)

д) ДА

е) ДА



Задача 1. Задача на доказательство



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – д

M_1, M_2 – точки пересечения

медиан $\triangle A_1 B D$ и $\triangle D_1 C B_1$

соответственно

Доказать :

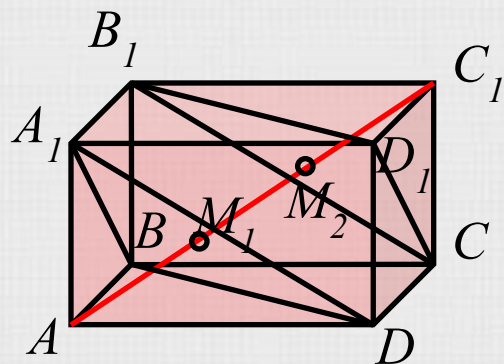
$$AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$$

Решени

е



Решение



Доказательство :

Рассм. тетраэдр AA_1BD

M_1 – центр оид $\triangle AA_1B$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ по правилу пар – да}$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$M \in AC_1, AM_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$\text{аналогично } M_2 \in AC_1, C_1M_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

следовательно $AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$ ч.т.д.

Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – д

M_1, M_2 – точки пересечения
медиан $\triangle A_1 BD$ и $\triangle D_1 CB_1$

соответственно

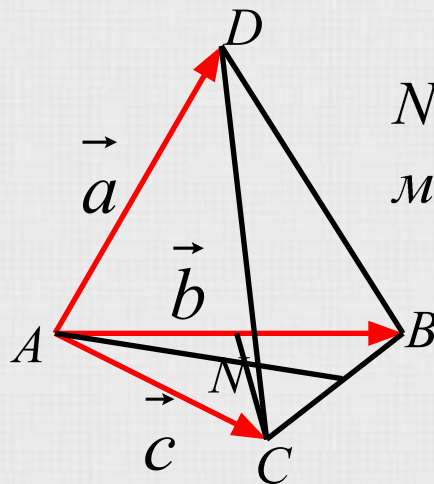
Доказать :

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$$



Задача 2. Разложение векторов

Разложите вектор по $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:



N – точка пересечения
медиан $\triangle ABC$

- а) $\overrightarrow{DB}$
- б) $\overrightarrow{CB}$
- в) $\overrightarrow{DC}$
- г) $\overrightarrow{DN}$

Решение



Решение

$$a) \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$б) \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$в) \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$г) \overrightarrow{DN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \right) =$$
$$= -\vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c}$$



Задача 3. Сложение и вычитание

Упростите выражения:

а) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK}$

б) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

в) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST}$

г) $\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK}$

д) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$

е) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$

Решение



Решение

$$a) \quad \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CK}$$

$$б) \quad \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA}$$

$$в) \quad \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TD}$$

$$г) \quad \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KL}$$

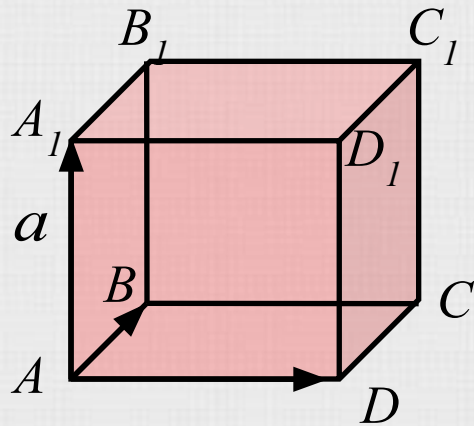
$$\begin{aligned} \delta) \quad & \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \\ & = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} = \\ & = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad & \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} = \\ & = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} = \\ & = \overrightarrow{AK} \end{aligned}$$



Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб
 $|\overrightarrow{AB}| = a$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1 C_1}$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1 A_1}$

в) $\overrightarrow{D_1 B} \cdot \overrightarrow{AC}$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

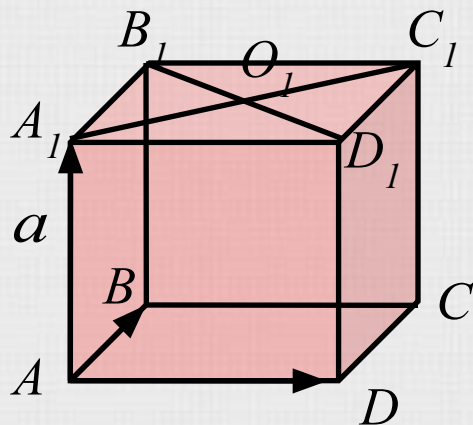
Решени

e



Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

$$|\overrightarrow{AB}| = a$$

$$A_1 C_1 \cap B_1 D_1 = O_1$$

д) $\overrightarrow{A_1 O_1} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1}$

е) $\overrightarrow{D O_1} \cdot \overrightarrow{B_1 O_1}$

ж) $\overrightarrow{B O_1} \cdot \overrightarrow{C_1 B}$

Решени

е



Решение

$$a) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = a^2$$

б) AC – диагональ квадрата

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = -\overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{AC} \cdot (-\overrightarrow{A_1C_1}) = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = -(a\sqrt{2})^2 = -2a^2$$

в) D_1B – диагональ куба

$$D_1B = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}a \text{ (т. Пифагора из } \triangle DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^3 \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \sqrt{3}$$

г) BA_1, BC_1 – диагонали квадратов

$\triangle A_1BC_1$ – равносторонний, $\angle A_1BC_1 = 60^\circ$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$$



Решение

д) A_1O_1 – половина диагонали квадрата

A_1C_1 – диагональ квадрата

$$\angle O_1A_1C_1 = 0^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

е) D_1O_1, B_1O_1 – половины диагонали квадрата

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$



Решение

ж) I способ – решение по определению:

$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

C_1B – диагональ квадрата

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

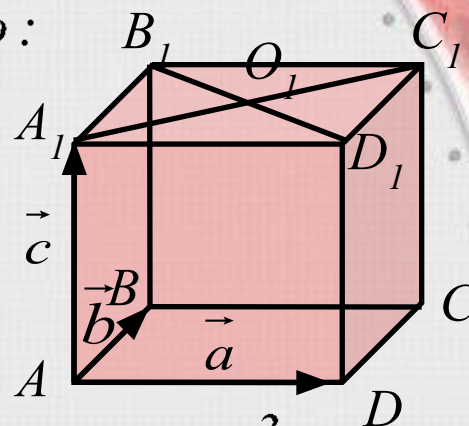
$$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1} \cdot (-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3}{2}a^2$$

II способ – разложение по базису:

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) = -(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2) = -(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2) = -\frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$



Об авторе



*Презентация выполнена
ученицей 11 «Б» класса средней
школы №316 Фрунзенского
района с углубленным изучением
английского языка Силичевой
Алисой.*

*Огромная благодарность
выражается руководителю
проекта Подольской Анастасии
Васильевне.*

