

Параллельные прямые в пространстве

• ПЛОСКОСТЬ

- Прямые, не имеющие общих точек, называются *параллельными*.
- АПП: Через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной и притом только одна.

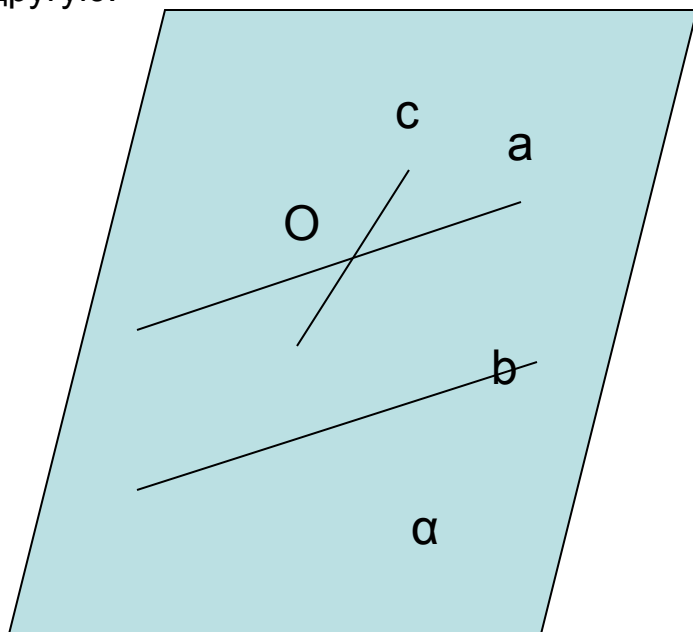
• ПРОСТРАНСТВО

- Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются **параллельными**.
- **Теорема (о существовании и единственности прямой, параллельной данной):**
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной и притом только одна.

Как доказывается истинность утверждения?
Как доказывается то, что утверждение ложно?

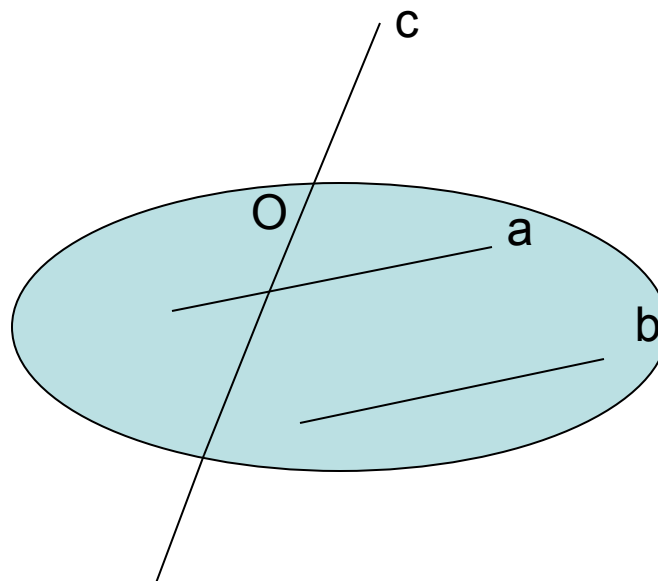
• ПЛОСКОСТЬ

- Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.



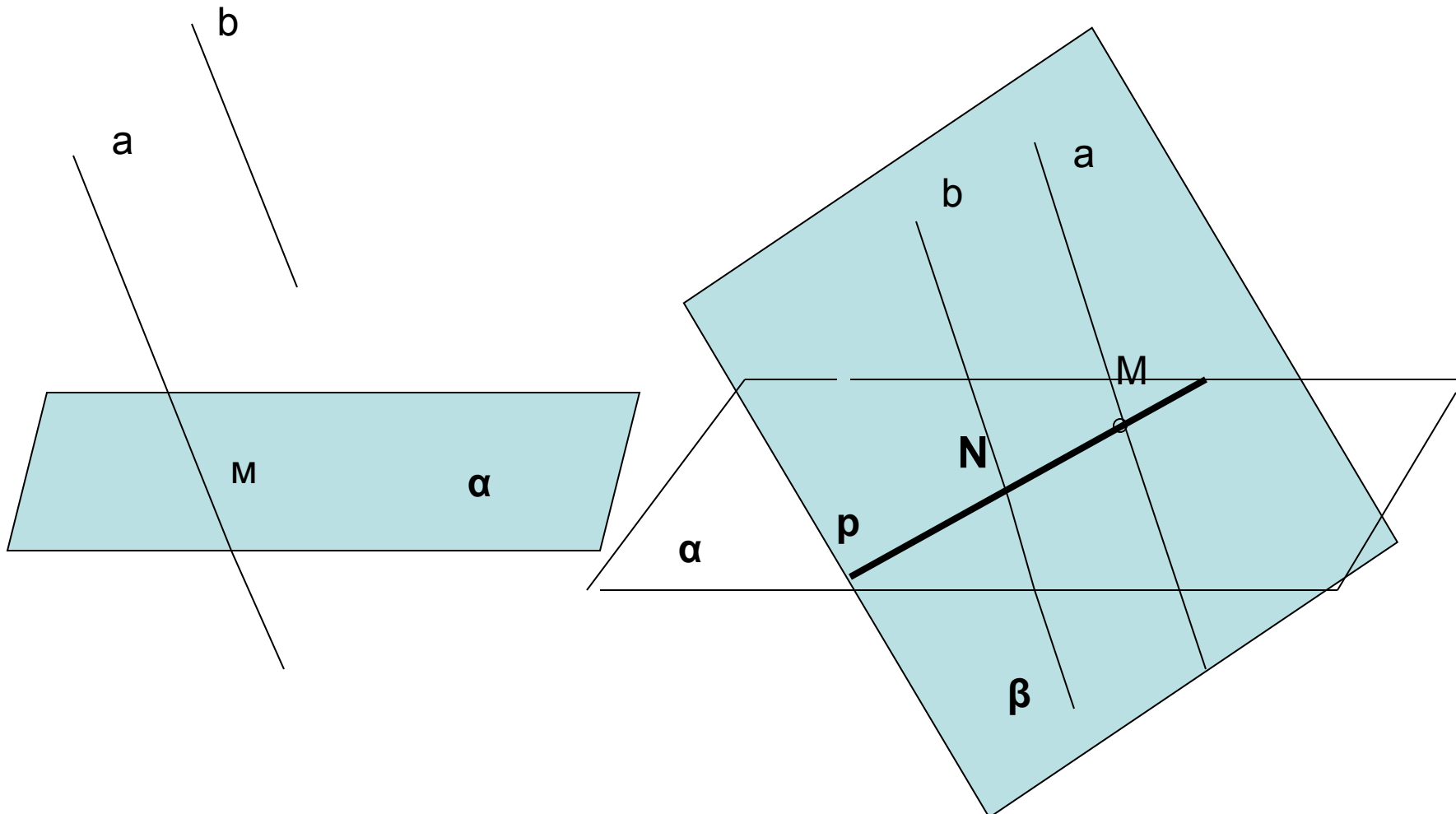
• ПРОСТРАНСТВО

- Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

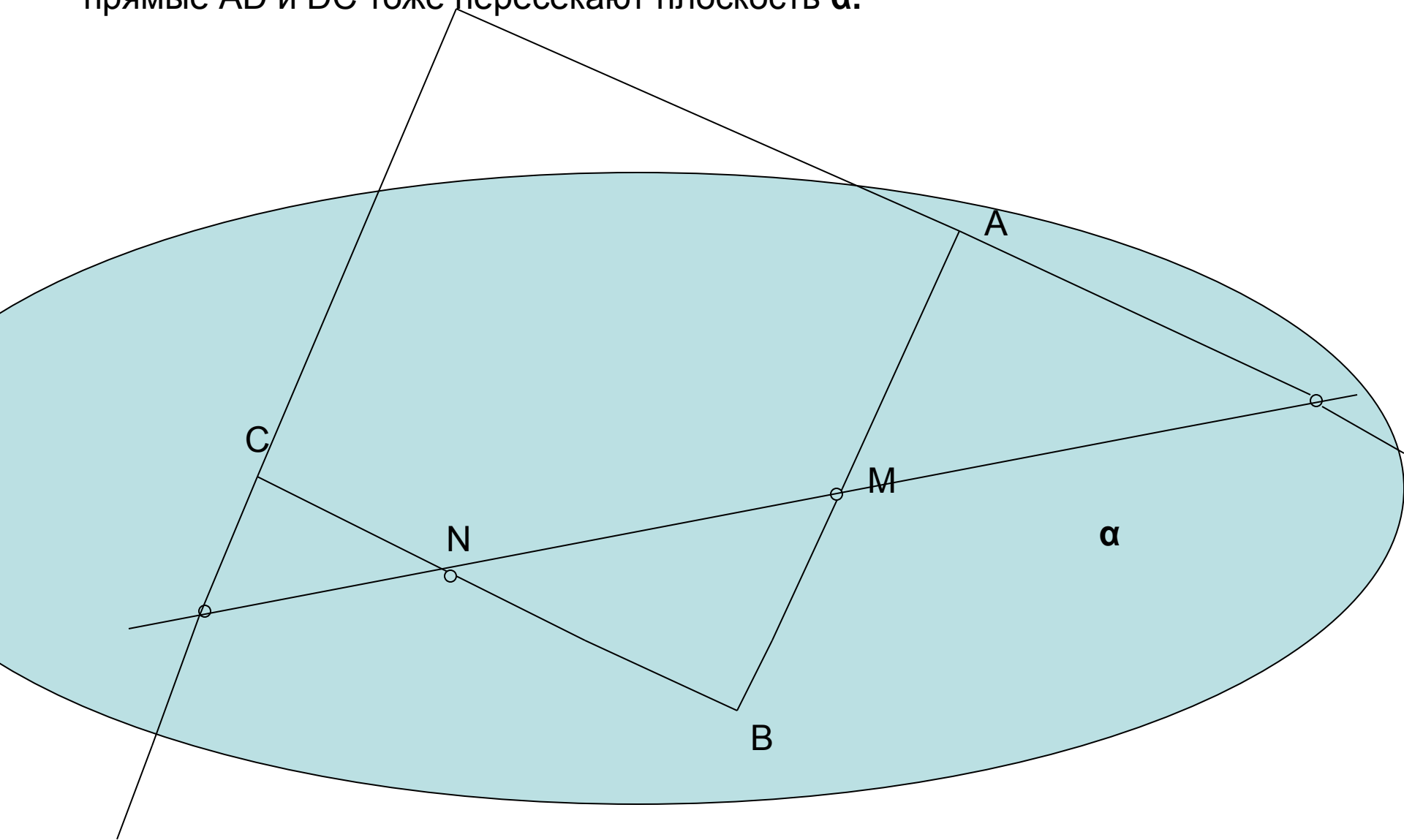


ЛЕММА: Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая пересекает эту плоскость.

(Лемма – это утверждение, предшествующее теореме и использующееся при доказательстве этой теоремы)

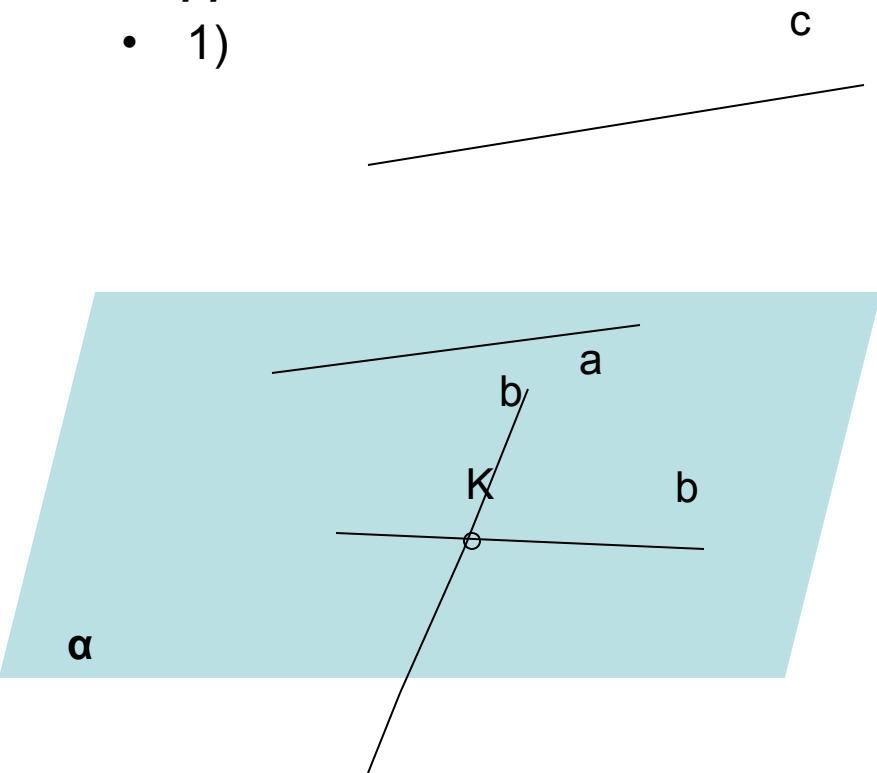


№ 19. Стороны параллелограмма AB и BC пересекают плоскость α . Докажите, что прямые AD и DC тоже пересекают плоскость α .

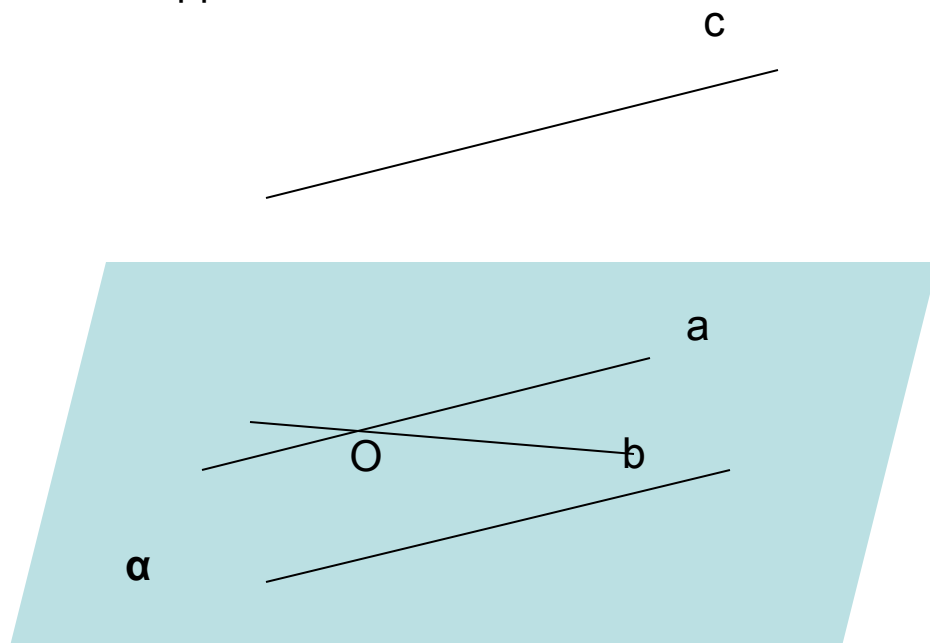


Теорема: Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
(признак параллельности прямых)

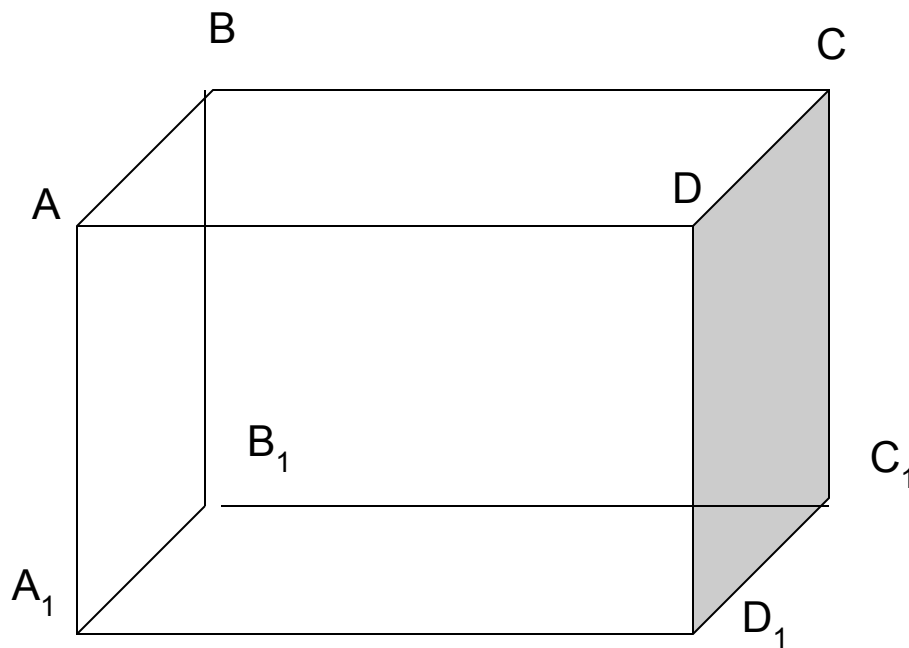
- **Дано:** $a \parallel c$, $b \parallel c$.
- **Доказать:** $a \parallel b$, т.е.:
 - 1) a и b лежат в одной плоскости
 - 2) a и b не пересекаются.
- **Доказательство:**
- 1)



- **Доказательство:**
- 2) от обратного
- Пусть: a и b пересекаются, тогда.....

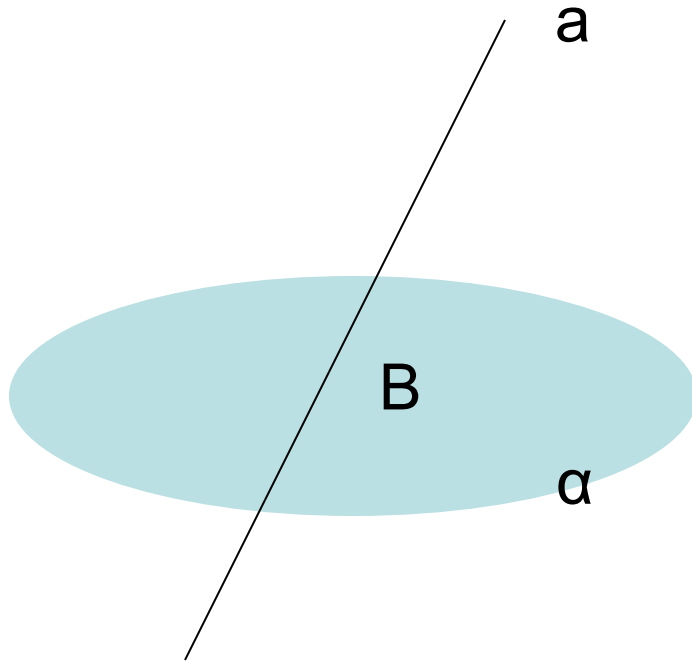


Дан параллелепипед, грани которого являются параллелограммами. Доказать: 1) $AB \parallel D_1C_1$; 2) $DD_1 \parallel BB_1$; 3) $AD \parallel (A_1B_1C_1)$; 4) Каким плоскостям параллельна прямая D_1C_1 ; **5) AA_1 и DC скрещивающиеся прямые; 6) B_1C_1 и DD_1 скрещивающиеся прямые.**

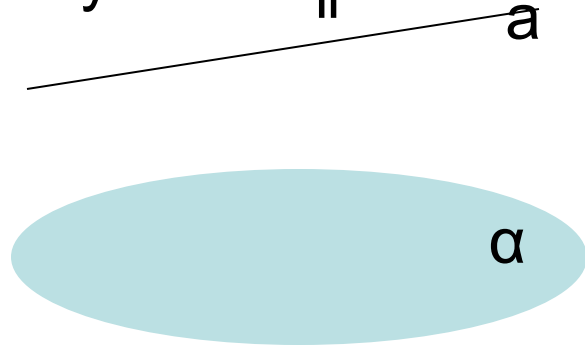


Взаимное расположение прямой и плоскости

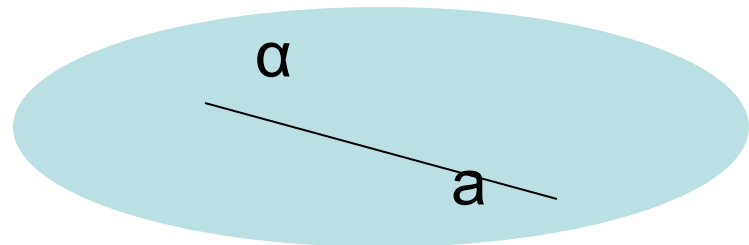
- 1 случай: $a \cap \alpha$



- 3 случай: $a \parallel \alpha$



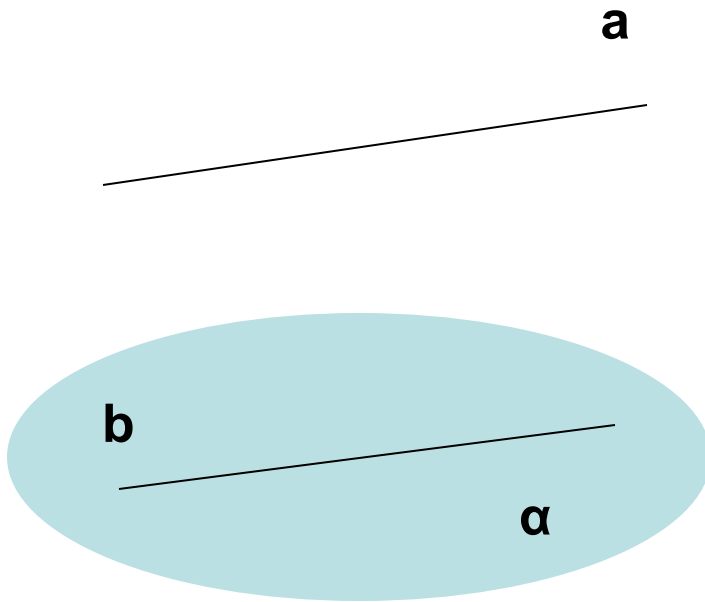
- 2 случай: a содержится в α или плоскость α проходит через прямую a



Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна и самой плоскости

- *Дано*: a не содержится в α ,
 b содержится в α , $a \parallel b$.
- *Доказать*: $a \parallel \alpha$



• *Доказательство*

Метод «от обратного»

Пусть a не параллельна α . Тогда...
 a содержится в α .

или

a пересекает α .

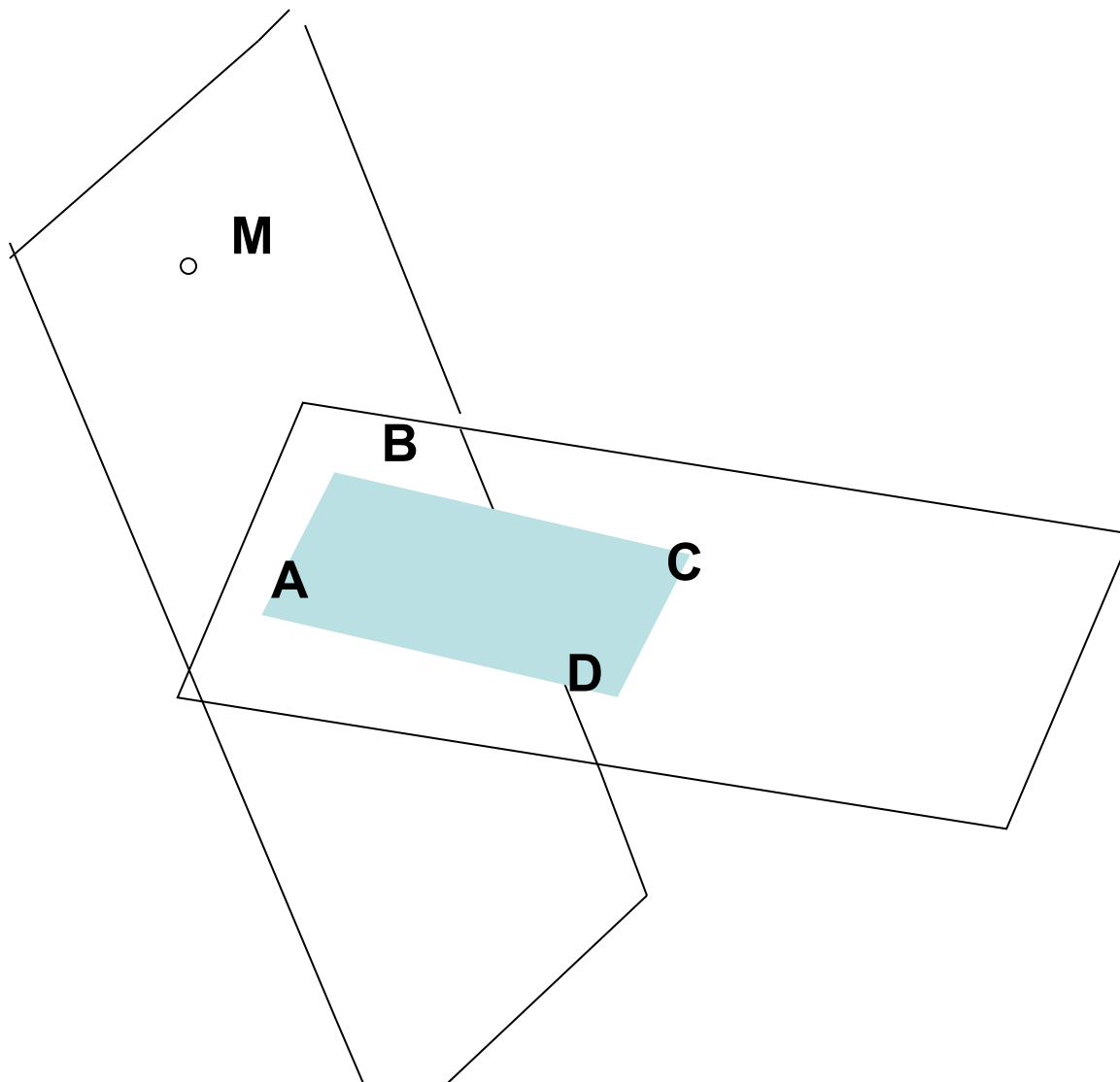
По лемме, так как $a \parallel b$, то b тоже
пересекает α .

Это противоречит условию теоремы.

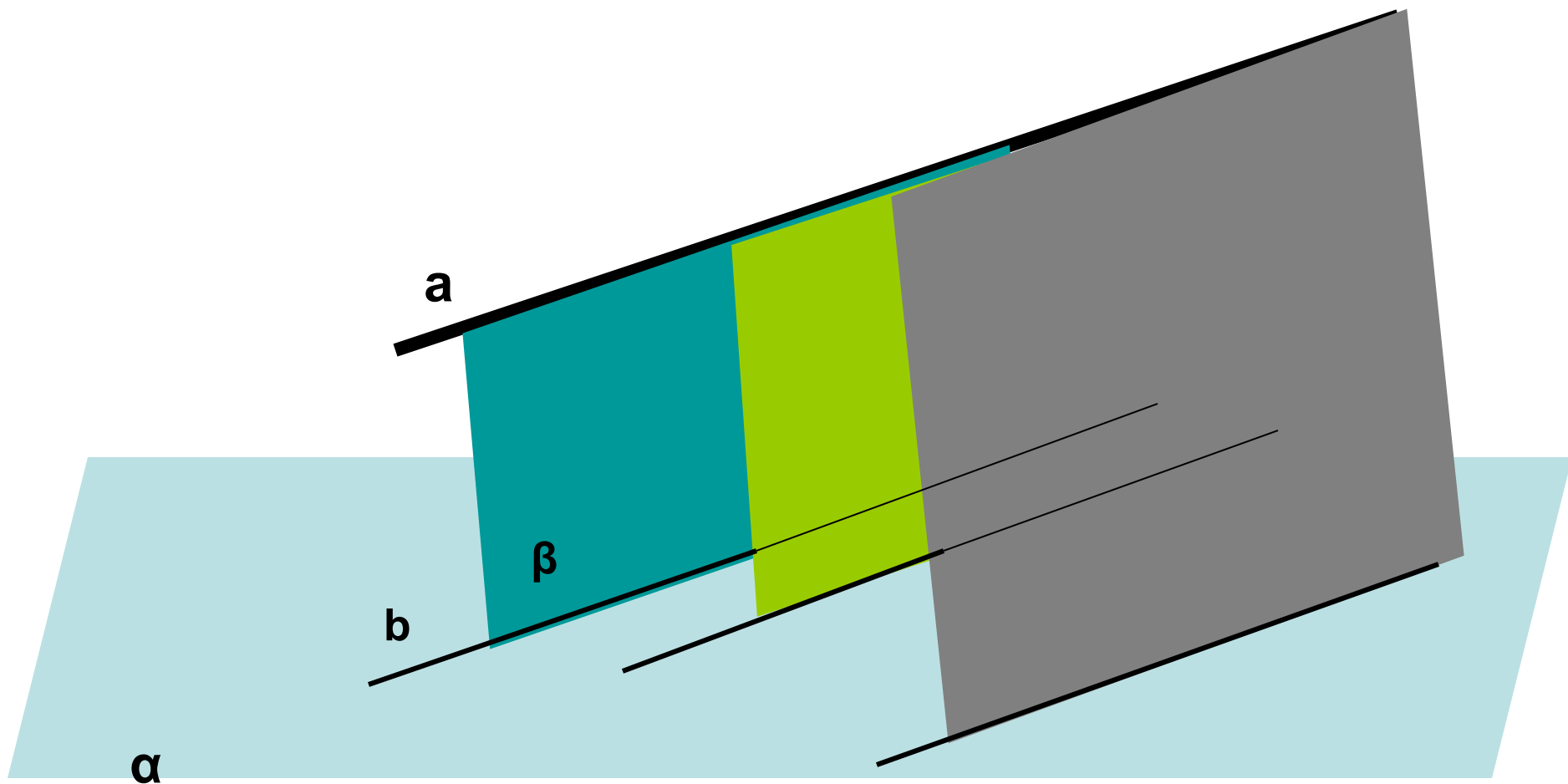
Значит, наше предположение
неверно.

Следовательно $a \parallel \alpha$

№ 23 Точка M не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$.
Докажите, что $CD \parallel (ABM)$



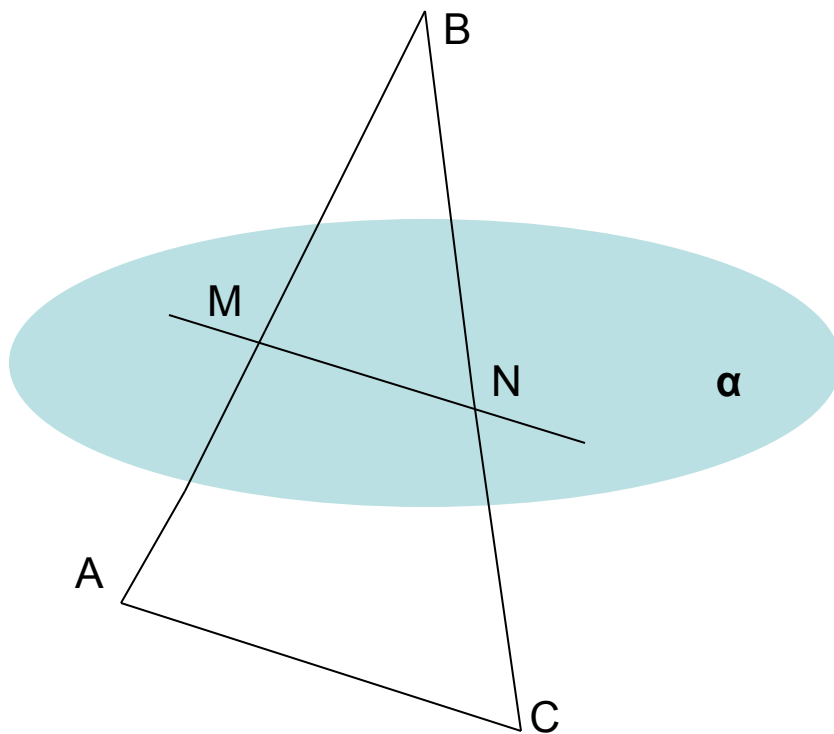
Свойство 1. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает ее, то линия пересечения параллельна данной прямой



Задача. Плоскость α пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно. Известно, что $AC \parallel \alpha$, $AB:AM=8:3$.

1) Докажите, что $BN:BC=5:8$;

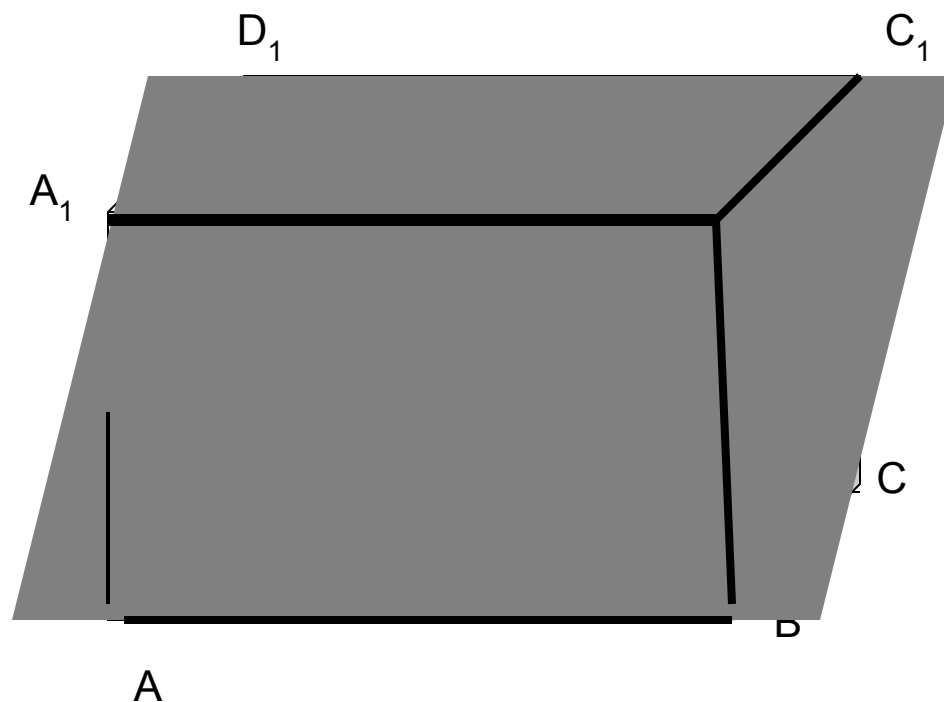
2) Найдите BN .



Свойство 2

- **Лемма:** Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая пересекает эту плоскость.
- **Свойство 2.** Если одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости, то другая прямая...
 - либо также параллельна данной плоскости,
 - либо лежит в этой плоскости.

Взаимное расположение прямых в пространстве
назвать несколько пар **параллельных** прямых
несколько пар **пересекающихся** прямых
несколько пар прямых, **не лежащих** в одной плоскости



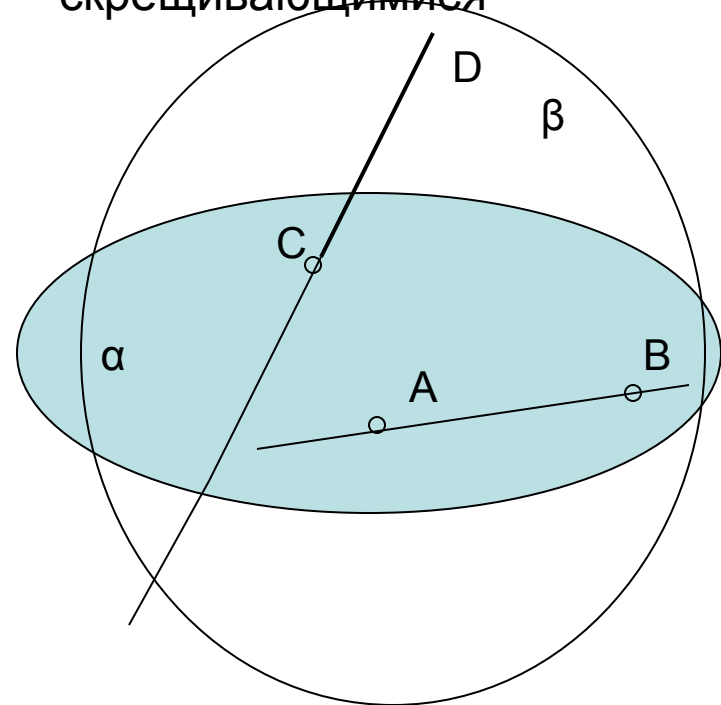
СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

- **Определение**

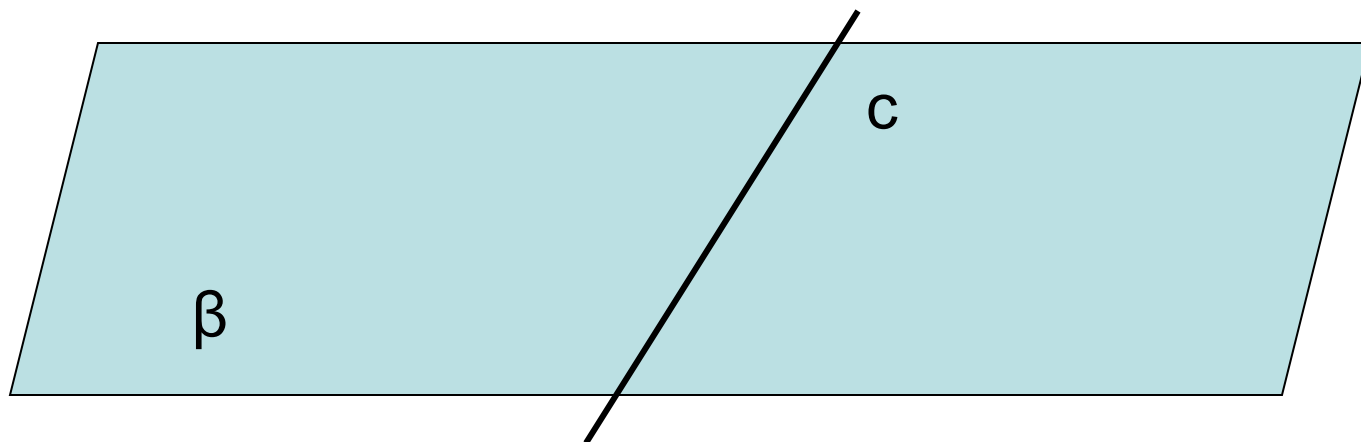
Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости

- **Признак**

Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые являются скрещивающимися

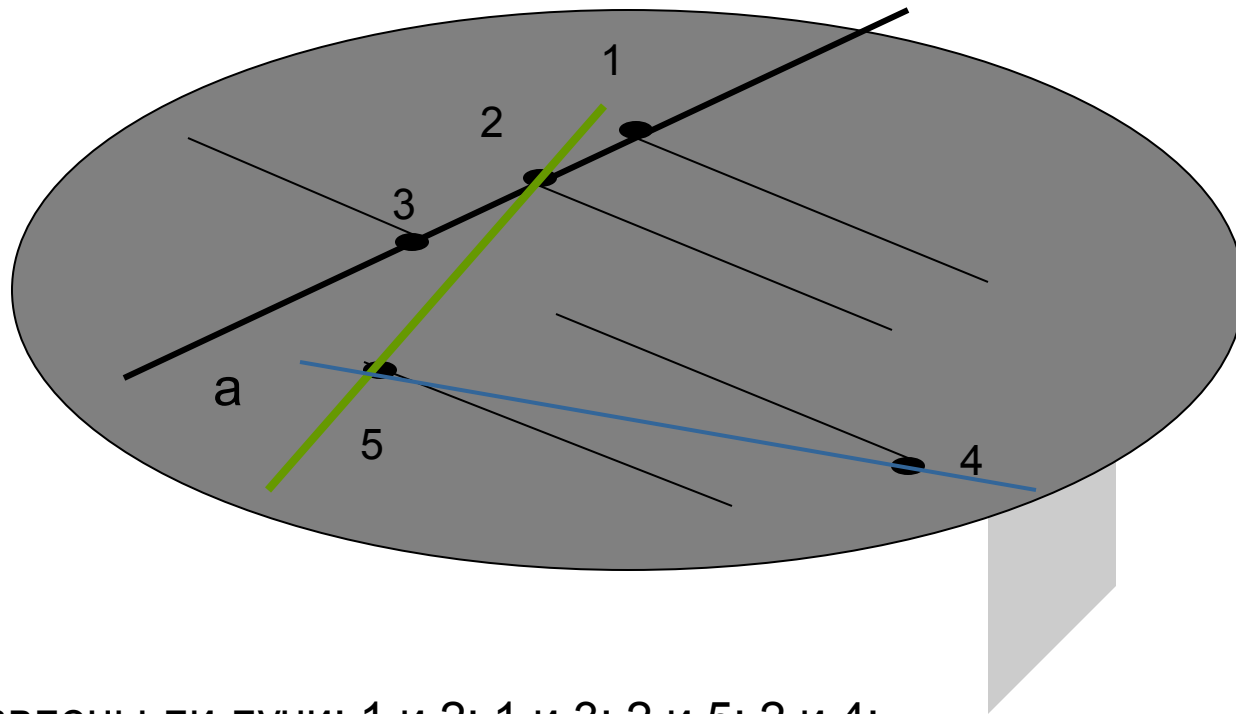


- Любая прямая c , лежащая в плоскости β , делит эту плоскость на две полуплоскости с границей c .



Углы с сонаправленными сторонами

Определение: Два луча, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей, проходящей через их начала.

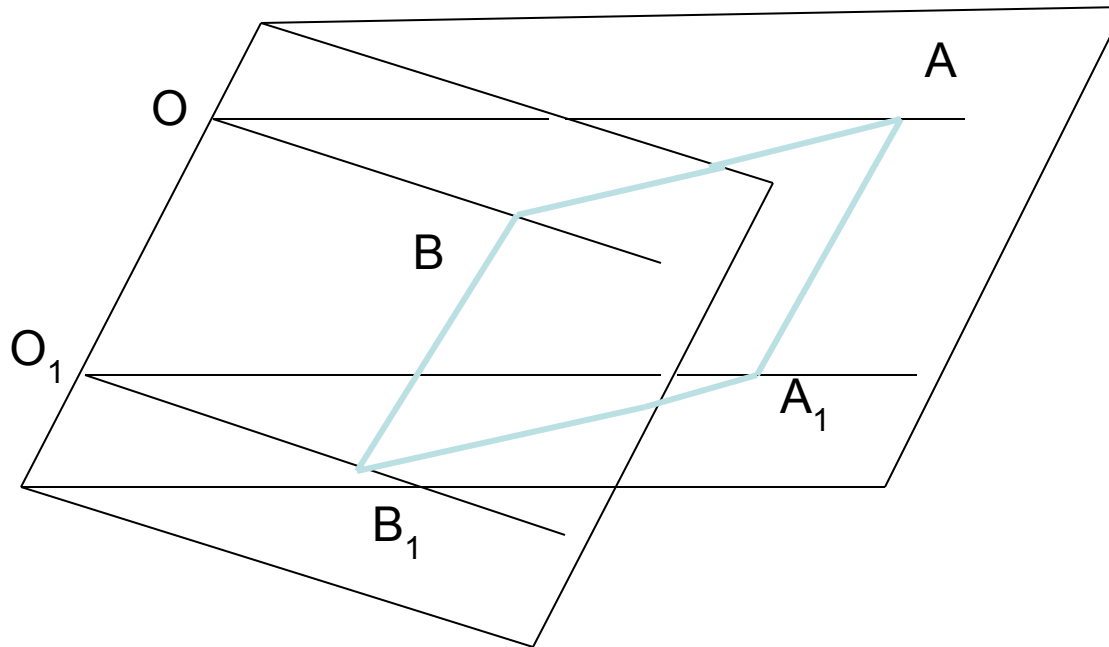


- Сонаправлены ли лучи: 1 и 2; 1 и 3; 2 и 5; 2 и 4; 5 и 4?

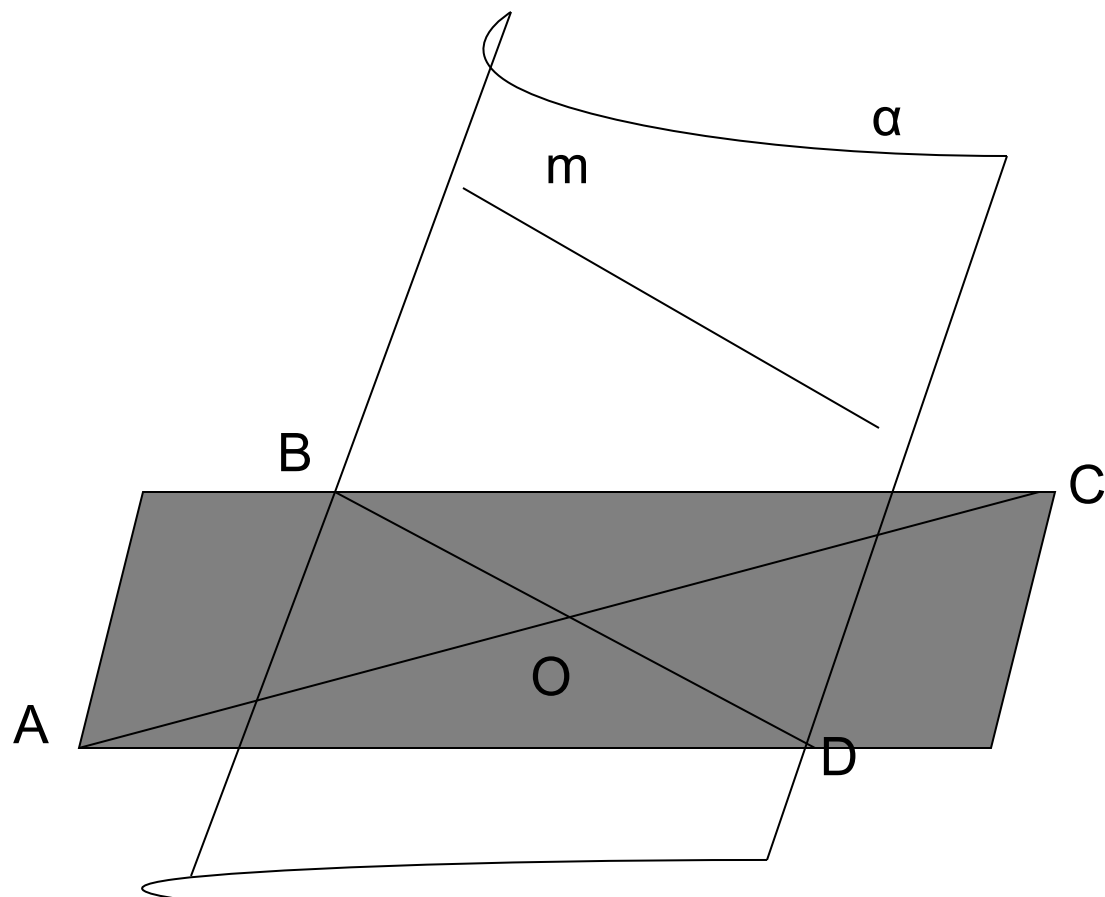
Теорема: Если стороны двух углов являются сонаправленными лучами, то такие углы равны

Доказательство:

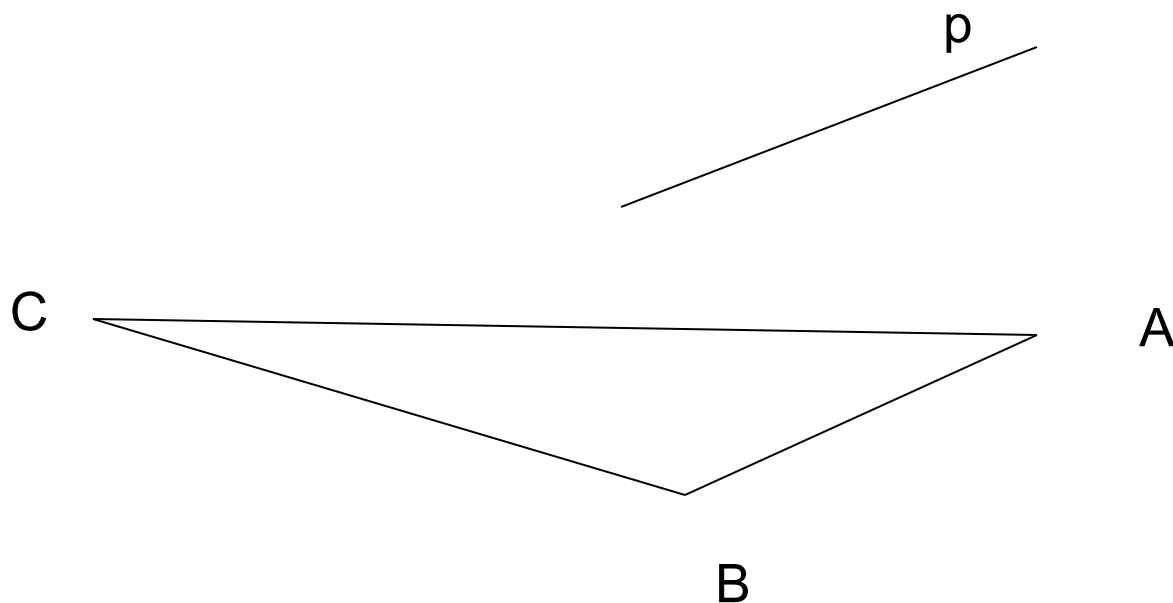
рассмотрим четырехугольники 1) OAA_1O_1 , 2) OBV_1O_1 , 3) BAA_1V_1 , 4) треугольники OAB и $O_1A_1V_1$

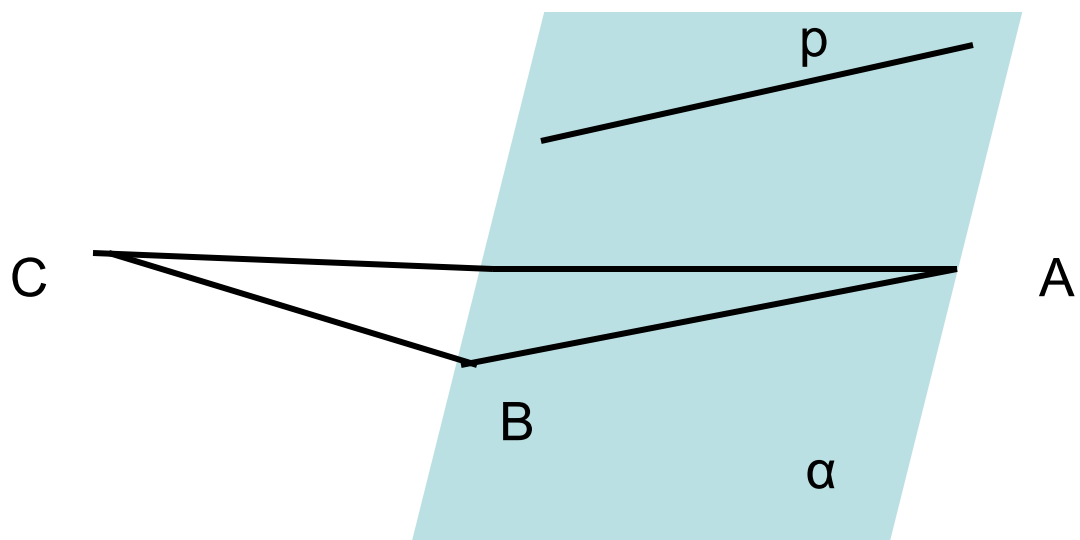


Задача № 46



Задача: Прямая p , не лежащая в плоскости треугольника ABC , параллельна стороне AB . Найти угол между прямыми p и BC , если угол ABC равен 132° .

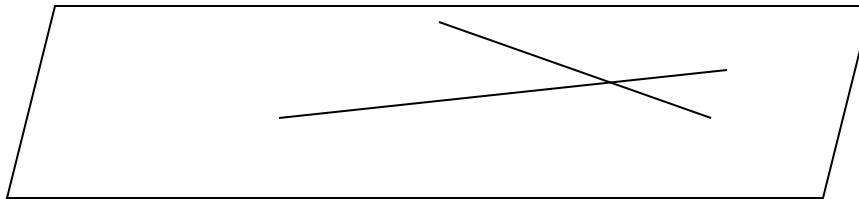
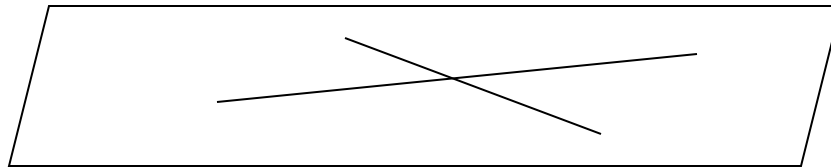




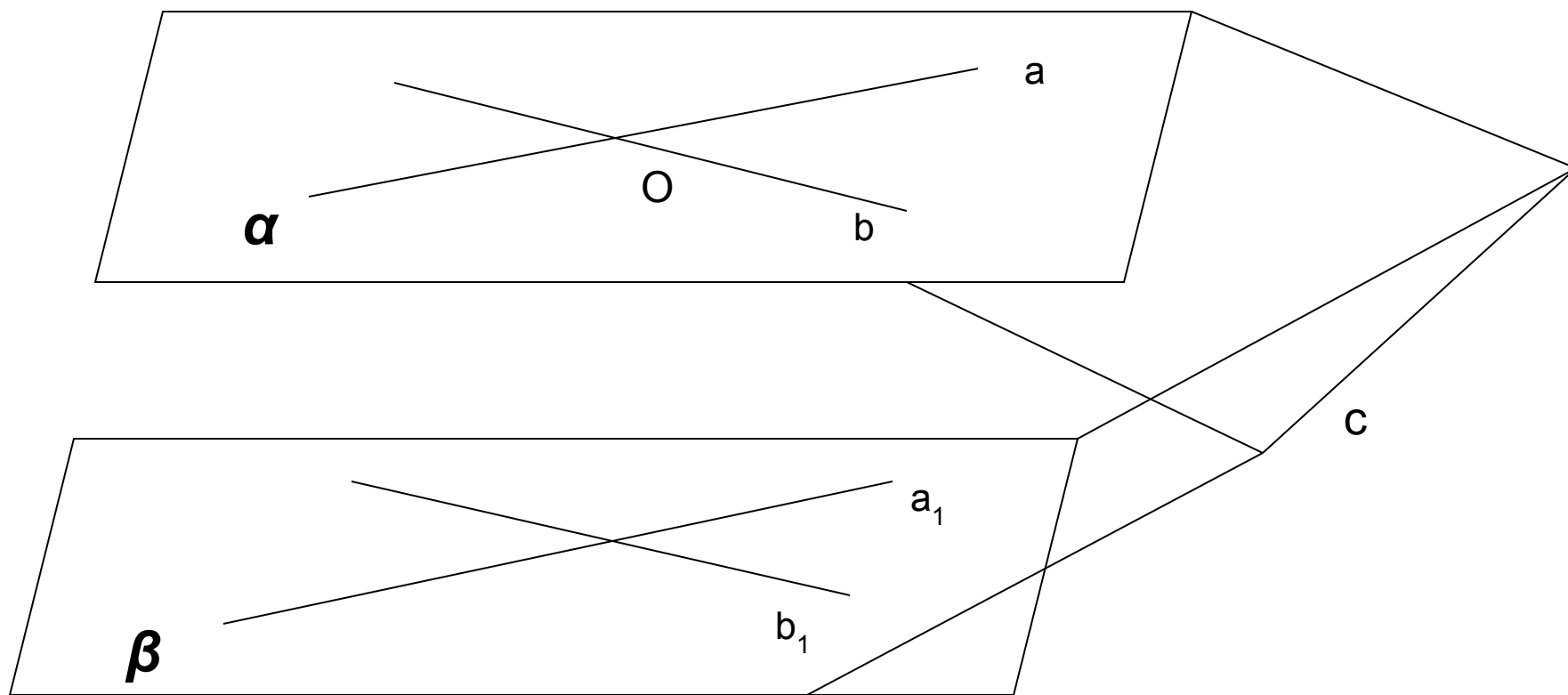
Параллельность плоскостей

Опр. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

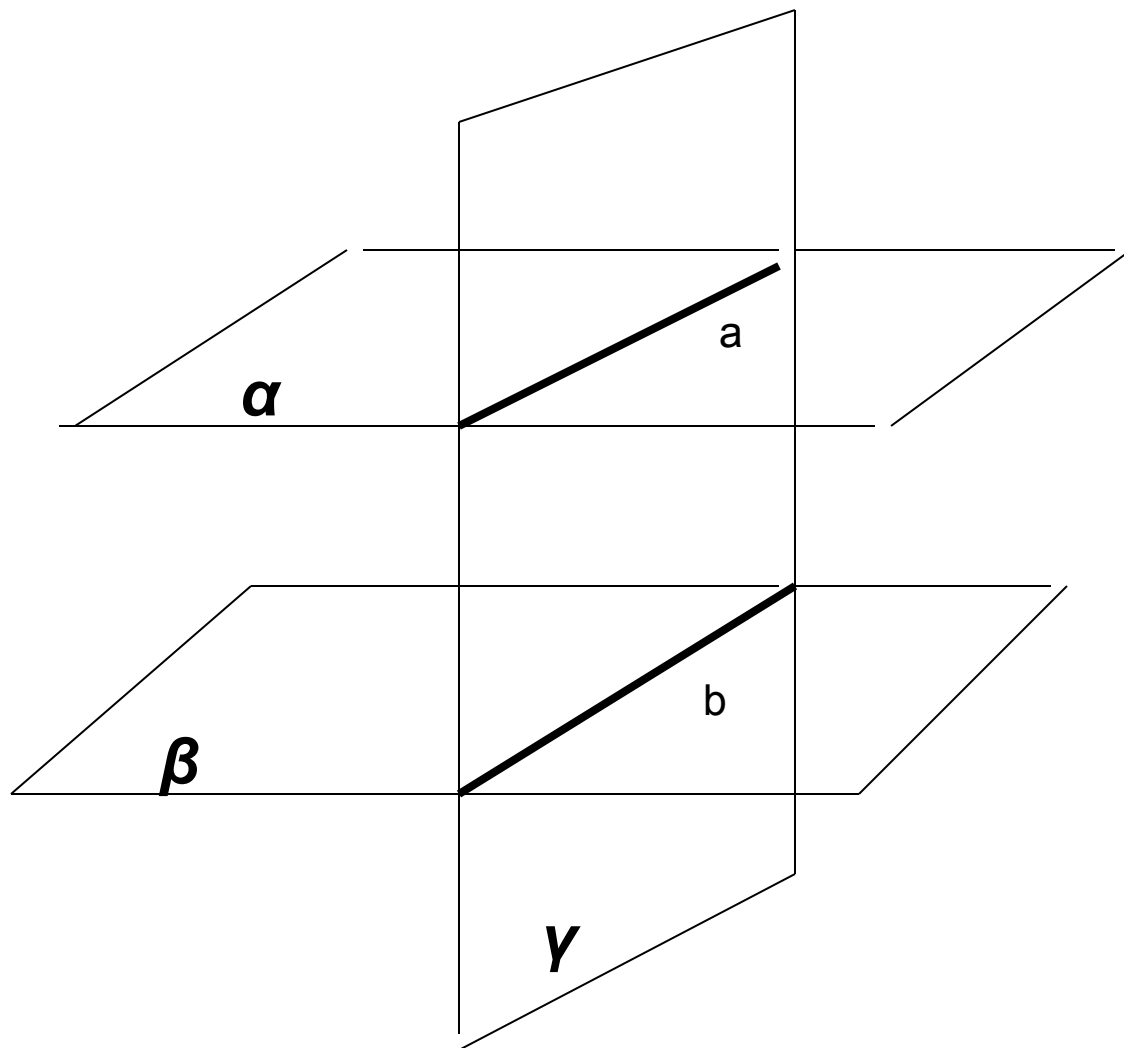
Признак: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.



Метод от обратного: Пусть α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по прямой c .



Свойство 1: Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения **параллельны**.



Свойство 2: Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, **равны**.

