

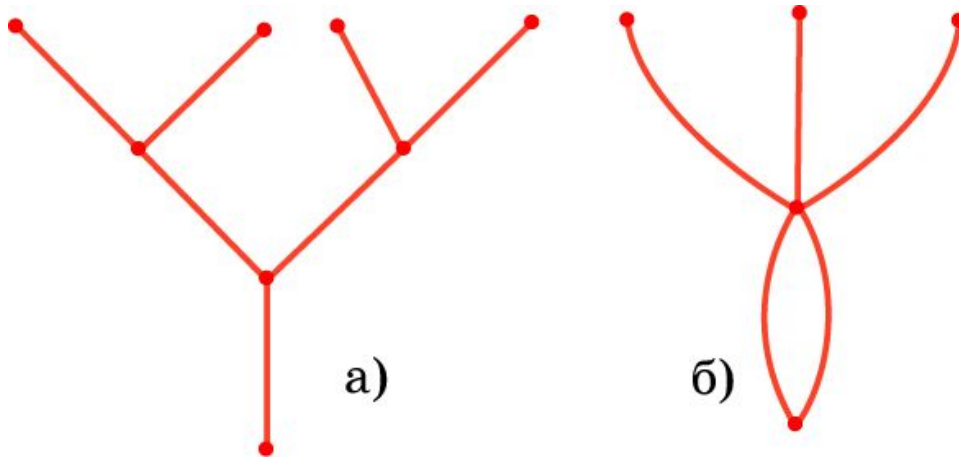
Определение графа

Фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется **плоским графом**, или просто **графом**. Точки называются **вершинами**, а отрезки – ребрами графа.

Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из ребер графа.

Граф называется **простым**, если его ребра не пересекаются, т.е. не имеют общих внутренних точек.

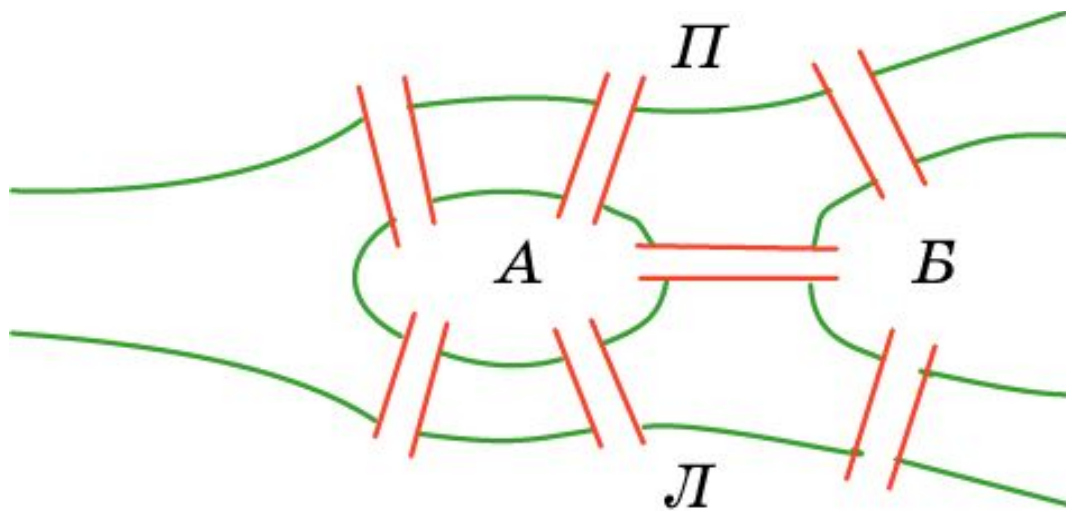
Вместо отрезков в качестве ребер графов рассматриваются также кривые линии.



Задача Эйлера

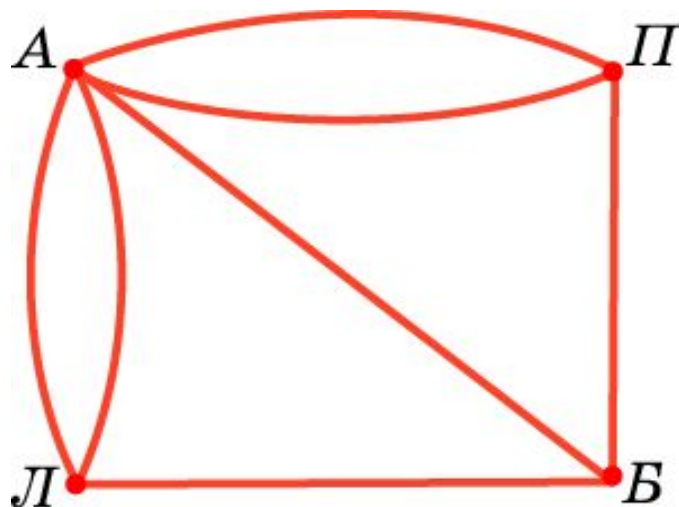
Теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

Задача. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (Л - левый берег, П - правый берег, А и Б - острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?



Уникурсальные графы

На рисунке представлен граф, соответствующий задаче Эйлера, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – берегам и островам.



Требуется выяснить, можно ли нарисовать этот граф «одним росчерком», т.е. не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждому ребру ровно один раз. Такие графы называются **уникурсальными**.

Теорема

Индексом вершины графа называется число ребер, сходящихся в этой вершине (ребра, с началом и концом в данной вершине считаются дважды).

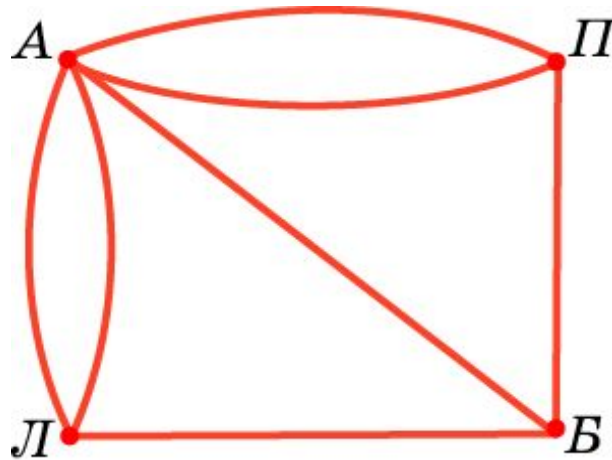
Теорема. Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум.

Доказательство. Если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют четный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечетного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечетным индексом нет.

Верно и обратное: Если у связного графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум, то он является уникурсальным.

Решение задачи Эйлера

Решение задачи Эйлера. Найдем индексы вершин графа задачи Эйлера. Вершина А имеет индекс 5, Б - 3, П - 3 и Л - 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Значит, нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.



Вопрос 1

Какая фигура называется графом?

Ответ: Графом называется фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек.

Вопрос 2

Какой граф называется уникурсальным?

Ответ: Граф называется уникурсальным, если его можно ли нарисовать «одним росчерком», т.е. не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждому ребру ровно один раз.

Вопрос 3

Что называется индексом вершины графа?

Ответ: Индексом вершины графа называется число ребер, сходящихся в этой вершине (ребра, с началом и концом в данной вершине считаются дважды).

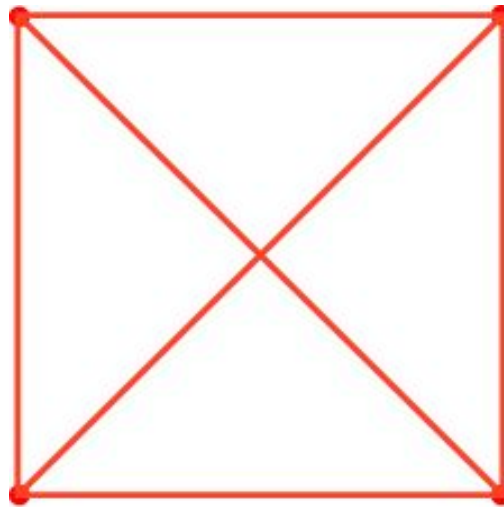
Вопрос 4

Что можно сказать об индексах вершин уникурсального графа?

Ответ: Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум.

Упражнение 1

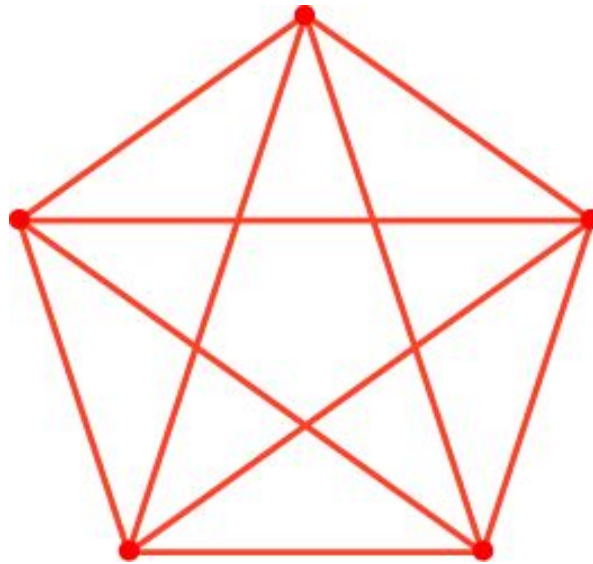
В графе 4 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



Ответ: 6.

Упражнение 2

В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



Ответ: 10.

Упражнение 3

Выясните, какие графы, изображенные на рисунке, являются уникурсальными?



а)



б)



в)



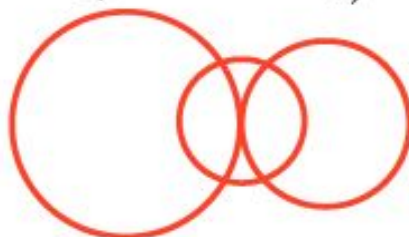
г)



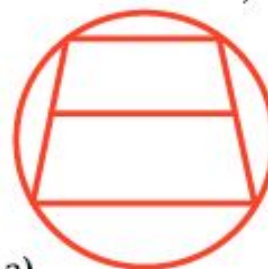
д)



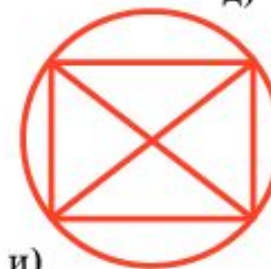
е)



ж)



з)



и)

Ответ: а), б), г), д), ж), з).

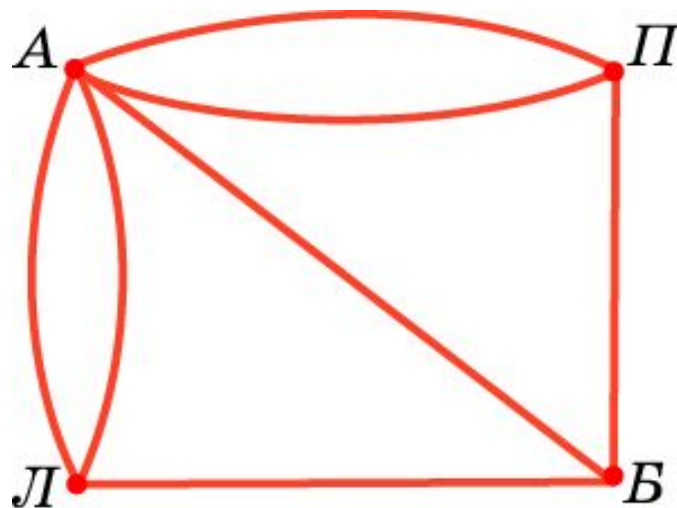
Упражнение 4

Может ли граф иметь: а) одну вершину нечетного индекса; б) две вершины нечетного индекса; в) три вершины нечетного индекса; г) четыре вершины нечетного индекса?

Ответ: а), в) Нет; б), г) да.

Упражнение 5

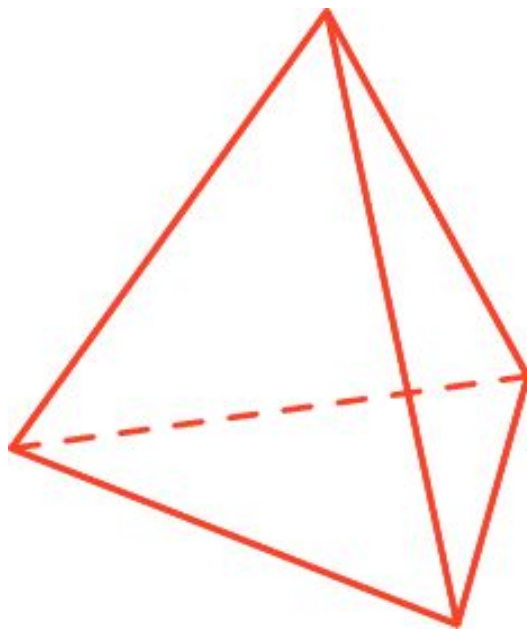
Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придется пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?



Ответ: Два.

Упражнение 6

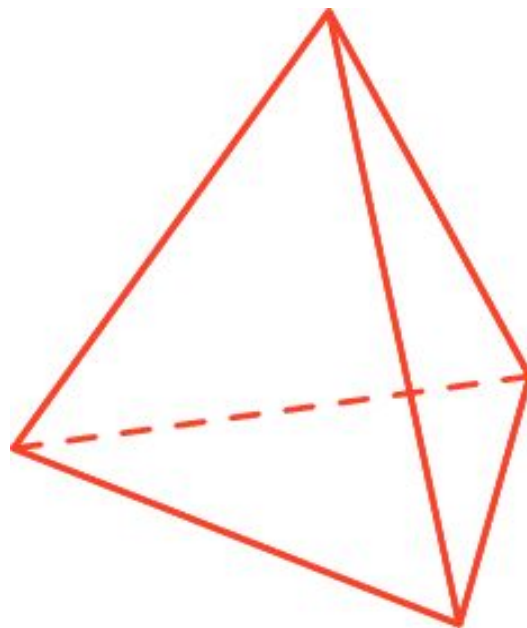
Можно ли обойти все ребра тетраэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



Ответ: Нет.

Упражнение 7

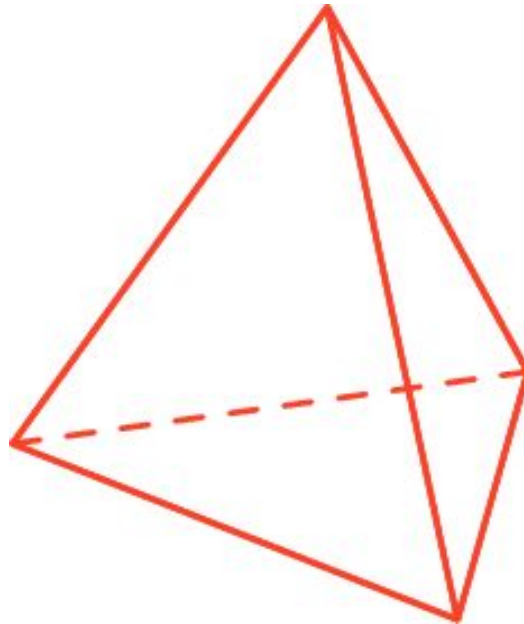
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра тетраэдра?



Ответ: Одно.

Упражнение 8

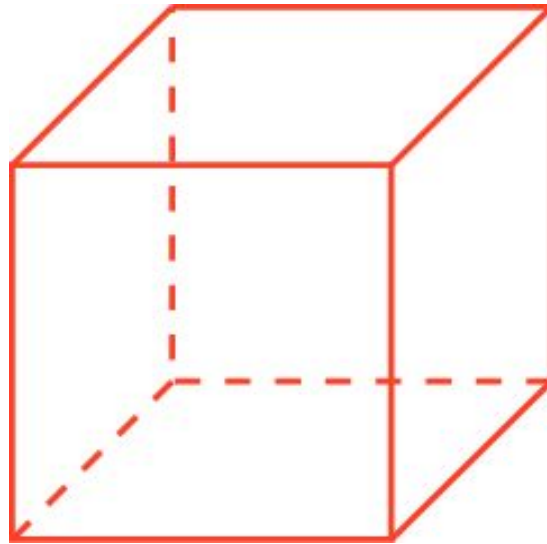
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра тетраэдра и вернуться в исходную вершину?



Ответ: Два.

Упражнение 9

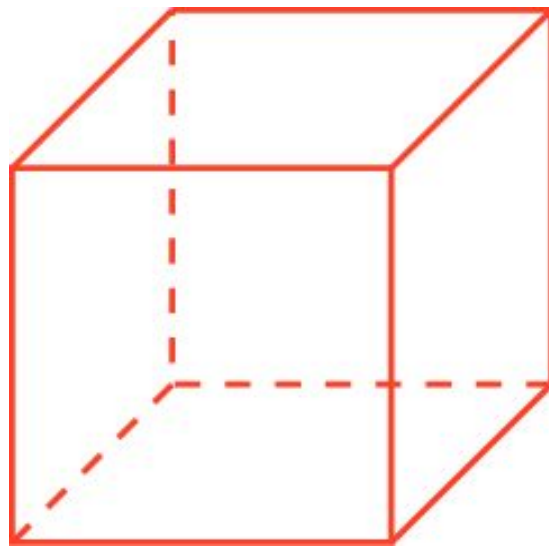
Можно ли обойти все ребра куба, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



Ответ: Нет.

Упражнение 10

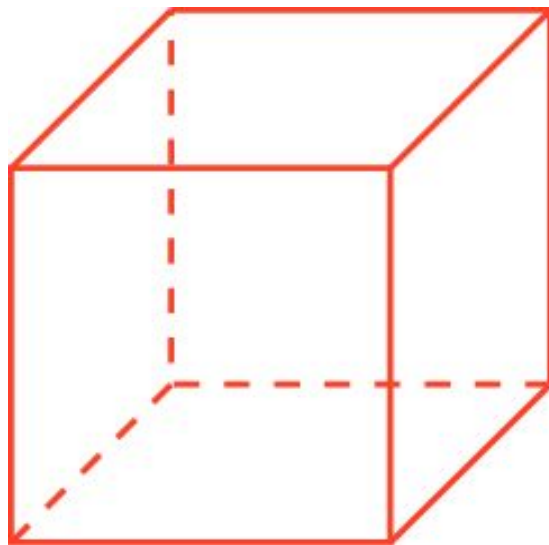
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра куба?



Ответ: Три.

Упражнение 11

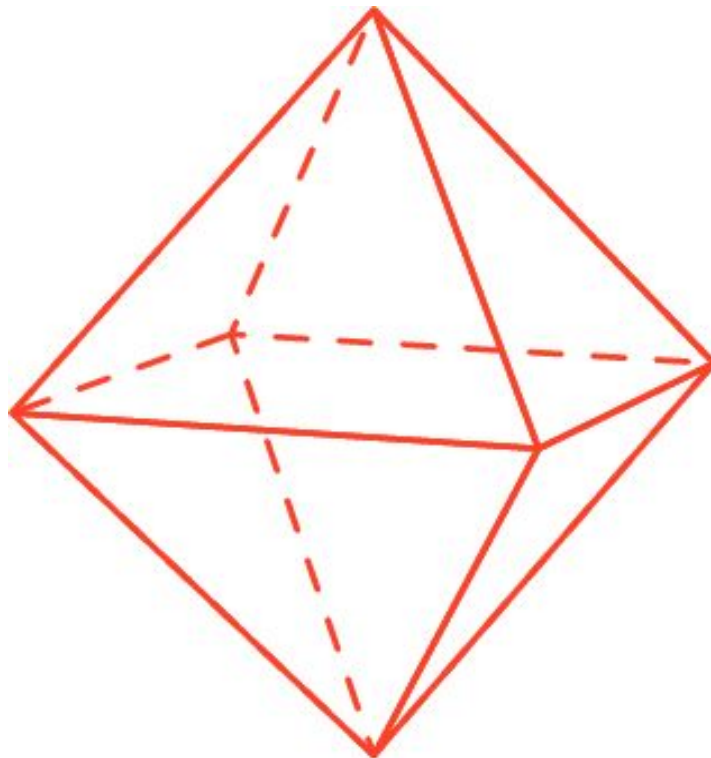
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра куба и вернуться в исходную вершину?



Ответ: Четыре.

Упражнение 12

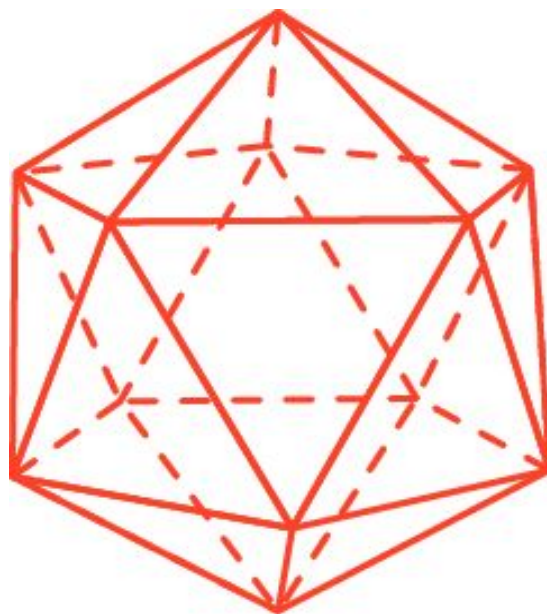
Можно ли обойти все ребра октаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



Ответ: Да.

Упражнение 13

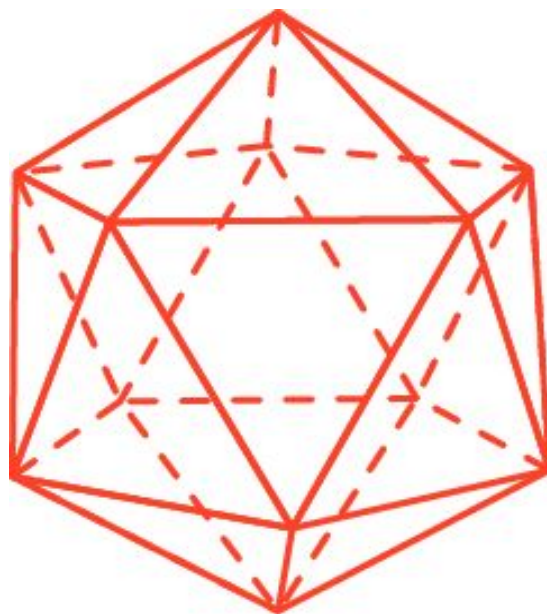
Можно ли обойти все ребра икосаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



Ответ: Нет.

Упражнение 14

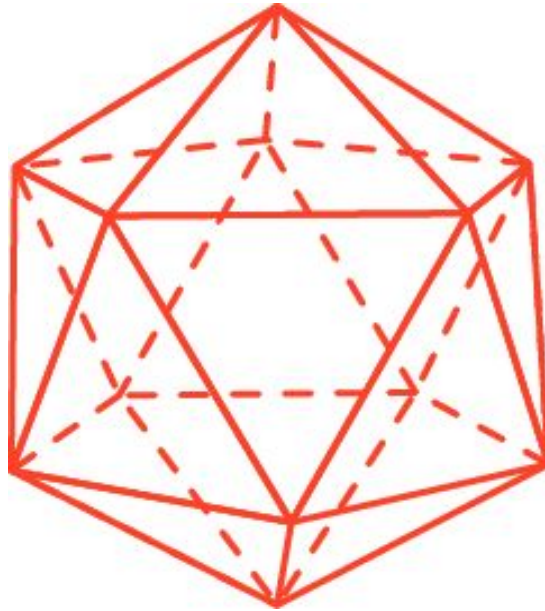
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра икосаэдра?



Ответ: Пять.

Упражнение 15

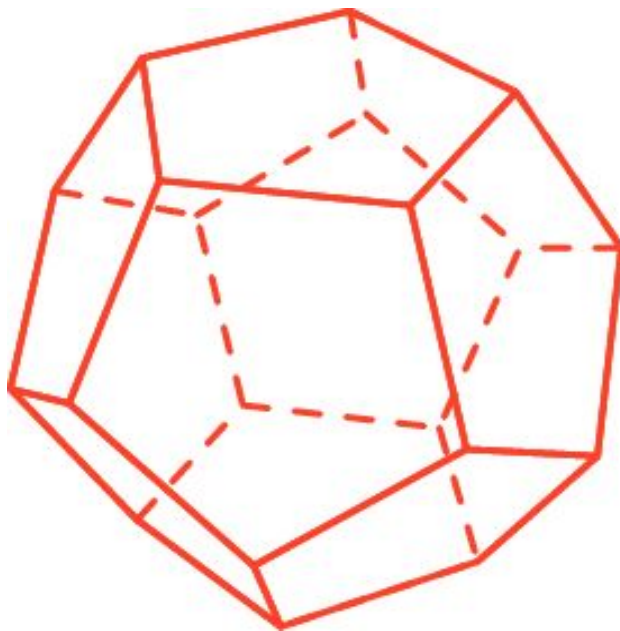
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра икосаэдра и вернуться в исходную вершину?



Ответ: Шесть.

Упражнение 16

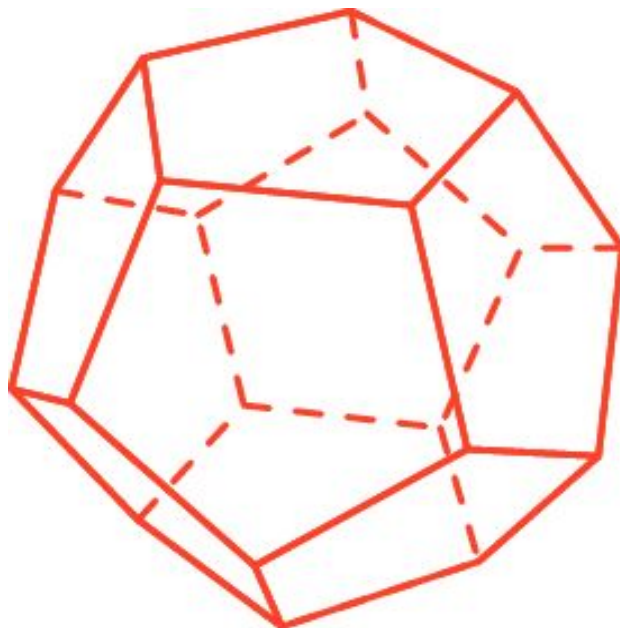
Можно ли обойти все ребра додекаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



Ответ: Нет.

Упражнение 17

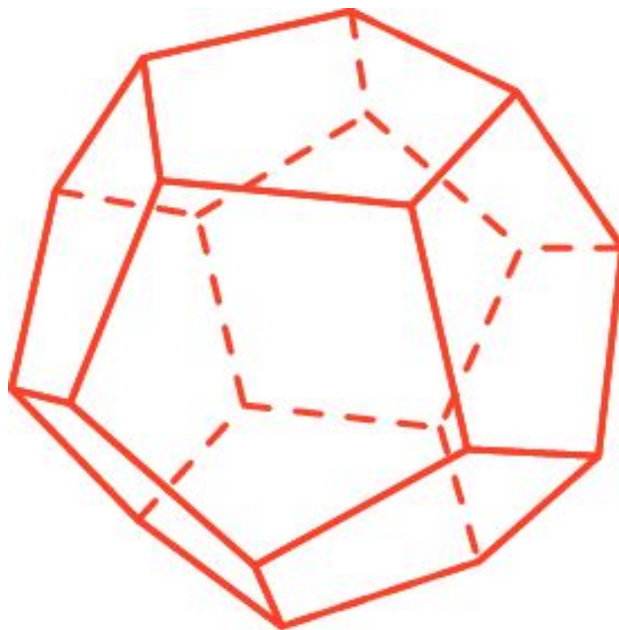
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра додекаэдра?



Ответ: Девять.

Упражнение 18

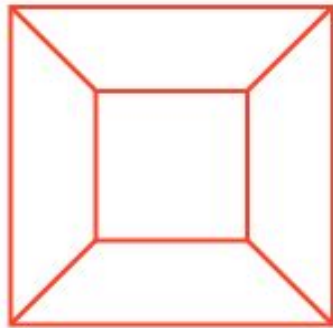
Какое наименьшее число ребер придется пройти дважды, чтобы обойти все ребра додекаэдра и вернуться в исходную вершину?



Ответ: Десять.

Упражнение 19

Каким правильным многогранникам соответствуют графы, изображенные на рисунке?



а)



б)



в)



г)

Ответ: а) куб; б) октаэдр; в) додекаэдр; г) икосаэдр.