

Б. Кавальери

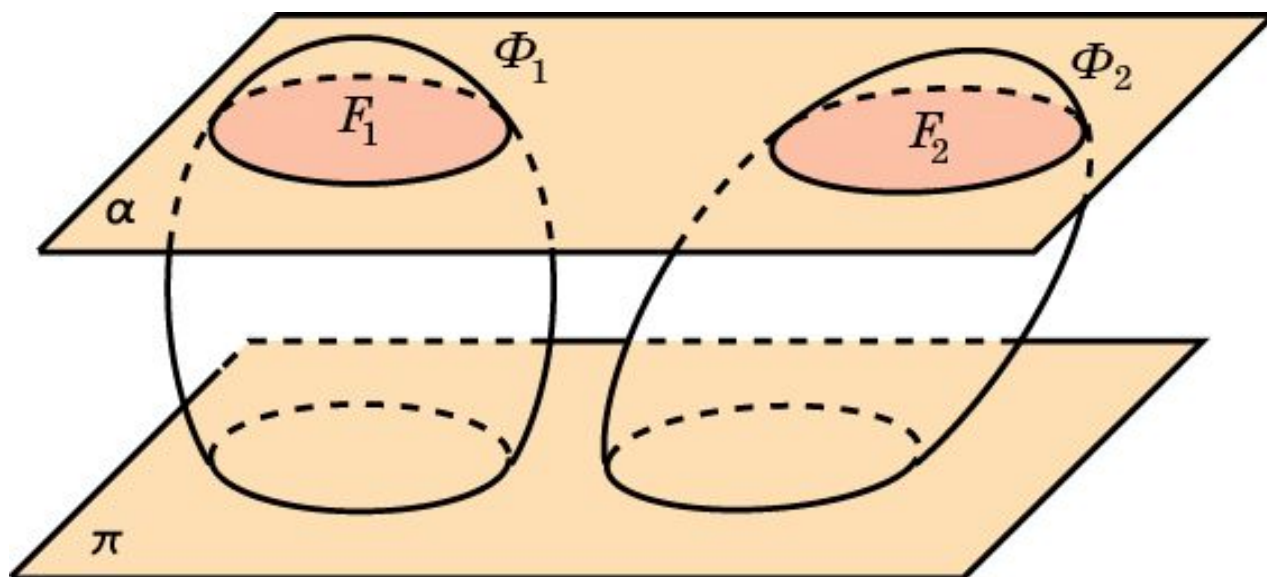


Бонавентуре Кавальери (1598 – 1647) принадлежат труды по тригонометрии, логарифмам, геометрической оптике и т.д., но главным делом его жизни была книга «Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного», в которой он предложил способ вычисления площадей плоских фигур и объемов пространственных тел, основанный на сравнении их сечений.

Метод вычисления объемов пространственных тел, предложенный Б. Кавальери, называется **принципом Кавальери**.

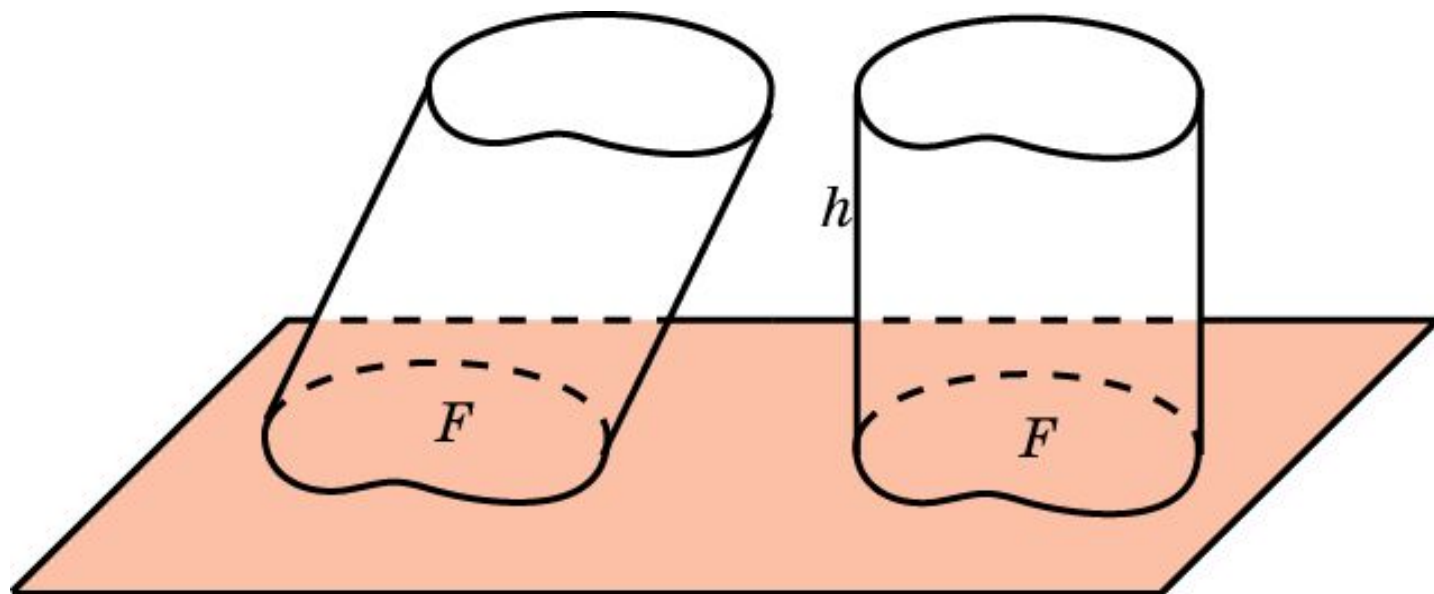
Принцип Кавальери

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади, то объемы исходных пространственных фигур равны.



Объем обобщенного цилиндра

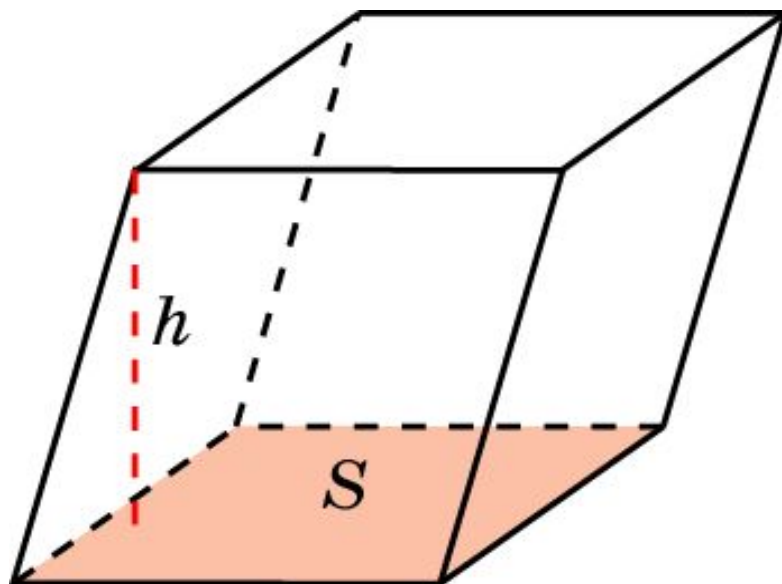
Теорема. Объем обобщенного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.



Объем наклонного параллелепипеда 1

Объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади S грани параллелепипеда на высоту h , проведенную к этой грани, т.е. имеет место формула

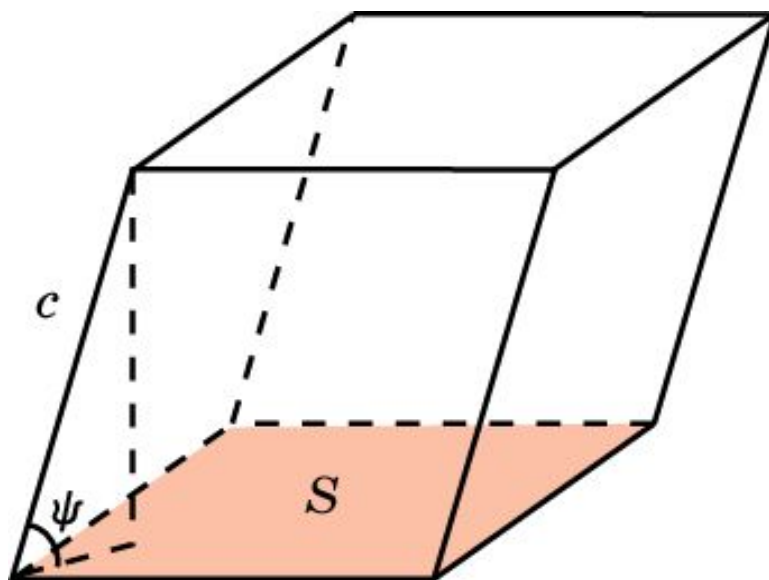
$$V = S \cdot h.$$



Объем наклонного параллелепипеда 2

Если ребро параллелепипеда равно c и образует с гранью площади S угол ψ , то объем параллелепипеда вычисляется по формуле

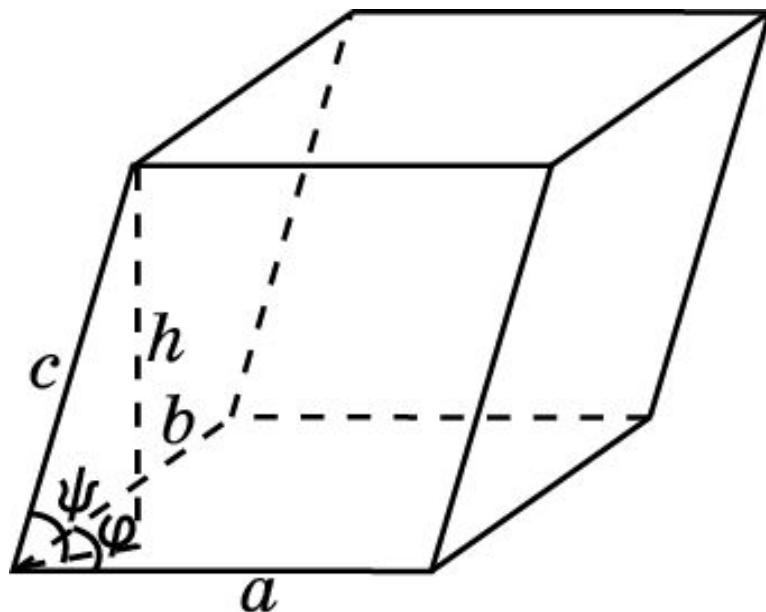
$$V = S \cdot c \cdot \sin \psi.$$



Объем наклонного параллелепипеда 3

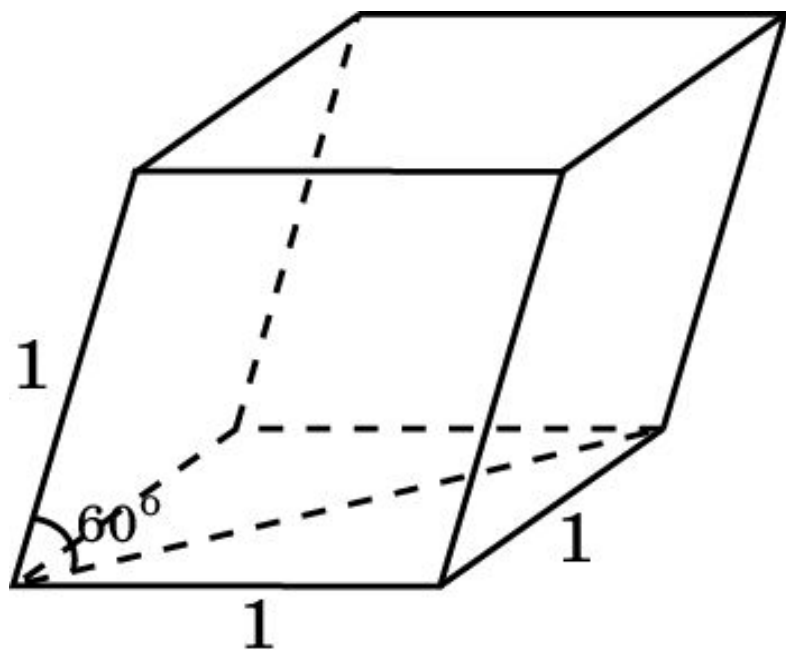
Пусть ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a , b , c . Ребра a и b образуют угол φ , а ребро c наклонено к плоскости ребер a и b под углом ψ . Тогда объем V параллелепипеда выражается формулой

$$V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi.$$



Упражнение 1

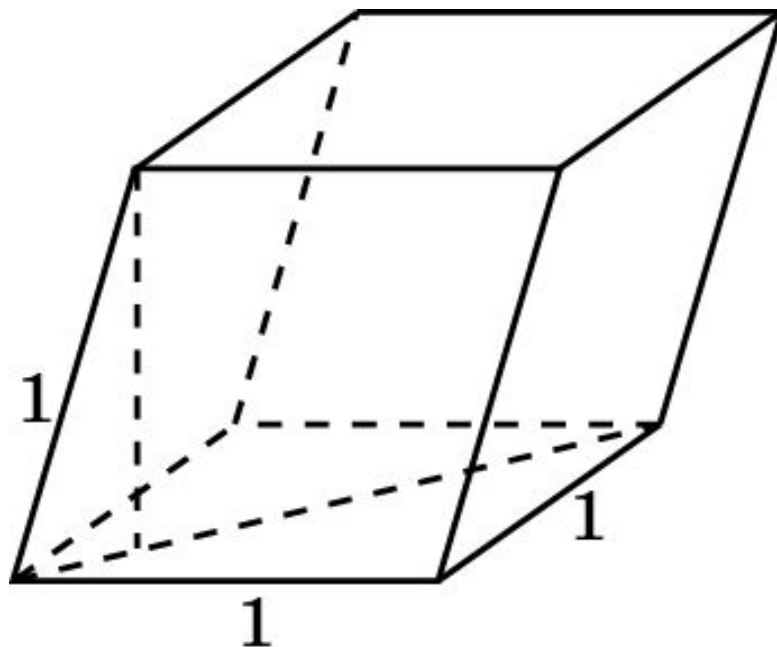
Две противоположные грани параллелепипеда – квадраты со стороной 1. Соединяющее их ребро равно 1 и наклонено к плоскостям этих граней под углом 60° . Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 2

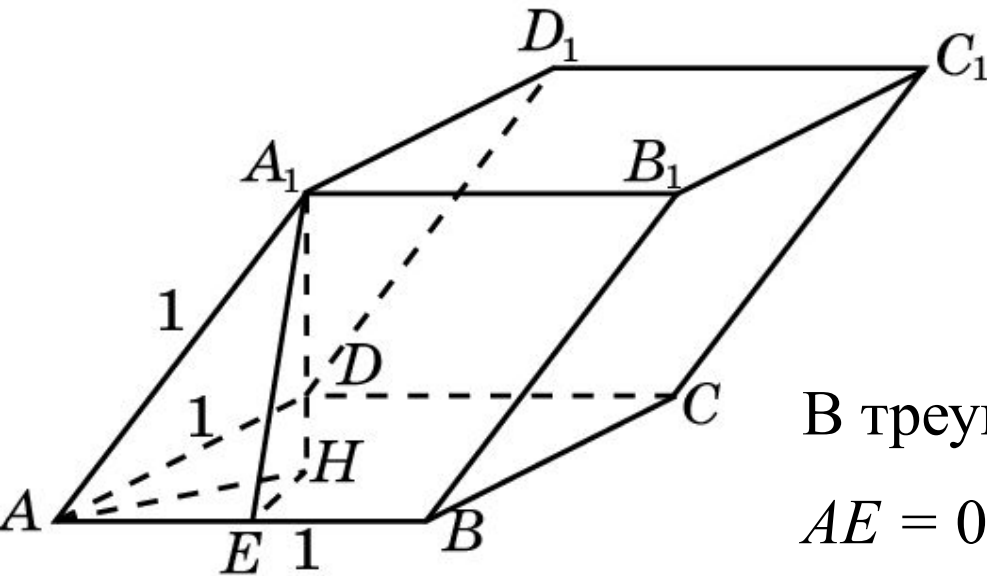
Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 1. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

Упражнение 3

Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, являются ромбами со сторонами 1 и острыми углами при этой вершине 60° . Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Площадь грани $ABCD$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота A_1E грани ABB_1A_1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В треугольнике A_1EH угол A равен 30° , $AE = 0,5$. Значит, $A_1H = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и,

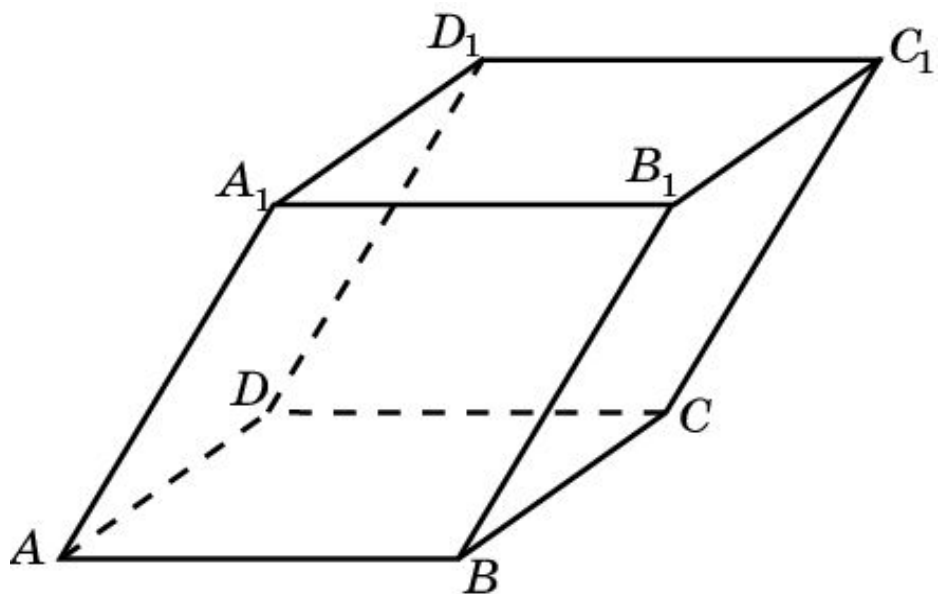
следовательно, высота A_1H равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Таким образом, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 4

В параллелепипеде две грани имеют площади S_1 и S_2 , их общее ребро равно a , и они образуют между собой двугранный угол 150° . Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

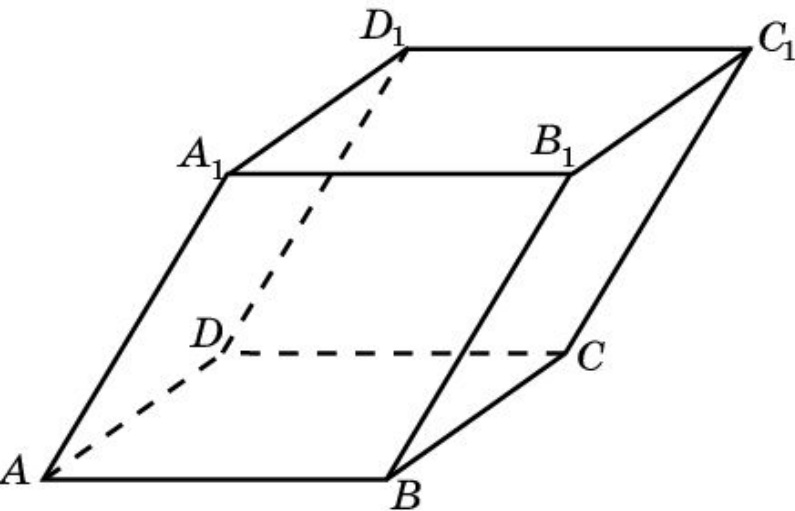
Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и BCC_1B_1 равны S_1 и S_2 , ребро BC равно a . Тогда высота параллелограмма BCC_1B_1 равна S_2/a . Высота параллелепипеда, проведенная

к грани $ABCD$, равна $\frac{S_2}{2a}$.

Следовательно, объем параллелепипеда равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Упражнение 5

В параллелепипеде две грани являются прямоугольниками с площадями 20 см^2 и 24 см^2 . Угол между их плоскостями равен 30° . Еще одна грань этого параллелепипеда имеет площадь 15 см^2 . Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и ADD_1A_1 равны 20 см^2 и 24 см^2 . Тогда площадь грани ABB_1A_1 равна 15 см^2 , а угол A_1AB равен 30° . Пусть $AD = x$. Тогда $AB = 20/x$, $AA_1 = 24/x$. Имеем равенство

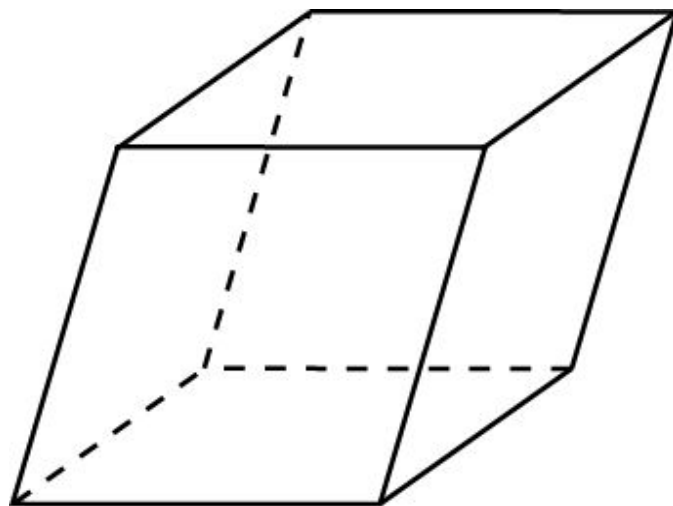
$$\frac{20}{x} \cdot \frac{24}{x} \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

Откуда находим $x = 4 \text{ см}$. Высота, проведенная к грани $ABCD$ равна половине ребра AA_1 и равна 3 см . Следовательно, объем параллелепипеда равен 60 см^3 .

Ответ: 60 см^3 .

Упражнение 6

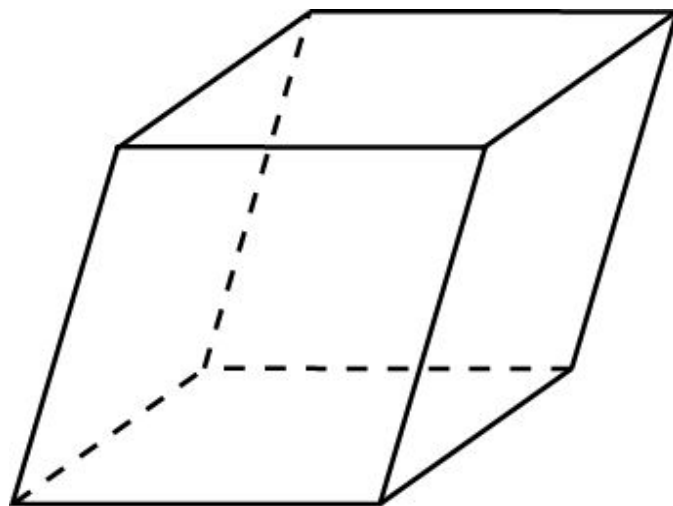
Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть меньше 1, а объем параллелепипеда быть больше 100?



Ответ: Нет, объем будет меньше 1.

Упражнение 7

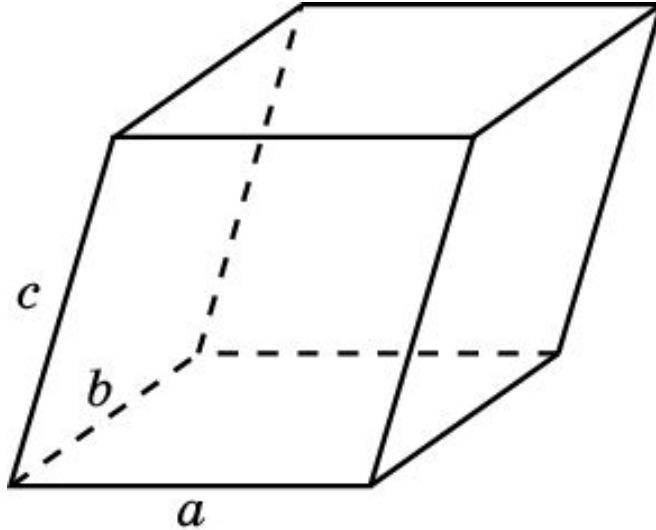
Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть больше 100, а объем параллелепипеда быть меньше 1?



Ответ: Да.

Упражнение 8*

Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?



Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины a, b, c . Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$. Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед – куб со стороной $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

Упражнение 9*

В пространстве даны три параллелепипеда. Как провести плоскость, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объема?

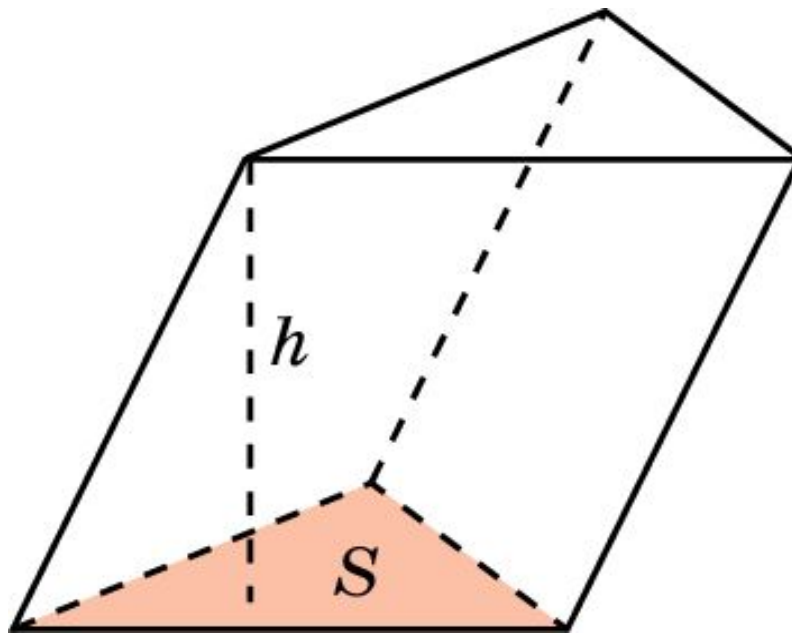
Ответ: Плоскость, проходящая через центры симметрии параллелепипедов.

Объем наклонной призмы 1

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т.е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания призмы, h – ее высота.

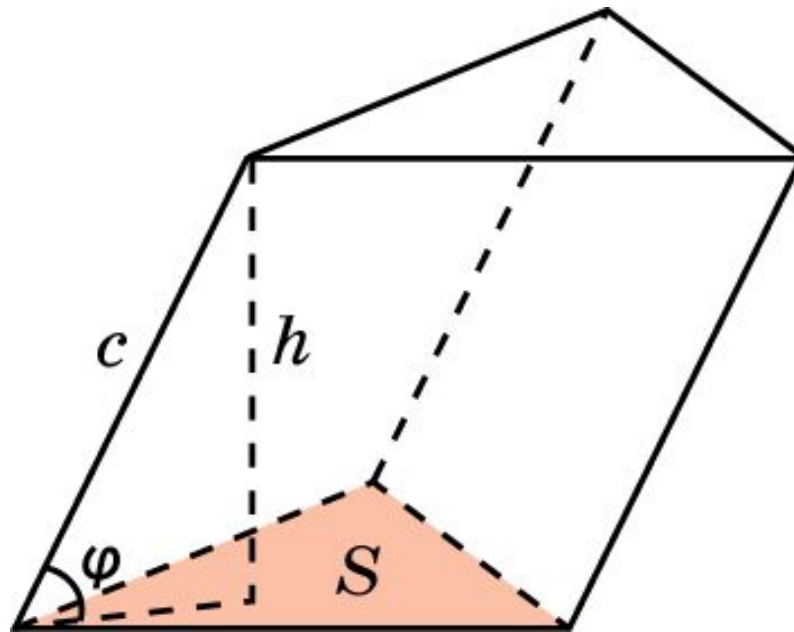


Объем наклонной призмы 2

Если боковое ребро призмы равно c и наклонено к плоскости основания под углом φ , то объем призмы вычисляется по формуле

$$V = S \cdot c \cdot \sin \varphi,$$

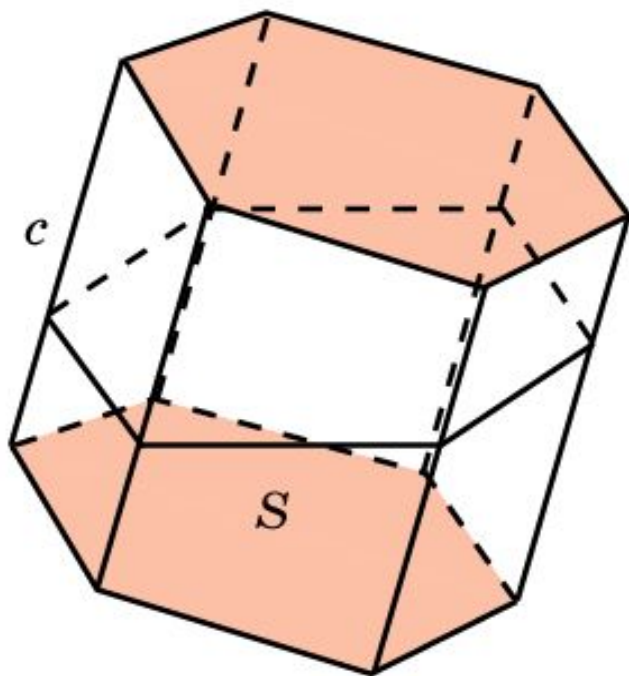
где S – площадь основания призмы.



Объем наклонной призмы 3

Если боковое ребро призмы равно c , а сечением призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является многоугольник площади S , то объем призмы вычисляется по формуле

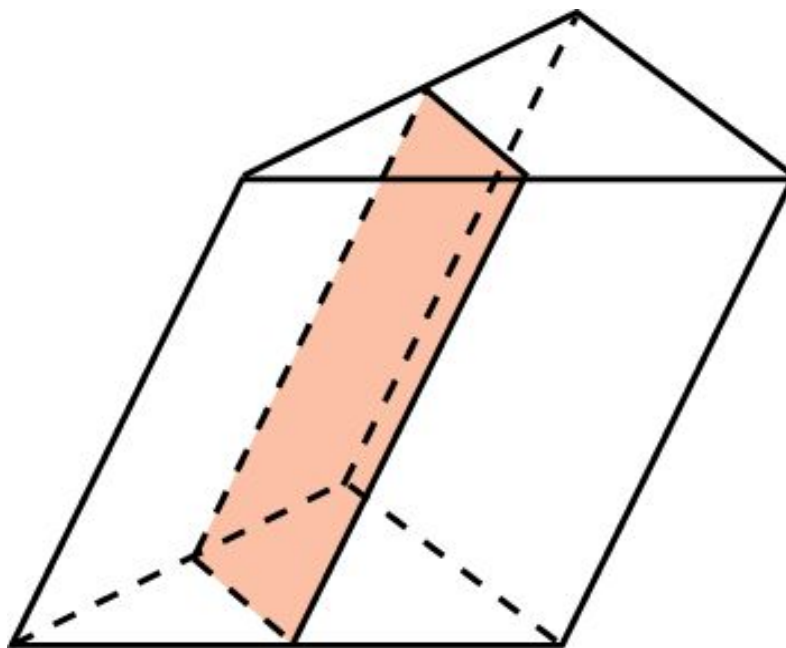
$$V = S \cdot c.$$



Действительно, если призму разрезать по сечению, и нижнюю часть параллельно перенести, поставив на верхнюю, то получим прямую призму с основанием площади S и боковым ребром c .

Упражнение 1

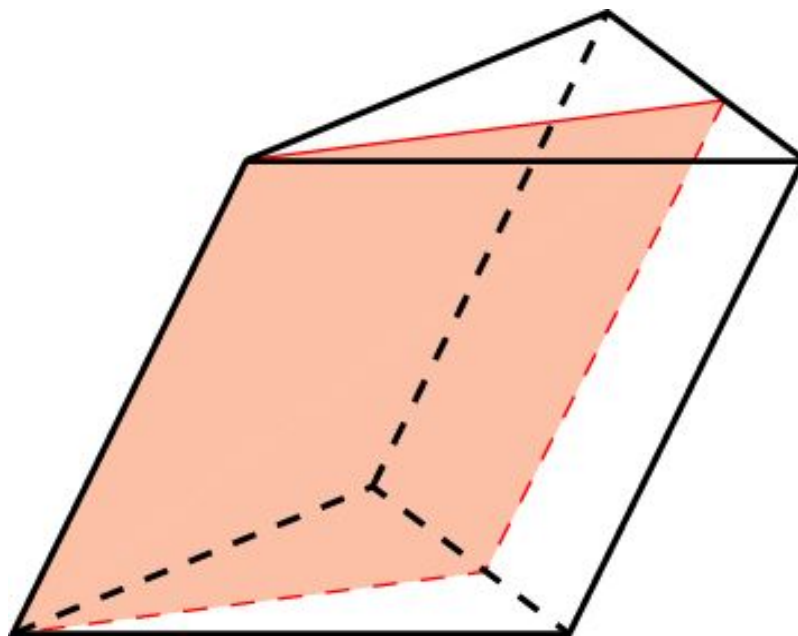
Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: 1:3.

Упражнение 2

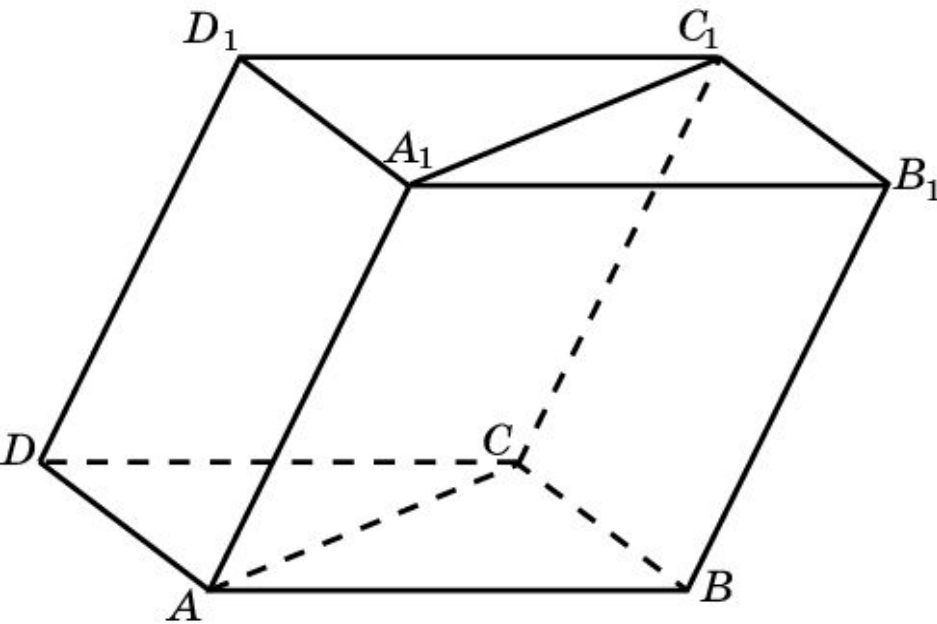
Треугольная призма пересечена плоскостью, которая проходит через боковое ребро и делит площадь противоположной ему боковой грани в отношении $m : n$. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: $m : n$.

Упражнение 3

В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна Q , а расстояние от нее до противоположного ребра равно d . Найдите объем призмы.

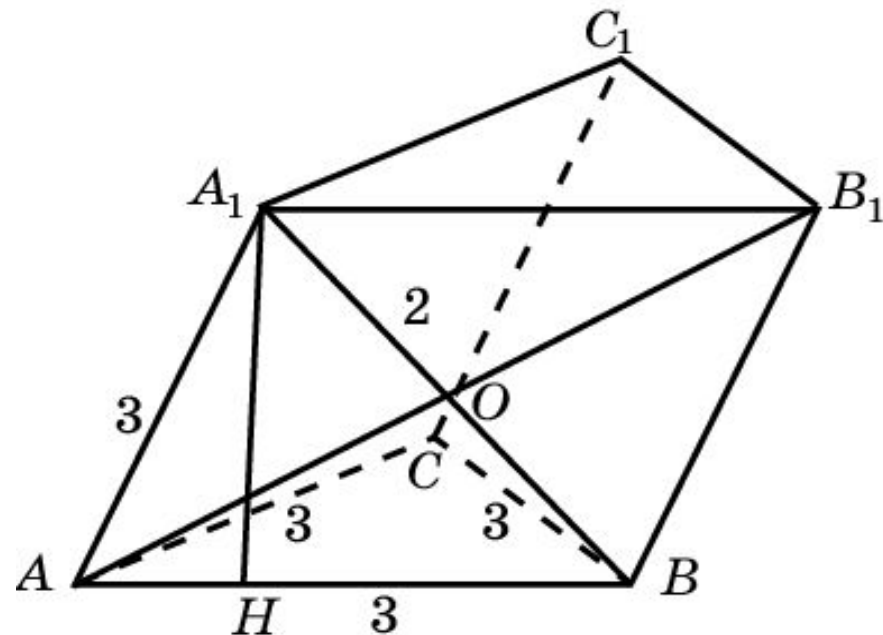


Решение. Пусть площадь грани BCC_1B_1 равна Q . Расстояние от этой грани до прямой AA_1 равно d . Достроим призму до параллелепипеда $A...D_1$. Его объем равен Qd . Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\frac{1}{2}Q \cdot d$.

Ответ: $\frac{1}{2}Q \cdot d$.

Упражнение 4

Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной 3. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна 2. Найдите объем призмы.

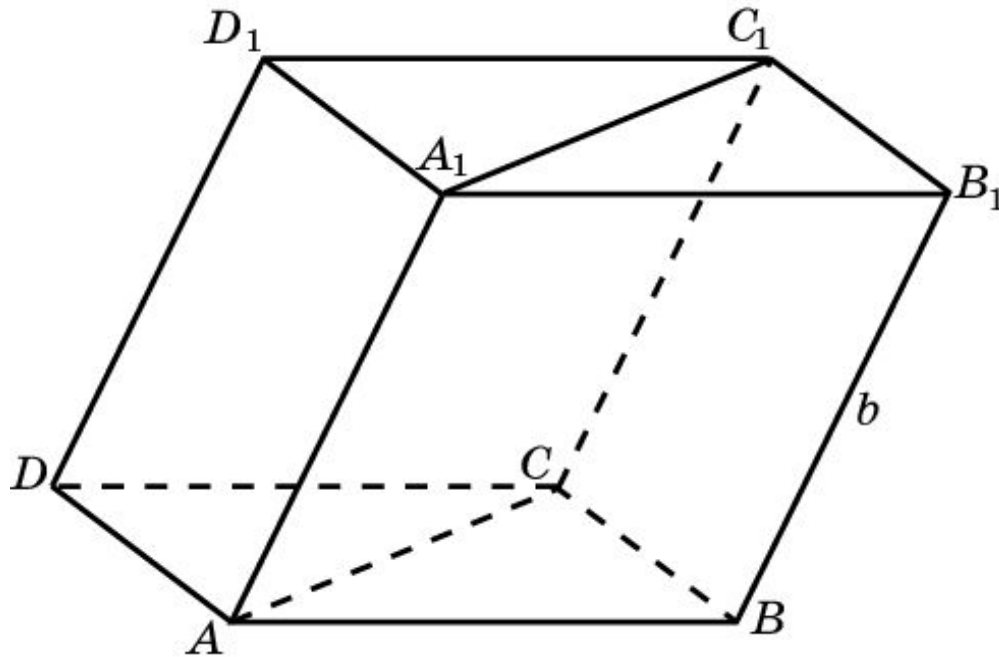


Решение. Проведем диагональ AB_1 .
Имеем: $AO = 2\sqrt{2}$, площадь ромба ABB_1A_1 равна $4\sqrt{2}$, высота A_1H равна $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Упражнение 5

В наклонной треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное a . Площади этих граней равны S_1 и S_2 . Найдите объем призмы.

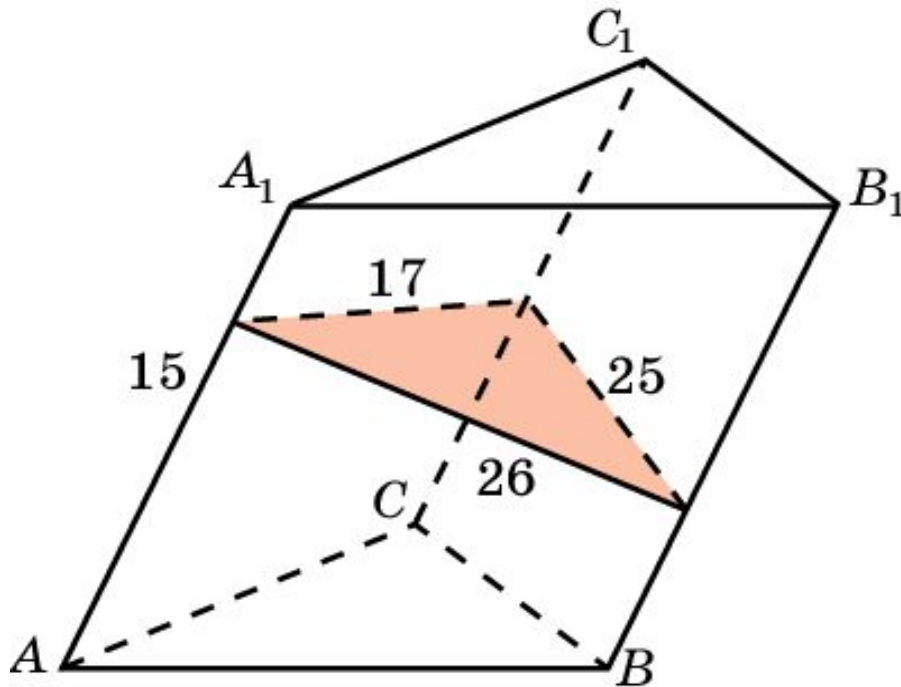


Ответ: $\frac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Решение. Достроим призму до параллелепипеда $A...D_1$. Его объем равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{b}$. Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Упражнение 6

Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Найдите объем призмы.

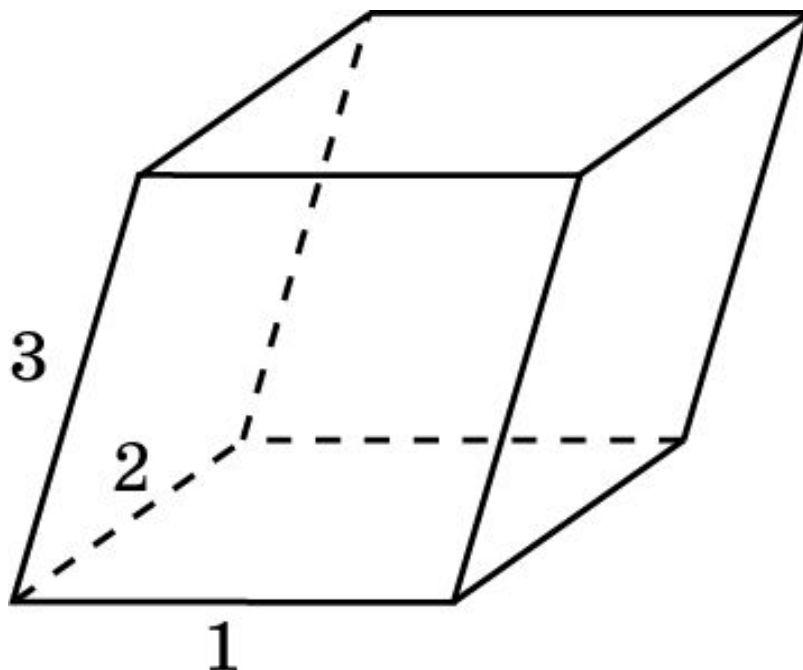


Решение. Проведем сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. Используя формулу Герона найдем площадь сечения. Она равна 204 см^2 . Объем призмы равен 3060 см^3 .

Ответ: 3060 см^3 .

Упражнение 7

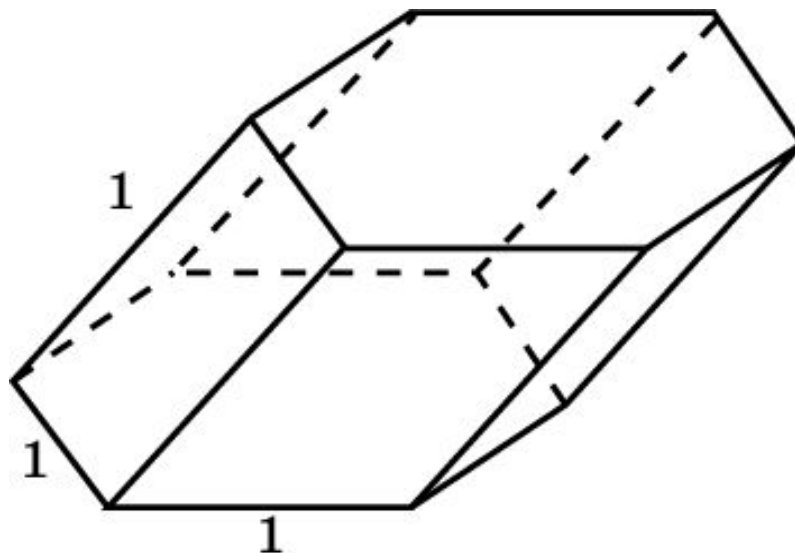
Основанием призмы является параллелограмм со сторонами 1, 2 и острым углом 30° . Боковые ребра равны 3 и составляют с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем призмы.



Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 8

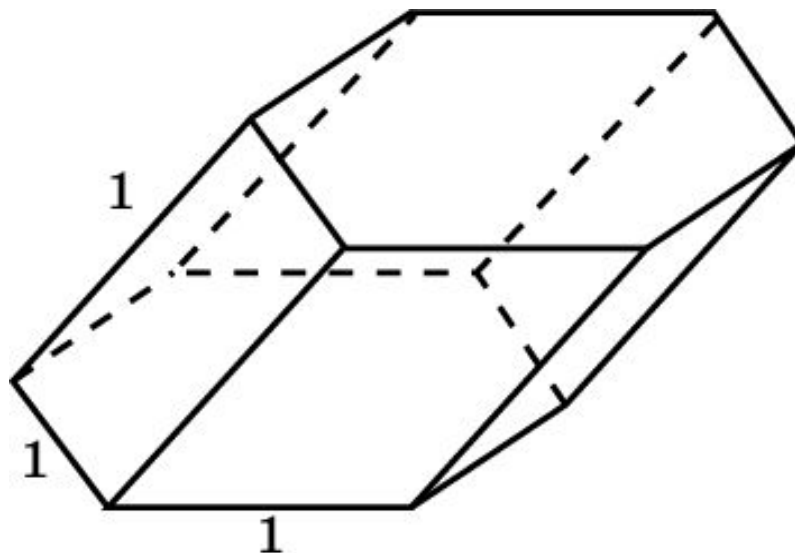
Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30° .



Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 9

Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 1. Одна из боковых граней является прямоугольником и наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найдите объем призмы.



Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

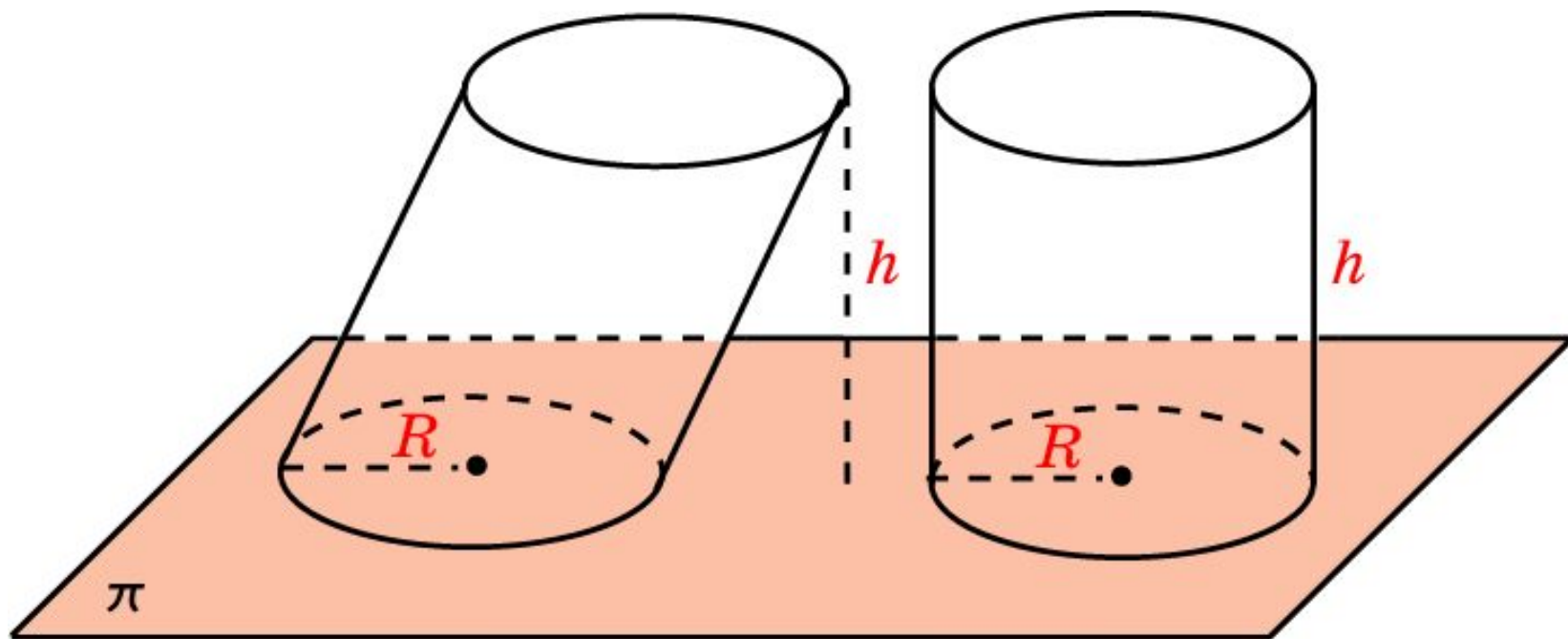
Упражнение 10

В основаниях призмы квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?

Ответ: Да.

Объем наклонного цилиндра

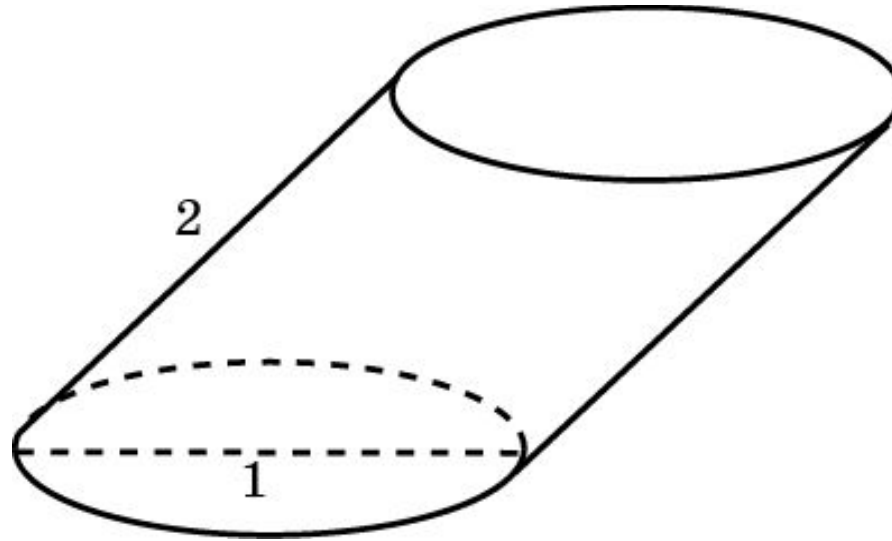
Объем кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R , вычисляется по формуле $V = \pi R^2 \cdot h$.



$$V = \pi R^2 \cdot h$$

Упражнение 1

Диаметр основания цилиндра равен 1. Образующая равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 2

Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?

Ответ: Да.

Упражнение 3

Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь основания одного в два раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

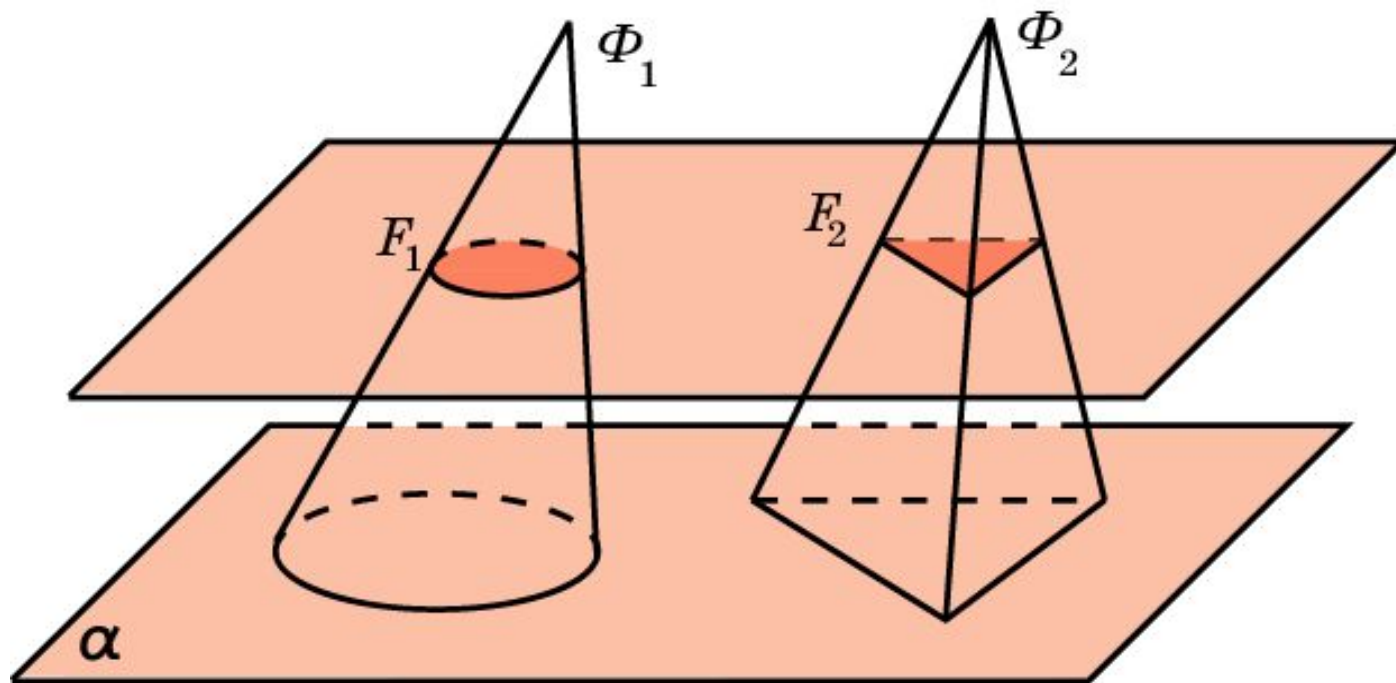
Ответ: 2:1.

Обобщенный конус

Пусть F - фигура на плоскости π , и S - точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S , образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **обобщенным конусом**. Фигура F называется **основанием** обобщенного конуса, точка S - **вершиной** обобщенного конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется **высотой** обобщенного конуса.

Частным случаем обобщенного конуса является конус и пирамида.

Теорема. Если два обобщенных конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.



Упражнение 1

Верно ли, что две пирамиды, имеющие общее основание и вершины, расположенные в плоскости, параллельной основанию, равновелики?

Ответ: Да.

Упражнение 2

Два конуса имеют равные высоты, а площадь основания одного в три раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

Ответ: 3:1.

Упражнение 3

Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину и центр основания кругового конуса, делит его на равновеликие части?

Ответ: Да.

Упражнение 4

В основании пирамиды квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?

Ответ: Да.