

# ТЕМА: Объемы тел

- Проект выполнили ученицы
- 11 «А»класса МОУ Алексеевской СОШ
- Плешакова Дарья и Щукова Ксения
- Работа выполнена под руководством
- учителя математики Плешаковой О.В.

2010 год

# Содержание:

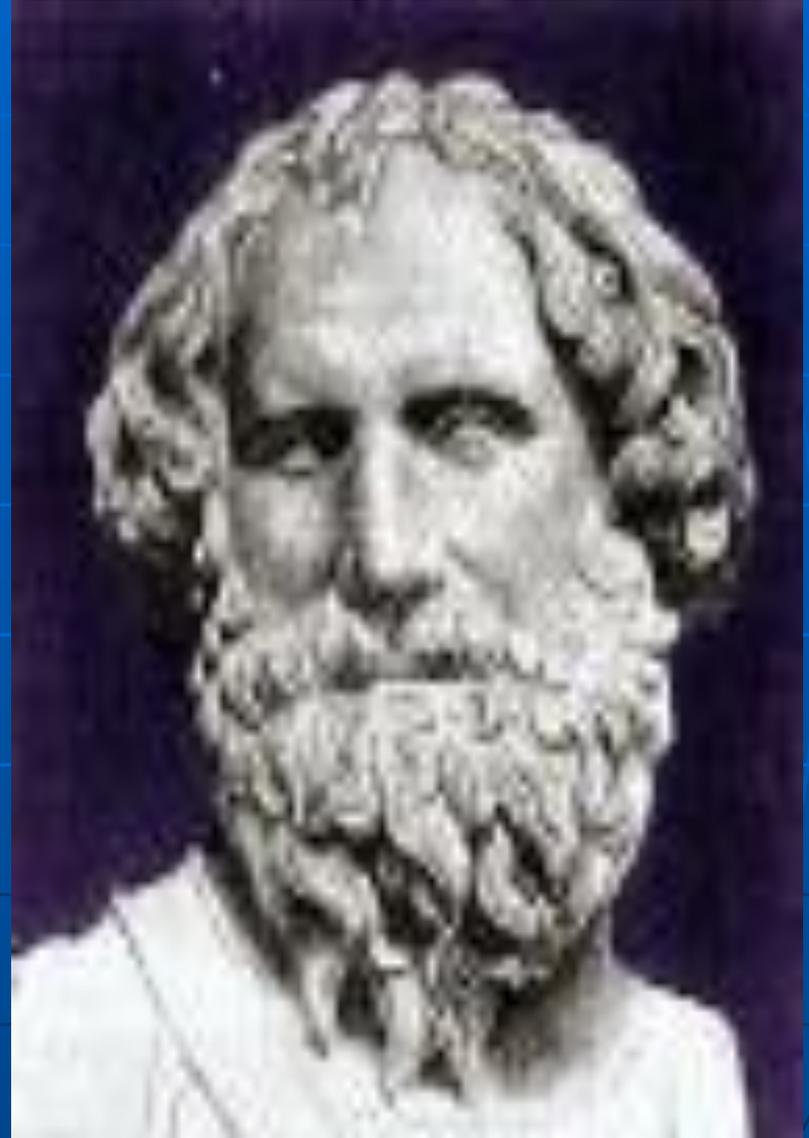
- История изучения объемов тел.
- История измерения объемов тел.
- Понятие объема.
- Свойства объемов тел.
- Объем куба.
- Объем прямоугольного параллелепипеда.
- Объем прямой призмы.
- Объем цилиндра.
- Объем наклонной призмы.
- Объем пирамиды.
- Объем конуса.
- Применение.
- Вывод.
- Источники информации.

# История изучения объемов тел:

- Начало геометрии было положено в древности при решении чисто практических задач. Со временем, когда накопилось большое количество геометрических фактов, у людей появилось потребность обобщения, уяснения зависимости одних элементов от других, установления логических связей и доказательств. Постепенно создавалась геометрическая наука. Примерно в VI - V вв. до н. э. в Древней Греции в геометрии начался новый этап развития, что объясняется высоким уровнем, которого достигла общественно-политическая и культурная жизнь в греческих государствах.

## ■ Архимед

- В древнеегипетских папирусах, в вавилонских клинописных табличках встречаются правила для определения объема усеченной пирамиды, но не сообщаются правила для вычисления объема полной пирамиды. Определять объем призмы, пирамиды, цилиндра и конуса умели древние греки и до Архимеда. И только он нашел общий метод, позволяющий определить любую площадь или объем. Идеи Архимеда легли в основу интегрального исчисления. Сам Архимед определил с помощью своего метода площади и объемы почти всех тел, которые рассматривались в античной математике. Он вывел, что объем шара, составляет две трети от объема описанного около него цилиндра. Он считал это открытие самым большим своим достижением.

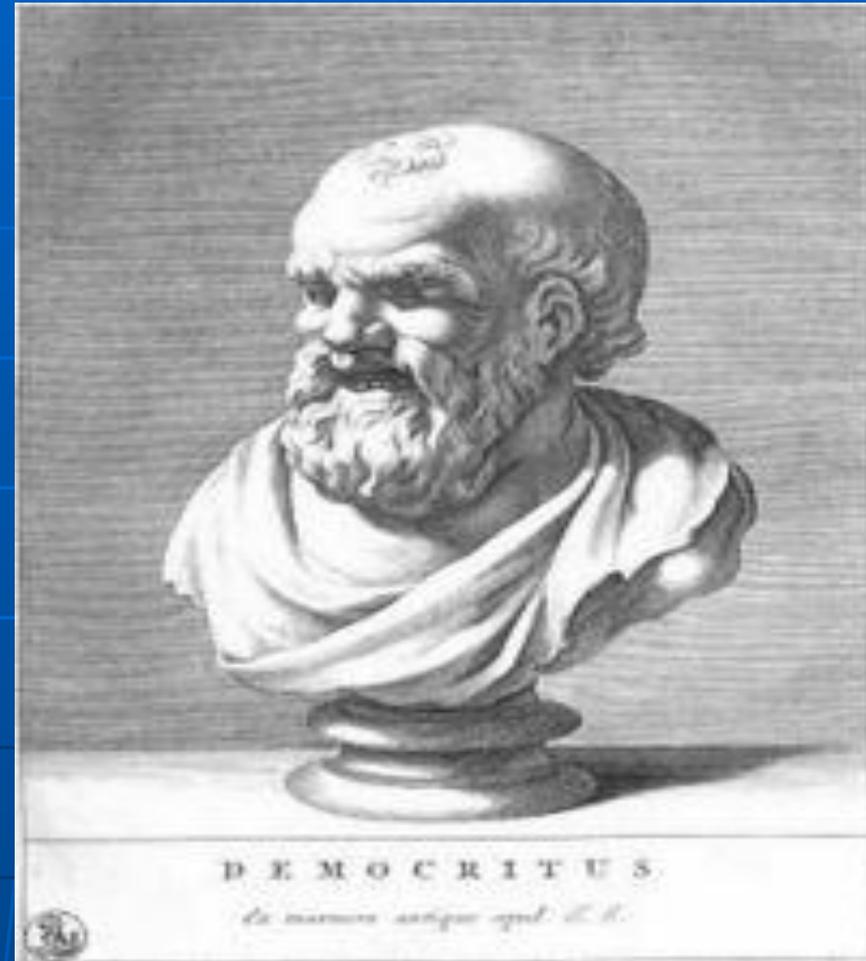


# История измерения объемов тел:

- В Древнем Египте гробницы фараонов имели форму пирамид. В III тысячелетии до н.э. египтяне сооружали ступенчатые пирамиды, сложенные из каменных блоков; позже египетские пирамиды приобрели геометрически правильную форму, например пирамида Хеопса, высота которой достигает почти 147м, и др. Внутри пирамид находились погребальные склепы и коридоры.

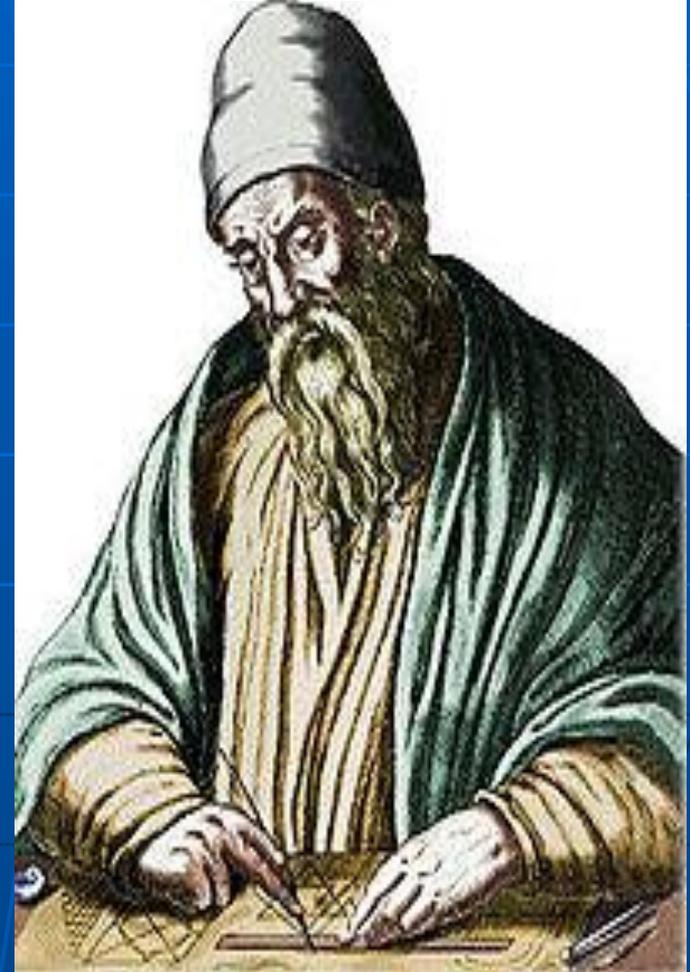
# Демокрит

- Согласно Архимеду, еще в V до н.э. Демокрит из Абдеры установил, что объем пирамиды равен одной трети объема призмы с тем же основанием и той же высотой.



# Евклид

- Полное доказательство этой теоремы дал Евдокс Книдский в IV до н.э.



## ■ Теоремы Евклида

- Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем, которыми пользовались для нахождения объемов для площадей фигур. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников.

Евклид не применяет термина "объем". Для него термин "куб", например, означает, и объем куба. В XI книге "Начал" изложены среди других и теоремы следующего содержания.

- **Параллелепипеды с одинаковыми высотами и равновеликими основаниями равновелики.**
- **Отношение объемов двух параллелепипедов с равными высотами равно отношению площадей их оснований.**

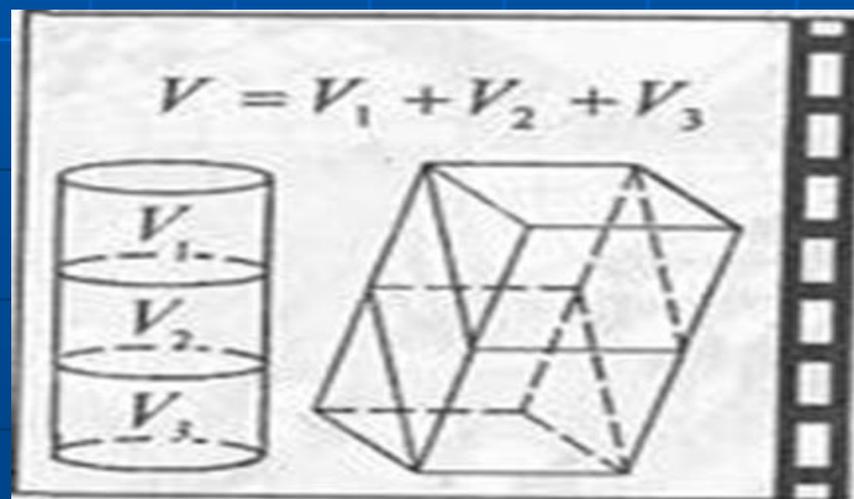
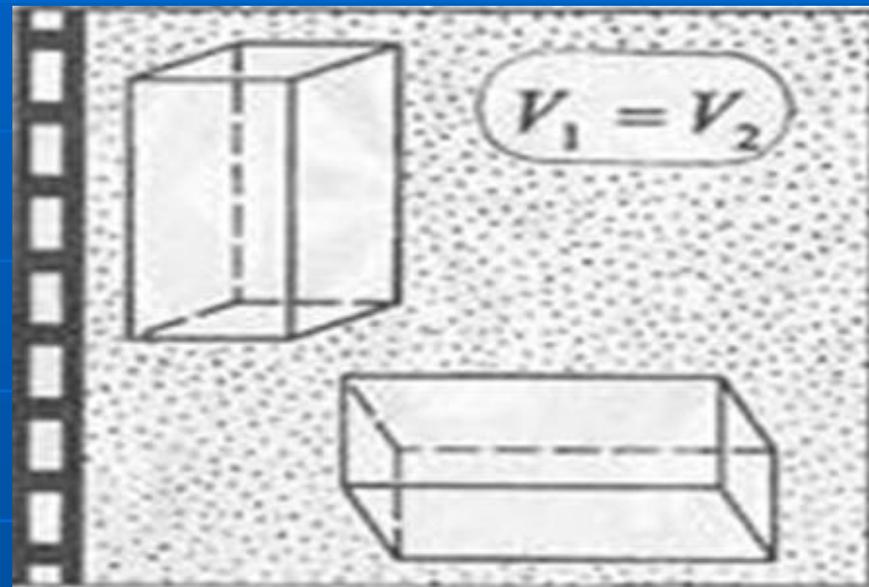
# Понятие объема:

- Объем — это вместимость геометрического тела, т. е. части пространства, ограниченной одной или несколькими замкнутыми поверхностями. Вместимость или емкость выражается числом заключающихся в объеме кубических единиц. Процедура измерения объемов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объем каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объемов и частей единицы содержится в данном теле. Ясно, что число, выражающее объем тела, зависит от выбора единицы измерения объемов, и поэтому единица измерения объемов указывается после этого числа.
- **Например, если в качестве единицы измерения объемов взят  $1\text{см}^3$  и при этом объем  $V$  некоторого тела оказался равным 2, то пишут  $V = 2\text{ см}^3$ .**

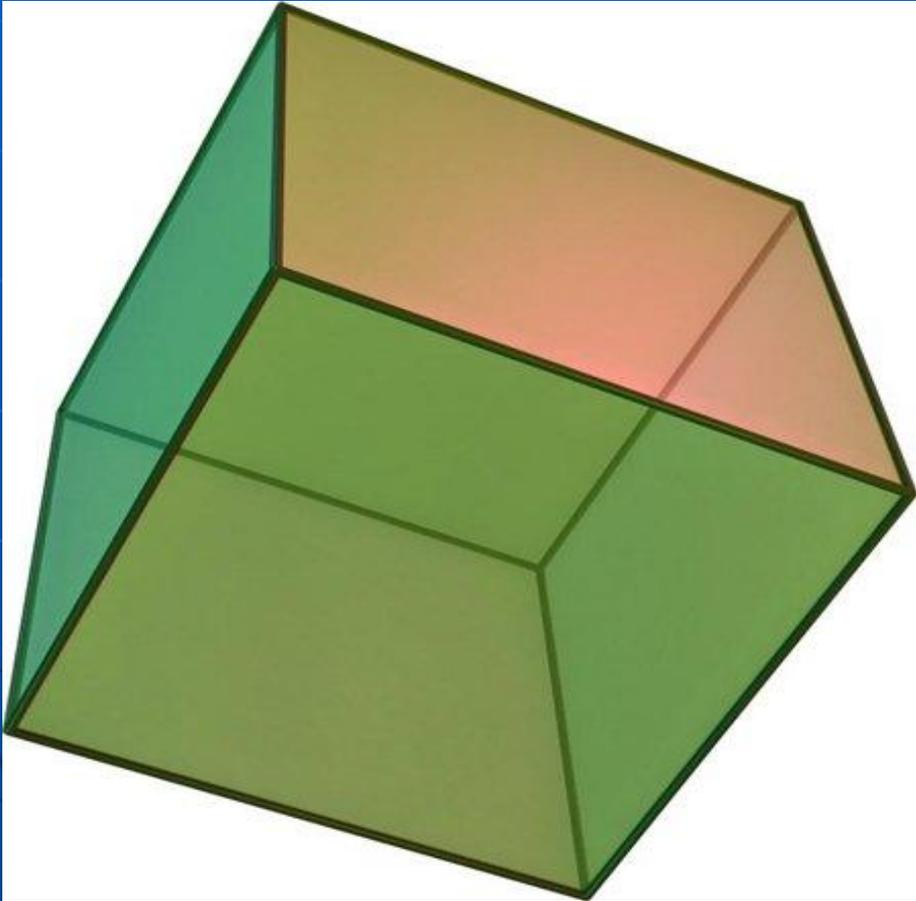
- Объемом тела называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими свойствами:
  - **равные тела имеют равные объемы; при параллельном переносе тела его объем не изменяется;**
  - **если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;**
  - **за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;**

# Свойства объемов тел:

- Объем тела есть неотрицательное число;
- Если геометрическое тело составлено из геометрических тел, не имеющих общих внутренних точек, то объем данного тела равен сумме объемов тел его составляющих;
- Объем куба, ребро которого равно единице измерения длины, равен единице;
- Равные геометрические тела имеют равные объемы.
- Следствие. Если тело имеет объем  $V_1$  и содержится в теле, имеющем объем  $V_2$ , то  $V_1 < V_2$ .



# Объем куба:



- $V = a^3$

# Объем прямоугольного параллелепипеда:

Для того чтобы найти объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами  $a, b, c$  докажем, что объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как их высоты.

Пусть  $P$  и  $P_1$  – два прямоугольных параллелепипеда с общим основанием  $ABCD$  и высотами  $AE$  и  $AE_1$ . Будем считать для определенности, что  $AE_1 < AE$ . Пусть  $V$  и  $V_1$  – объемы параллелепипедов. Разобьем ребро  $AE$  параллелепипеда  $P$  на большое число  $n$  равных частей. Каждую часть обозначим  $AE/n$ . Пусть  $m$  – число точек деления, которые лежат на ребре  $AE$ .

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \leq AE_1 \leq \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1)$$

Отсюда 
$$\frac{m}{n} \leq \frac{AE_1}{AE} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

Проведем через точки деления плоскости, параллельные основанию. Они разобьют параллелепипед  $P$  на  $n$  равных параллелепипедов. Каждый из них имеет объем  $V/n$ . Параллелепипед  $P_1$  состоит из  $m$  параллелепипедов, считая снизу, и содержится в  $m+1$  параллелепипеде  $P$ . Поэтому

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \leq V_1 \leq \left(\frac{V}{n}\right)(m+1)$$

Отсюда 
$$\frac{m}{n} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

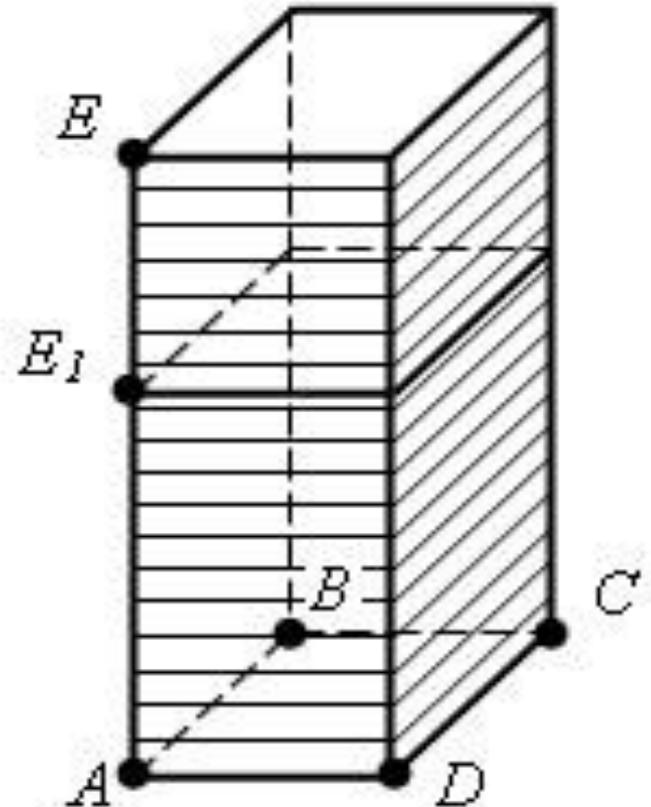
Так как  $V_1/V$  и  $AE_1/AE$  заключены между  $m/n$  и  $m/n + 1/n$ , то они не более чем на  $1/n$ . А так как  $n$  можно взять сколь угодно большим, то может быть только при

$$\frac{V_1}{V} = \frac{AE_1}{AE}$$

что и требовалось доказать.

Возьмем теперь куб, являющийся единицей измерения объема, и три прямоугольных параллелепипеда с основаниями  $1 \times 1$ ;  $a \times 1$ ;  $a \times b$ . Обозначим, их объемы  $V_1 = a$ ,  $V_2 = b$ ,  $V = a \cdot b$ . По доказанному

$$\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}, \frac{V_2}{1} = \frac{b}{1}, \frac{V}{1} = \frac{a \cdot b}{1}$$



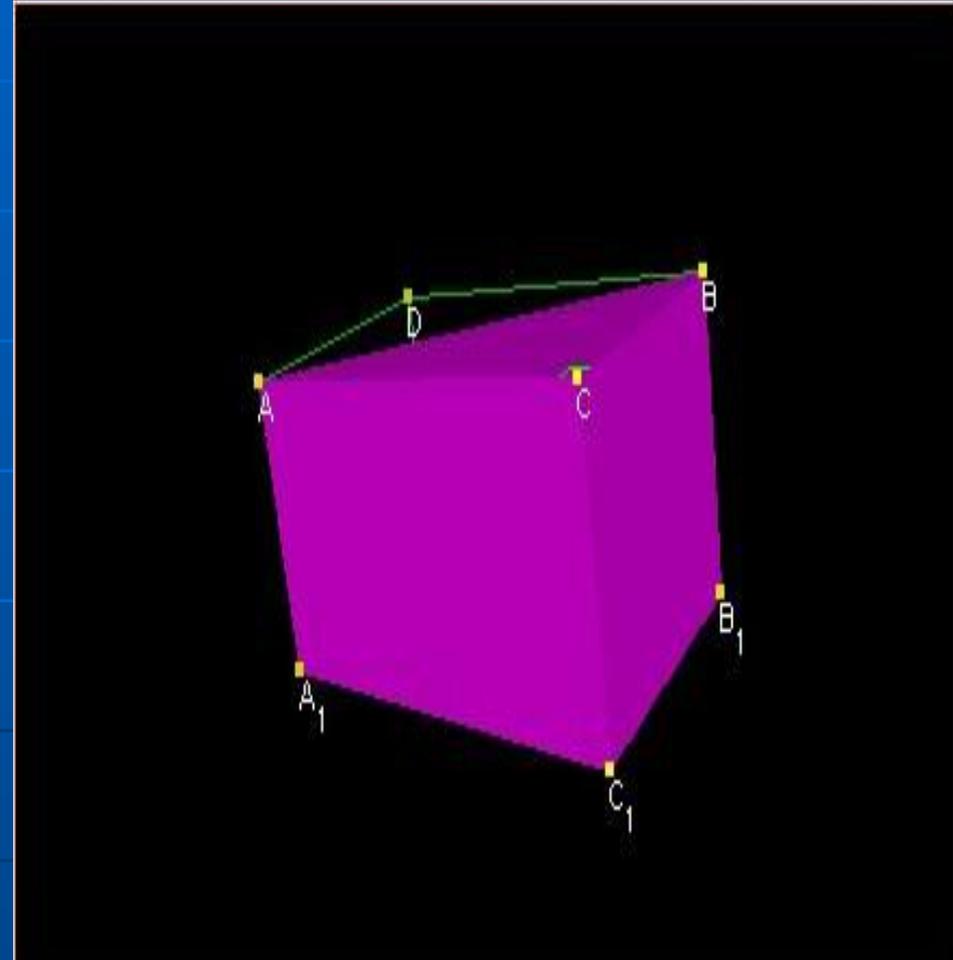
•Перемножая эти равенства почленно, получим:  $V=abc$ .

# Примеры из жизни:



# Объем прямой призмы:

- **Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту:  $V = SH$ .**
- Доказательство :
- Пусть  $ABCA_1B_1C_1$  – прямая треугольная призма, причем ее основание – прямоугольный треугольник  $ABC$  (чертеж 6.1.1). Дополним эту призму до прямоугольного параллелепипеда  $ACBDA_1C_1B_1D_1$ . Середина  $O$  диагонали  $AB_1$  этого параллелепипеда является его центром симметрии. Данная призма и призма  $ABDA_1B_1D_1$ , которая дополняет данную призму до параллелепипеда, симметричны относительно точки  $O$ , а поэтому равновелики. Пусть  $V$  и  $V_1$  – соответственно объемы призмы  $ABCA_1B_1C_1$  и параллелепипеда, тогда получим
- **$V = S_{ABC} CC_1 = S_{осн} H$**

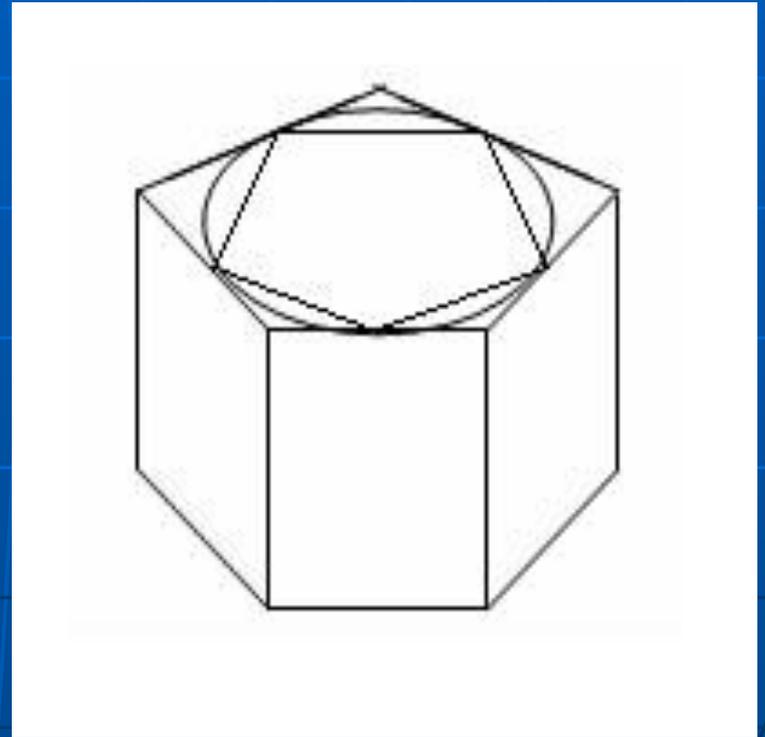


# Объем цилиндра:

- Данное тело имеет объем  $V$ , если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающимися от  $V$ .

- Найдем объем цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ . Построим две прямые призмы с высотой  $H$  такими, что основание одной призмы является  $n$ -угольник, содержащий круг, а основание второй призмы  $n$ -угольник, содержащийся в круге. Тогда первая призма содержит цилиндр, а вторая призма содержится в цилиндре. При неограниченном увеличении  $n$  площади многоугольников приближаются к площади круга  $S$  (основанию цилиндра) и, следовательно, их объемы неограниченно приближаются к  $SH$ . Тогда

$$V = SH = \pi R^2 H$$



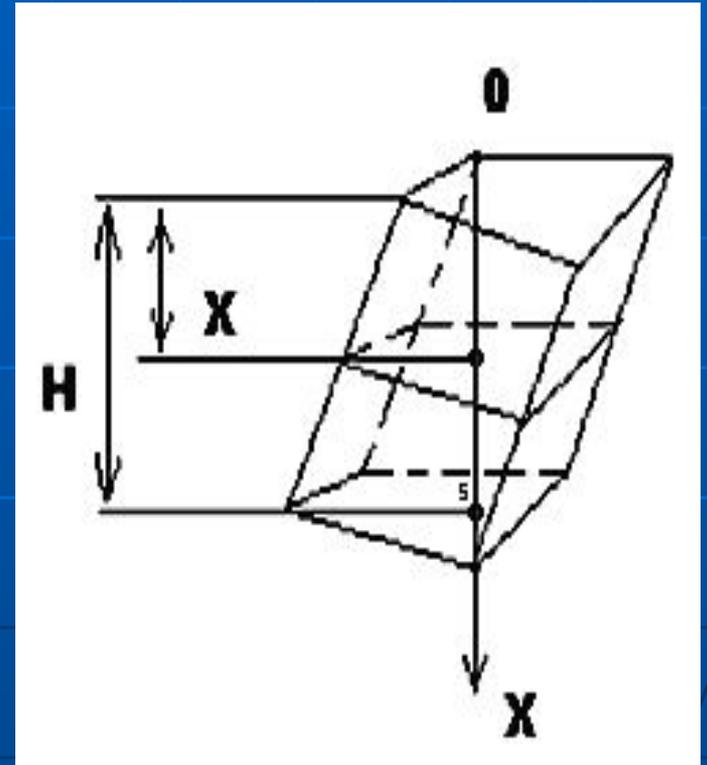
# Примеры из жизни:



# Объем наклонной призмы:

■ Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

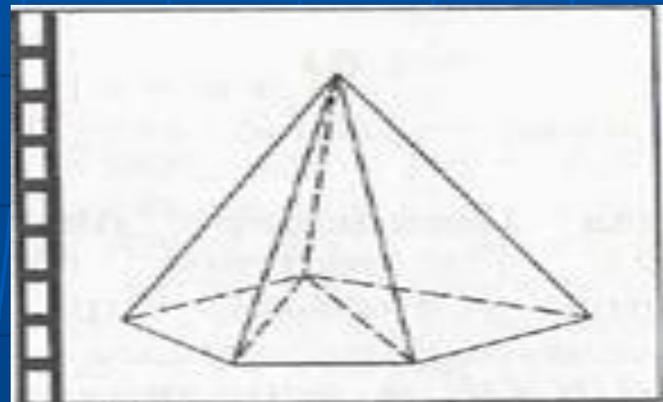
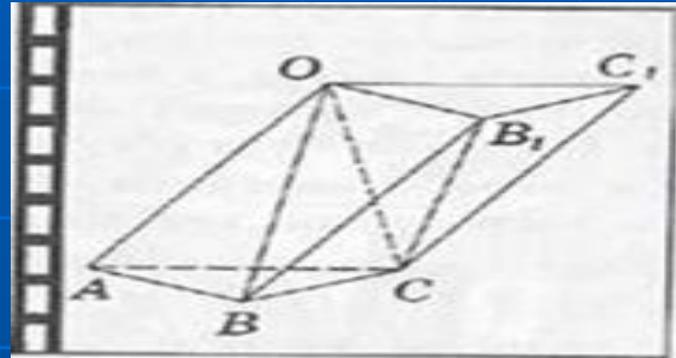
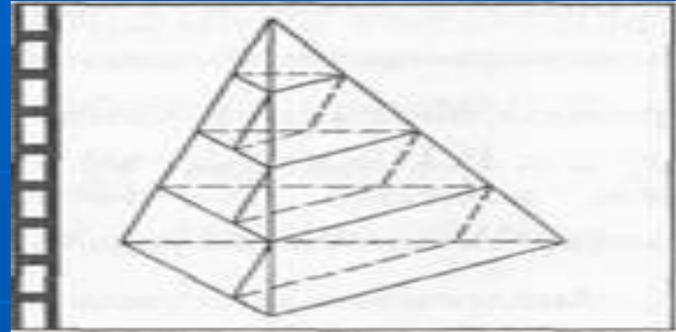
Доказательство. Пусть площадь основания призмы равна  $S$ , а ее высота  $H$ . Поместим начало системы координат в одной из вершин верхнего основания призмы, а ось  $Ox$  направим перпендикулярно плоскости основания призмы. Сечение призмы плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ , равно основанию призмы, следовательно,



$$V = \int_0^H S(x) dx, V = \int_0^H S dx = Sx \Big|_0^H = S \cdot H.$$

# Объем пирамиды:

- Объем любой пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту:  $V = \frac{1}{3}SH$

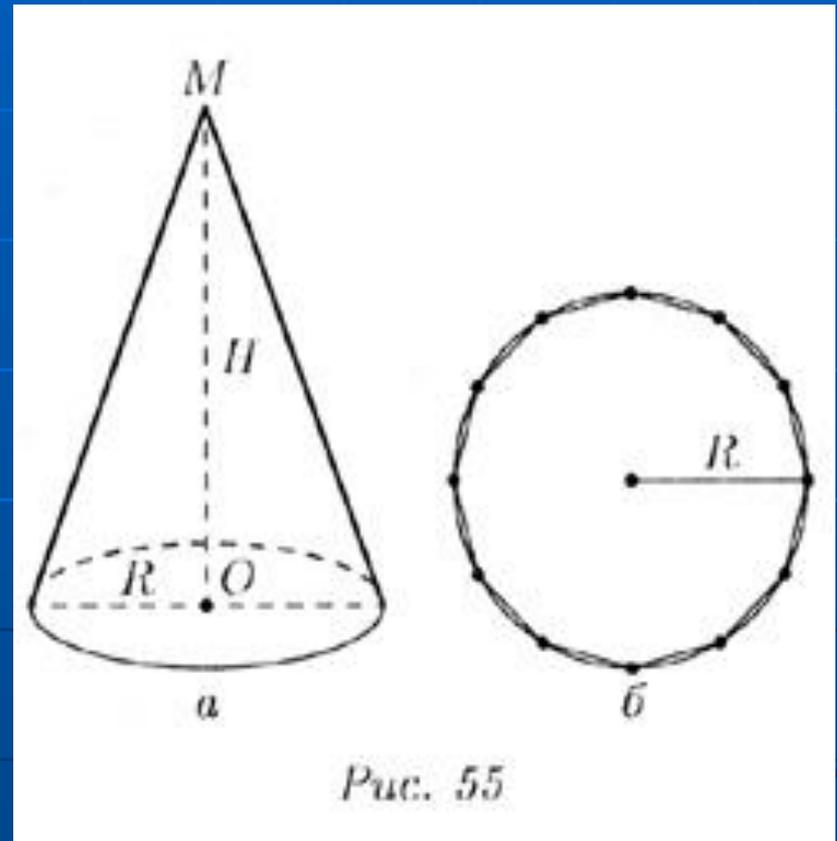


# Примеры из жизни:



# Объем конуса:

- **Объем конуса** вычисляется по формуле  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
- где  $R$  — радиус основания конуса,  $H$  -- его высота



# Примеры из жизни:



# Применение:

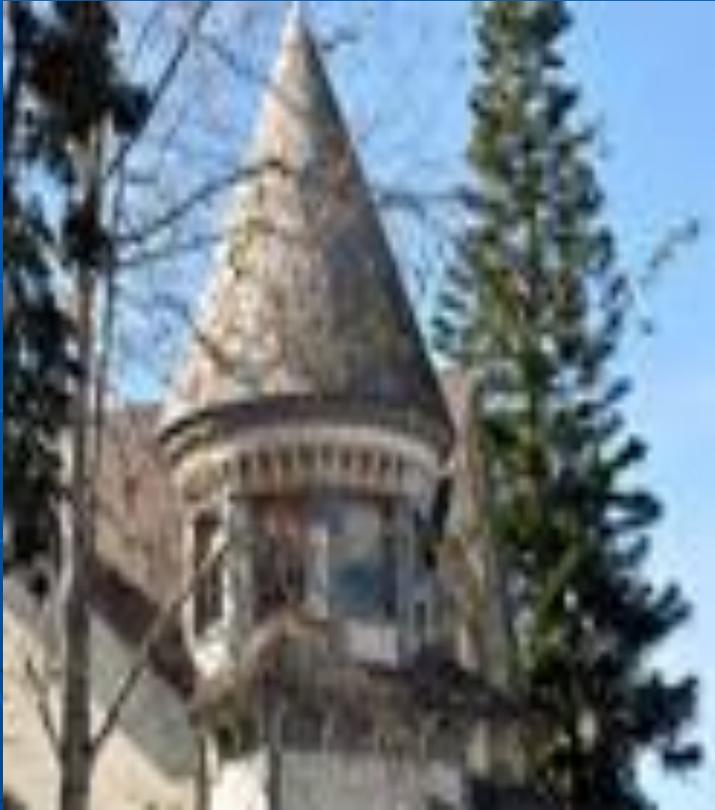
- Формулы объемов тел широко применяются в строительстве

**Объем цилиндра :  $V = \pi R^2 H$**



**Объем цилиндра :  $V = \pi R^2 H$**

$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$   
Объем конуса



$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$   
Объем конуса



Объем параллелепипеда  
 $V = SH$

# Вывод:

1. Объем куба равен кубу его ребра:  $V=a^3$

2. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений:  $V=abc$ .

3. Объем прямого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту:  $V=SH$

4. Объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади основания на его высоту:  $V=SH$

5. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту:  $V=SH$

6. Две треугольные пирамиды, имеющие равные высоты и равные площади оснований, имеют равные объемы:  $V1' = V2'$

7. Объем любой треугольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту:  $V=1/3SH$

8. Объем любой пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту:  $V=1/3SH$

9. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:  $V= \pi R^2 H$

10. Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту:  $V=1/3 \pi R^2 H$

11. Объем усеченного конуса равен  $V=1/3 H(R^2+Rr+r^2)$ , где  $R$  и  $r$  – радиусы оснований усеченного конуса.

12. Для подобных фигур на плоскости, имеющих площадь, верна теорема: отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Для подобных пространственных тел, имеющих объем, верна аналогичная теорема: отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

# Источники информации:

- Учебник геометрии 11класс.  
Авторы: Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов,  
С.Б.Кадомцев.
- <http://e-science.ru/>
- <http://www.freession.ru/>
- <http://festival.1september.ru/>

**СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!!!**

