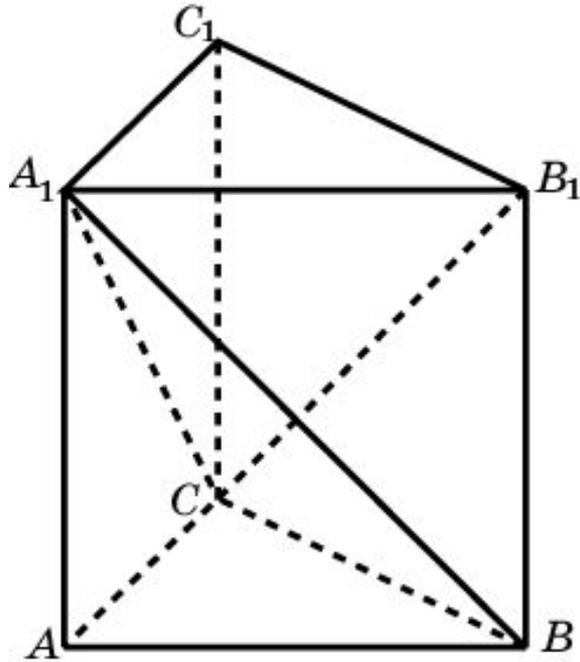


ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Теорема. Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.



Доказательство. Рассмотрим случай треугольной пирамиды. Пусть A_1ABC треугольная пирамида. Достроим ее до призмы $ABCA_1B_1C_1$. Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 разбивают эту призму на три пирамиды A_1ABC , A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ с вершинами в точке A_1 . Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания $CB B_1$ и $CB_1 C_1$. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объемы.

Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

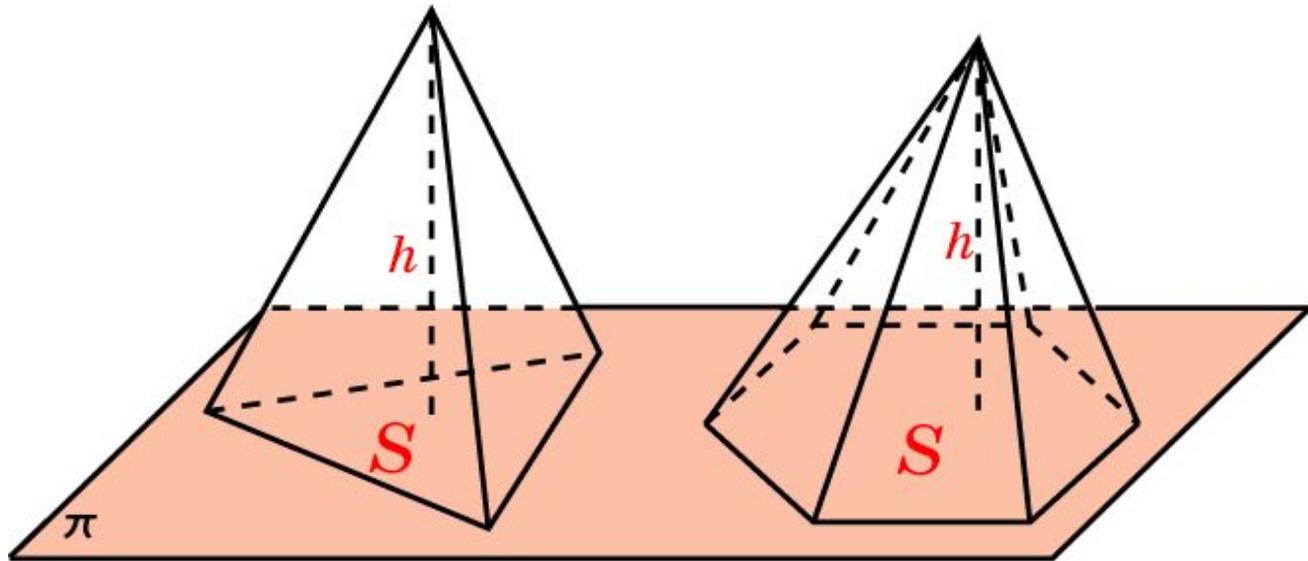
где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой - многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа объемы этих пирамид равны и, следовательно, имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.



$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

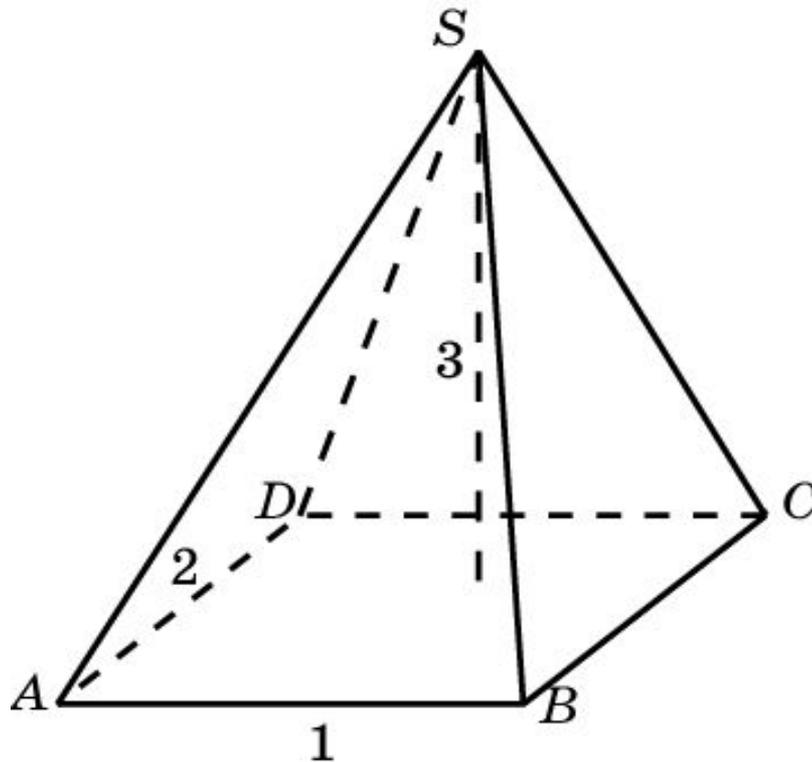
Упражнение 1

Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объема призмы составляет объем пирамиды?

Ответ: Одна треть.

Упражнение 2

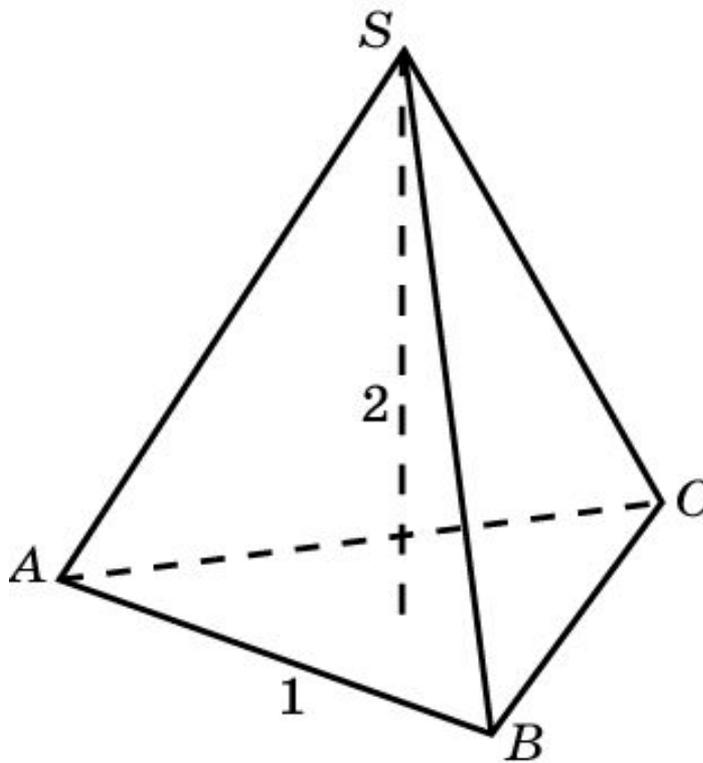
Найдите объем пирамиды, высота которой 3, а в основании - прямоугольник со сторонами 1 и 2.



Ответ: 2.

Упражнение 3

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, высота – 2.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

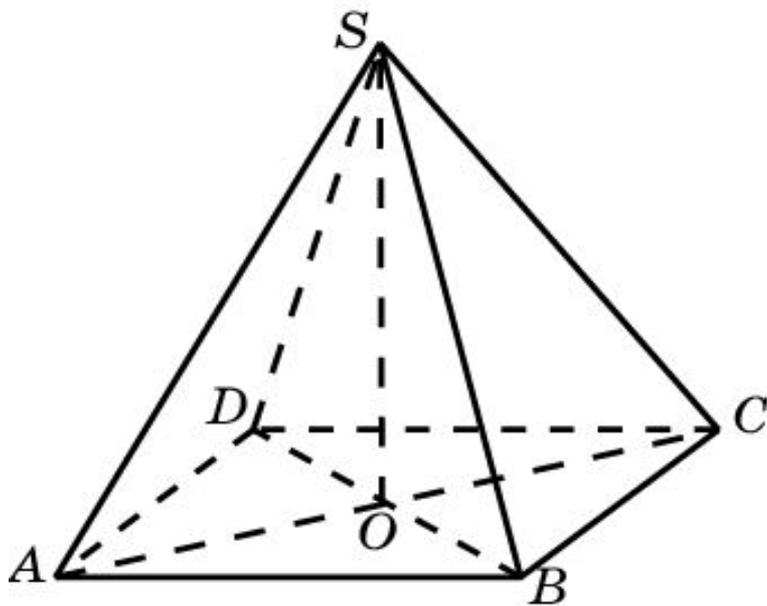
Упражнение 4

В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.

Ответ: 32 м^3 .

Упражнение 5

Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.

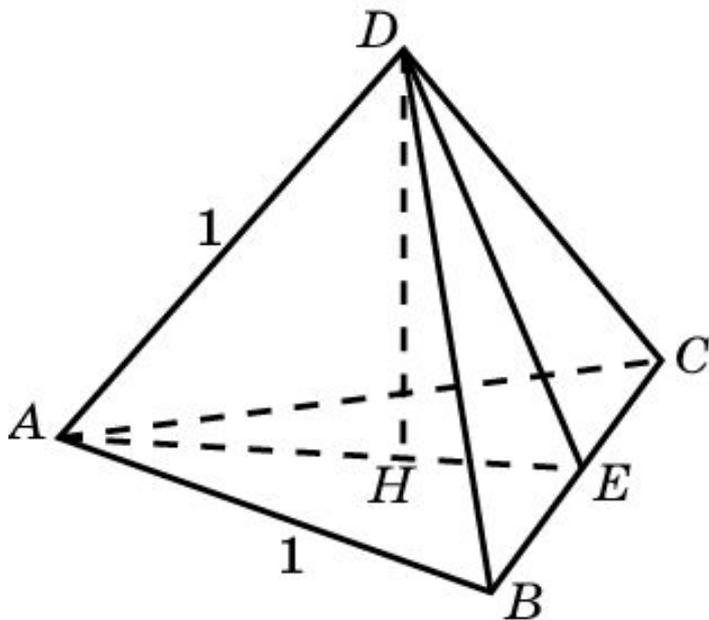


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Решение. Пусть ACS –
правильный треугольник.
Его высота SO равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Сторона основания равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Следовательно, объем пирамиды
равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Упражнение 6

Найдите объем тетраэдра с ребром, равным 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Решение. Пусть E – середина ребра BC . В треугольнике ADE

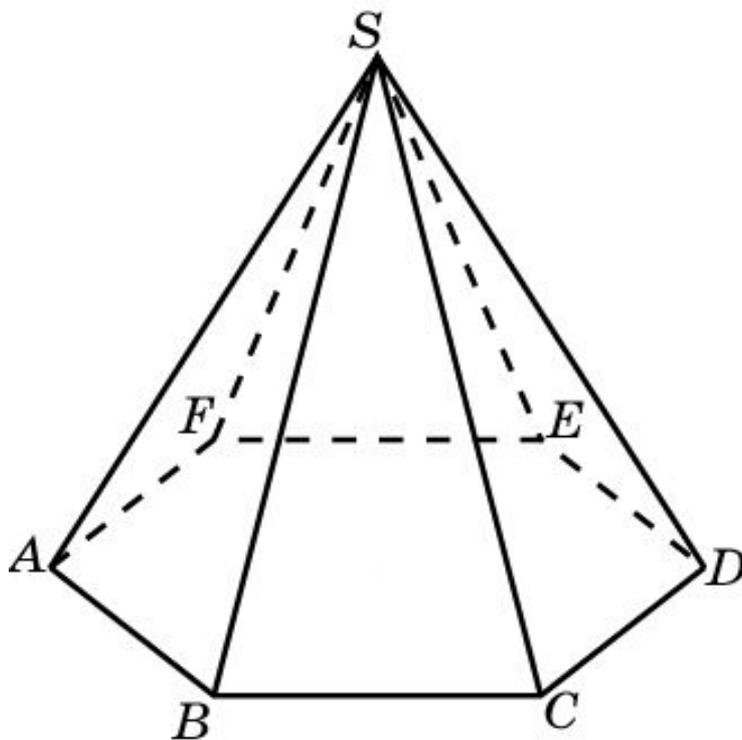
$AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота DH равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Площадь треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Следовательно, объем тетраэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Упражнение 7

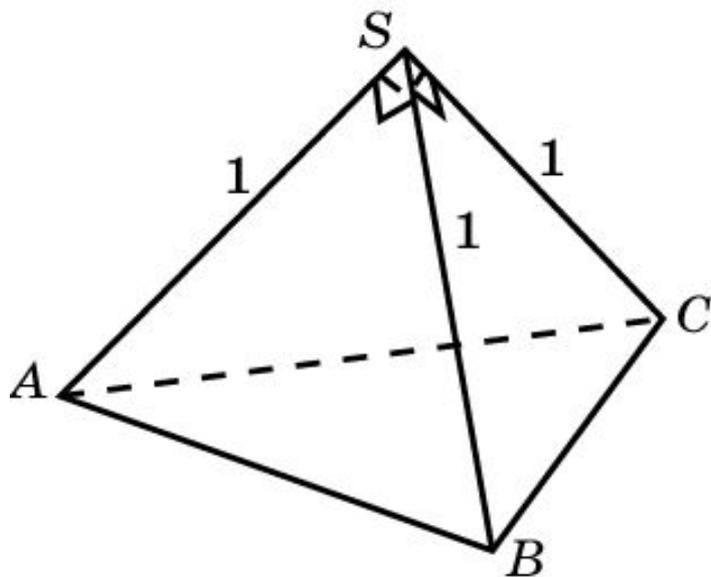
Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3 . Сторона основания 1 см . Найдите боковое ребро.



Ответ: 7 см .

Упражнение 8

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 1. Найдите объем пирамиды.



Решение. Примем треугольник ABS за основание пирамиды.

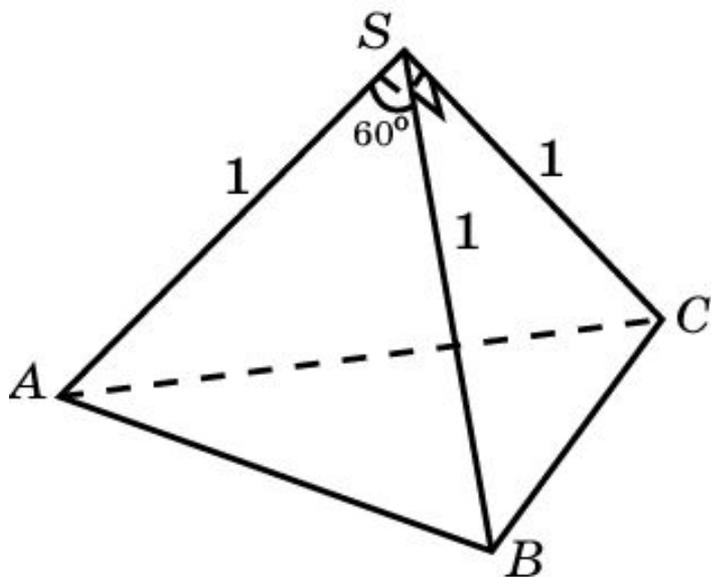
Тогда SC будет высотой.

Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Упражнение 9

Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна 1, а плоские углы при вершине равны 60° , 90° и 90° .



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

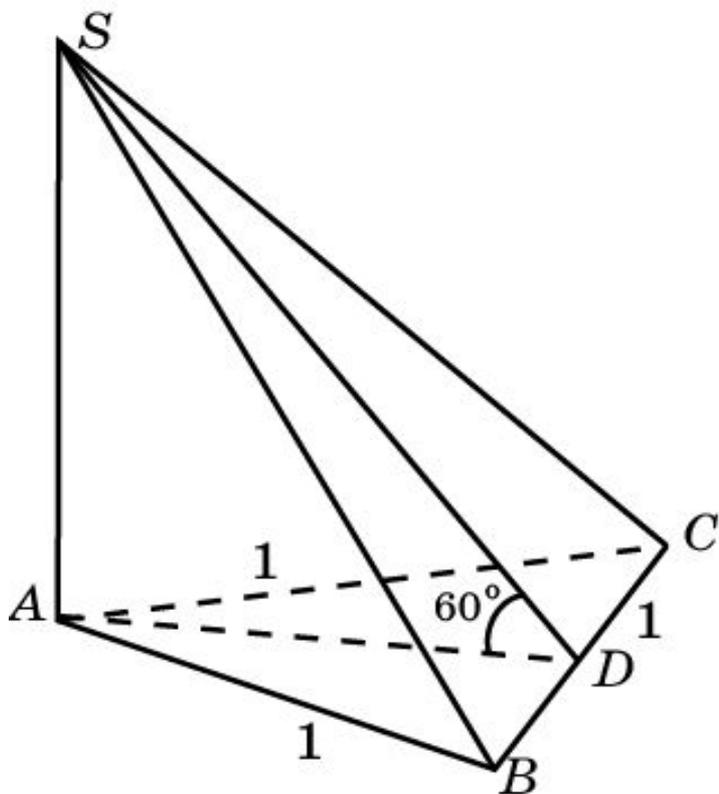
Решение. Примем треугольник ABS за основание пирамиды.

Тогда SC будет высотой.

Объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Упражнение 10

Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 60° . Найдите объем пирамиды.



Решение. Площадь
треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

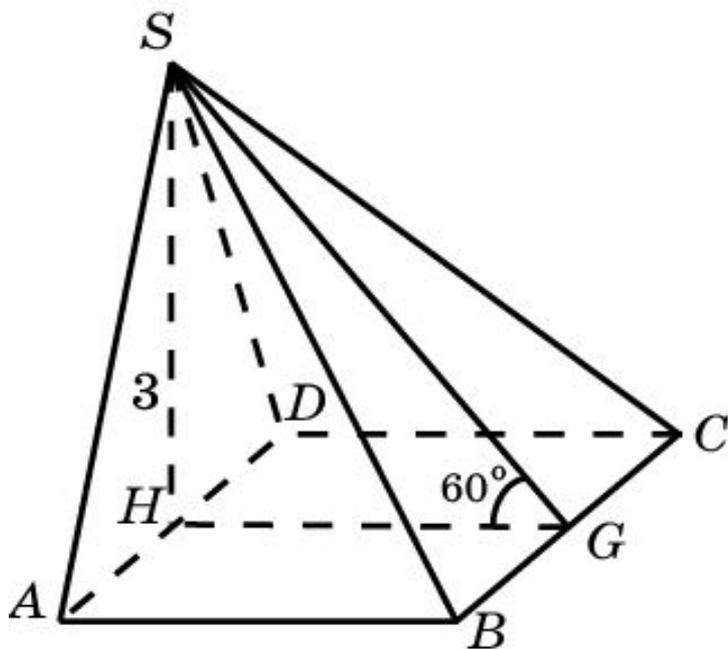
Высота SA равна $\frac{3}{2}$.

Следовательно, объем
пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 11

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 3 см. Найдите объем пирамиды.



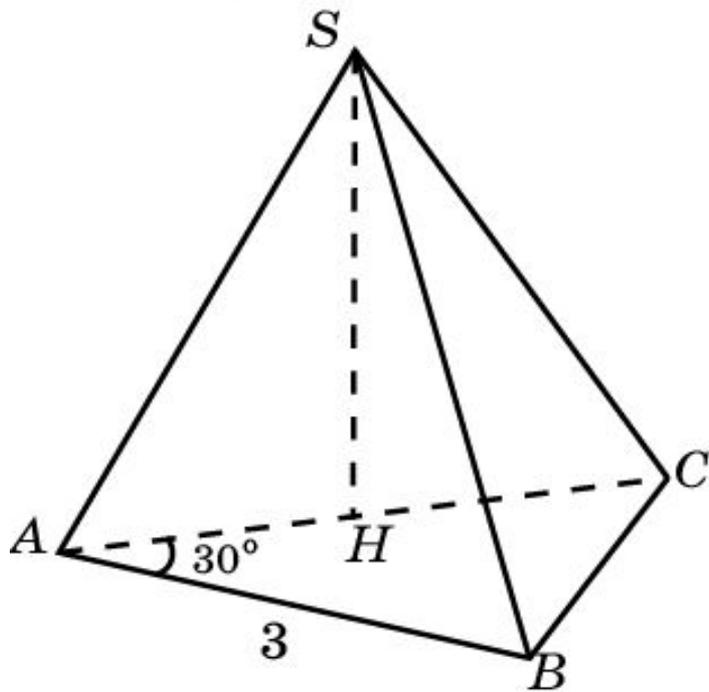
Решение. Треугольник SAD равнобедренный со стороной $2\sqrt{3}$.
 $AB = GH = \sqrt{3}$.

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 6. Следовательно, объем пирамиды равен 6.

Ответ: 6.

Упражнение 12

В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см, а прилежащий к нему острый угол равен 30° . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.



Решение. Площадь треугольника ABC равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

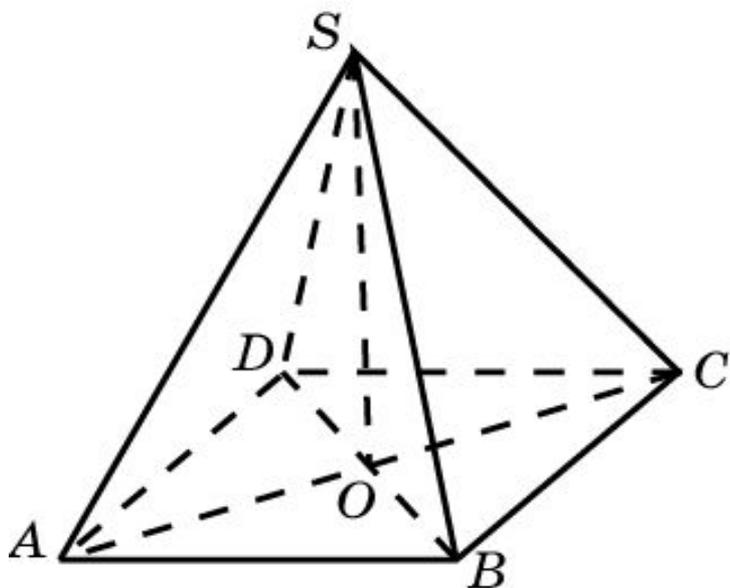
Основанием высоты SH служит середина AC . Треугольник SAC равносторонний со стороной, равной $2\sqrt{3}$. Его высота равна 3. Следовательно, объем пирамиды

равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 13

Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом 30° . Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите объем пирамиды.



Ответ: $\frac{800\sqrt{3}}{13}$ см³.

Решение. Площадь основания пирамиды равна 120 см². Сторона основания равна 13 см.

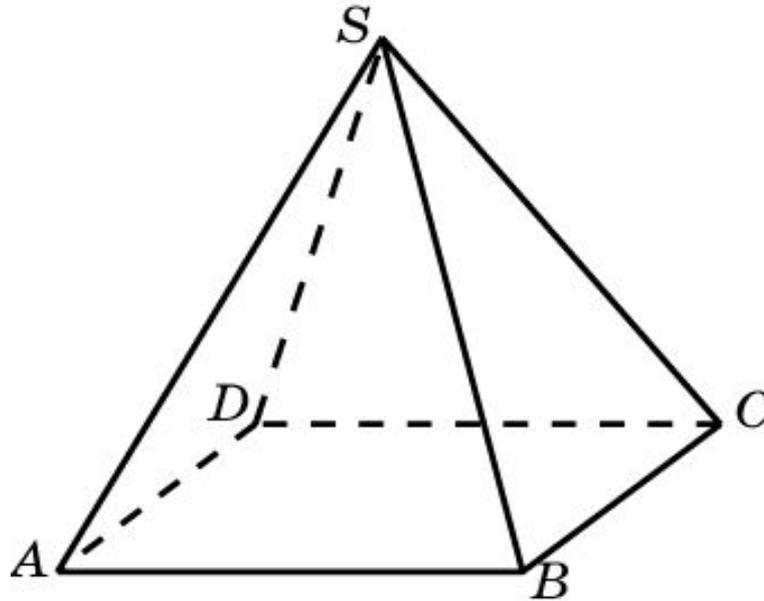
Высота ромба равна $\frac{120}{13}$.

Высота пирамиды равна $\frac{20\sqrt{3}}{13}$.

Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{800\sqrt{3}}{13}$.

Упражнение 14

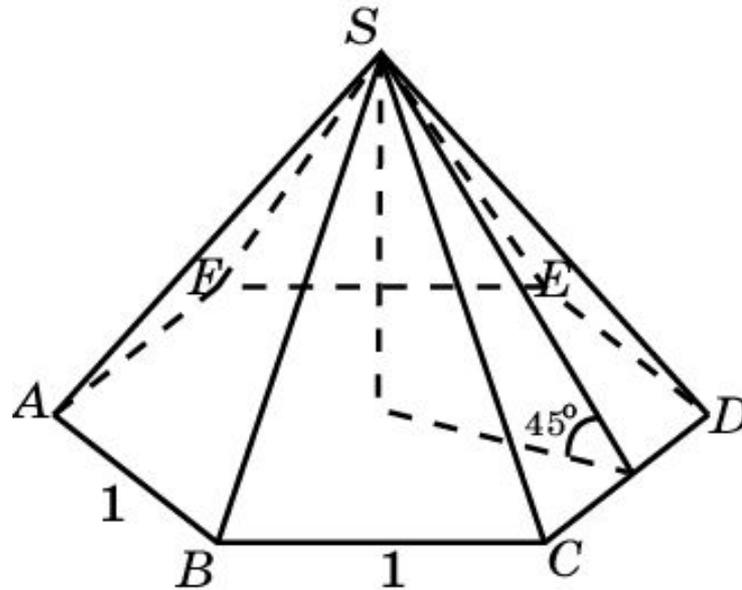
Пирамида, объем которой равен 1, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объем оставшейся части пирамиды.



Ответ: $\frac{1}{2}$.

Упражнение 15

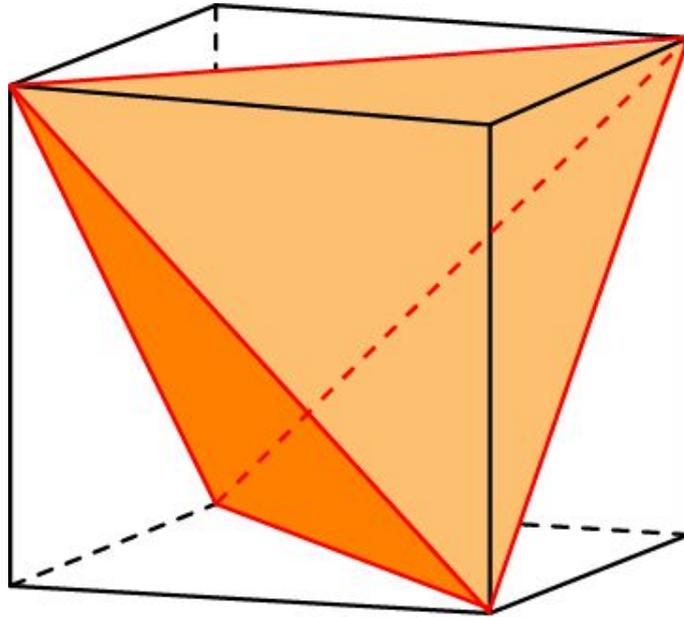
Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды 1, а угол между боковой гранью и основанием 45° . Найдите объем пирамиды.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

Упражнение 16

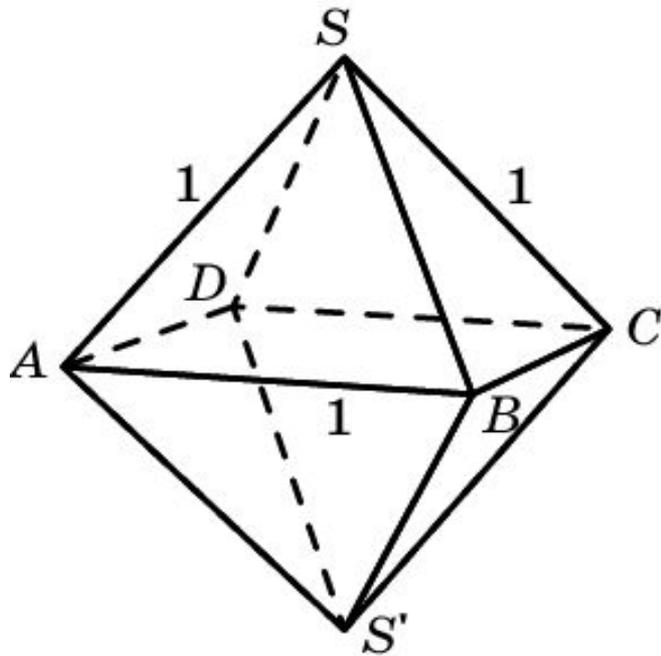
В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объем тетраэдра.



Ответ: $\frac{1}{3}$.

Упражнение 17

Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1.



Решение. Октаэдр состоит из двух правильных четырехугольных пирамид со стороной основания 1 и высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, Объем октаэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

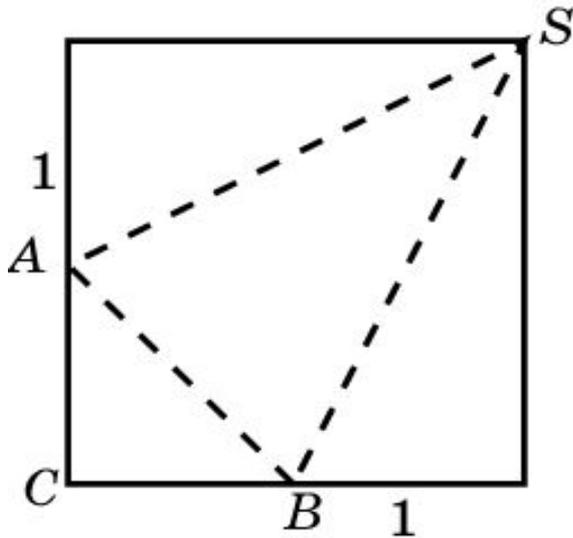
Упражнение 18

Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объем.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Упражнение 19

Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной 1. Найдите объем этой пирамиды.

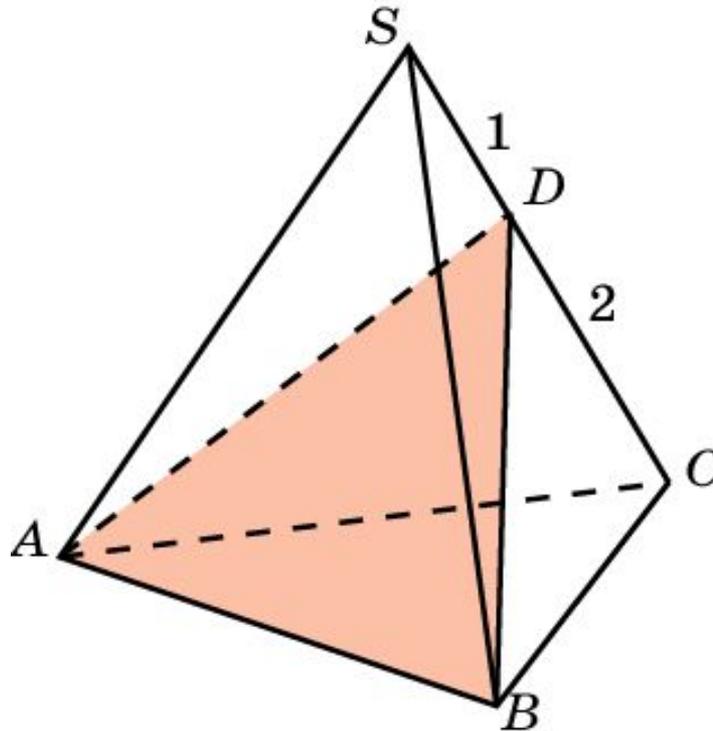


Решение. Основанием пирамиды будет прямоугольный треугольник ABC с катетами, равными 0,5. Высота пирамиды будет равна стороне квадрата. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{1}{24}$.

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Упражнение 20

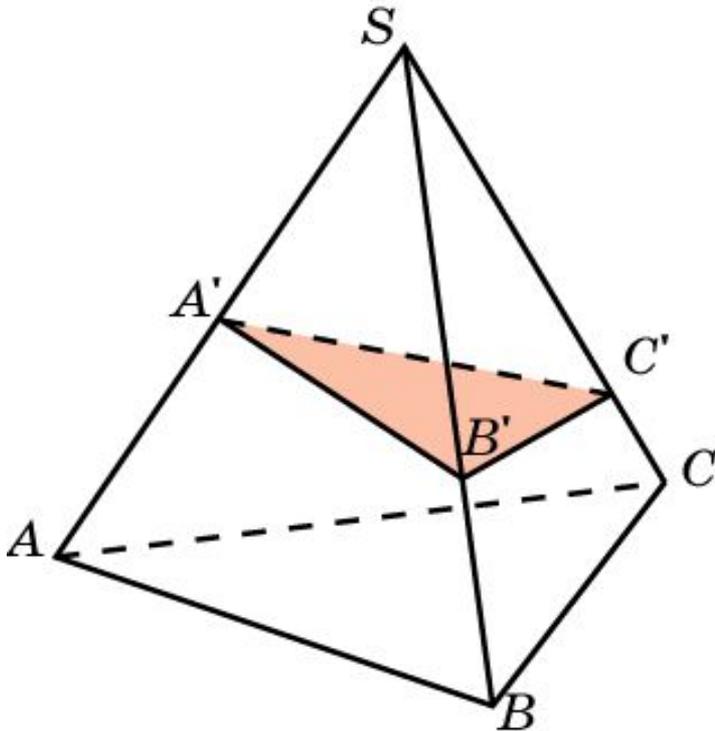
Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и делит противоположное боковое ребро в отношении $1 : 2$, считая от вершины. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?



Ответ: $1 : 2$.

Упражнение 21

Плоскость пересекает ребра SA , SB , SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A' , B' , C' соответственно. Найдите объем пирамиды $SA'B'C'$, если объем исходной пирамиды равен 1 и $SA':SA = 1:2$, $SB':SB = 2:3$, $SC':SC = 3:4$.

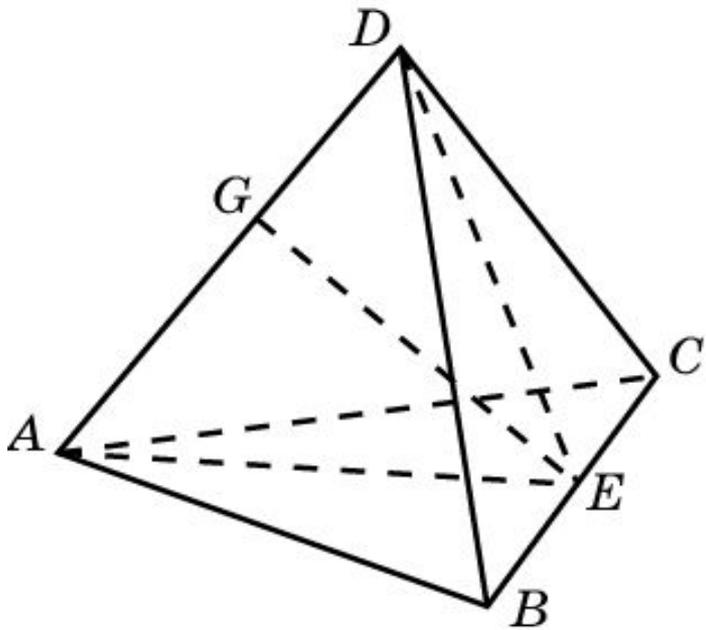


Решение. Площадь треугольника $SA'B'$ составляет $1/3$ площади треугольника SAB . Высота, опущенная из точки C' составляет $3/4$ высоты, опущенной из вершины C . Следовательно, объем пирамиды $SA'B'C'$ равен $1/4$.

Ответ: $1/4$.

Упражнение 22

Два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3. Расстояние между ними равно 2. Найдите объем тетраэдра.

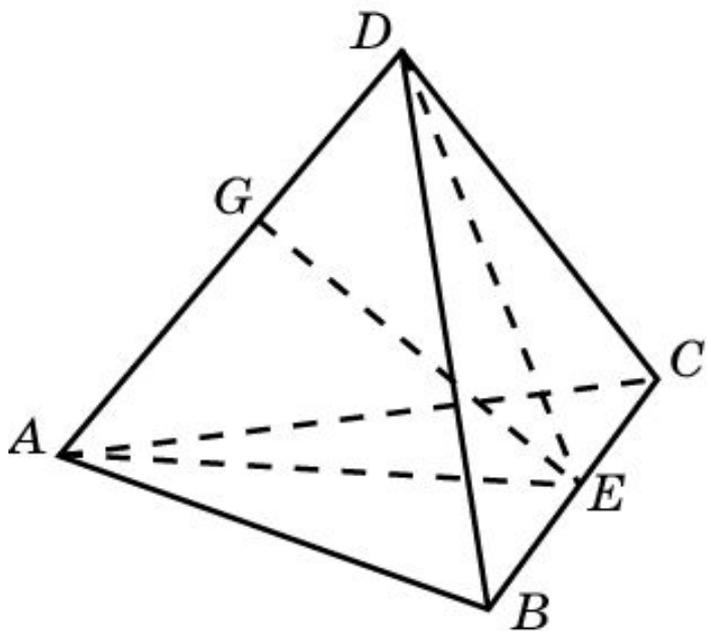


Решение. Пусть AB перпендикулярно CD . Проведем сечение ADE перпендикулярное BC . Площадь треугольника ADE равна 3. Объем пирамиды равен 3.

Ответ: 3.

Упражнение 23

Два противоположных ребра тетраэдра образуют угол 60° и равны 2. Расстояние между ними равно 3. Найдите объем тетраэдра.

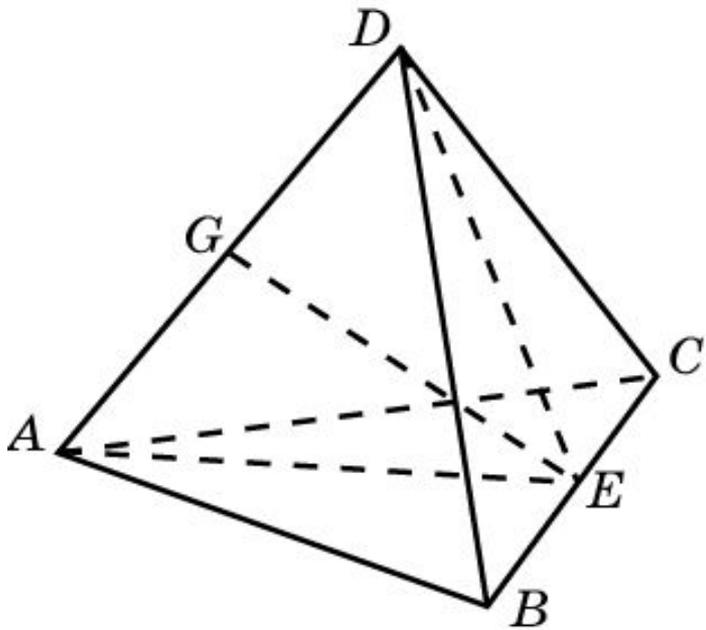


Решение. Пусть угол между AB и CD равен 60° . Проведем общий перпендикуляр EG . Площадь треугольника ADE равна 3. Объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 24

Одно ребро тетраэдра равно 6. Все остальные ребра равны 4. Найдите объем тетраэдра.



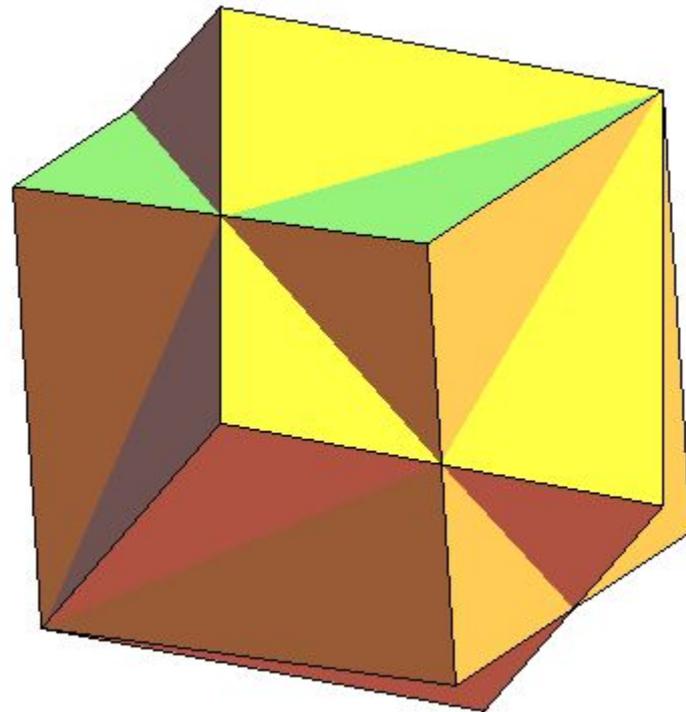
Решение. Пусть $BC = 6$. Обозначим E середину BC . $AE = DE = \sqrt{7}$. Высота EG треугольника ADE равна $\sqrt{3}$. Его площадь равна $2\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Упражнение 25

Два куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на угол 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

Ответ: Общая часть является правильной 6-й бипирамидой со стороной основания $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и высотой $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Объем этой бипирамиды равен $\frac{3a^3}{4}$.



Упражнение 26

Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Один из них повернут на 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{18}$.

Упражнение 27

Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объем общей части этих тетраэдров.

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$.

Упражнение 28

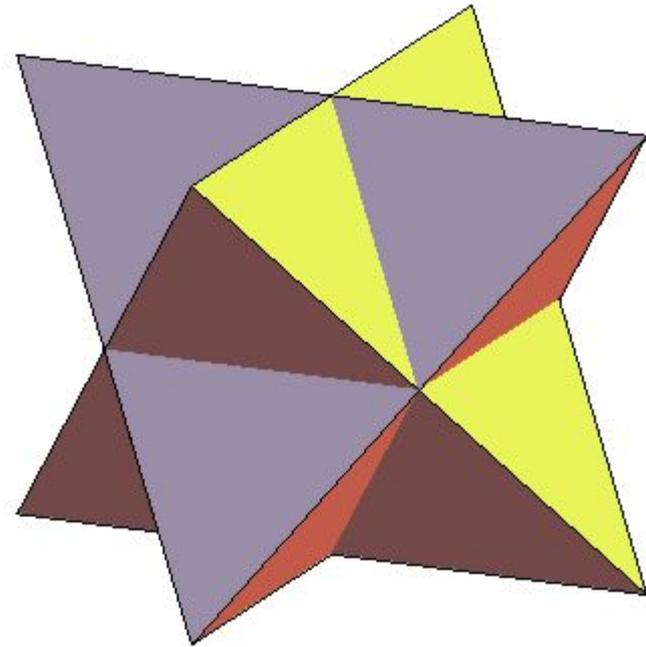
Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Основание одного из тетраэдров повернуто на 60° по отношению к основанию другого. Найдите объем общей части этих тетраэдров.

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{54}$.

Упражнение 29

Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер. Один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

Ответ: Общей частью является октаэдр (правильная 4-я бипирамида) с ребром $\frac{a}{2}$.
Его объем равен $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$.



Упражнение 30

Октаэдр с ребром 1 повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол 45° . Найдите объем общей части исходного октаэдра и повернутого?

Ответ: Общей частью является правильная 8-я бипирамида с площадью основания $2\sqrt{2} - 2$ и высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ее объем равен $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$.

