



Многогранники: виды задач и методы их решения (типовые задания С2)

- 2

**Методическая разработка Амачкиной А.А.
МОУ СОШ №12,
г. Балашиха, Московской области.**

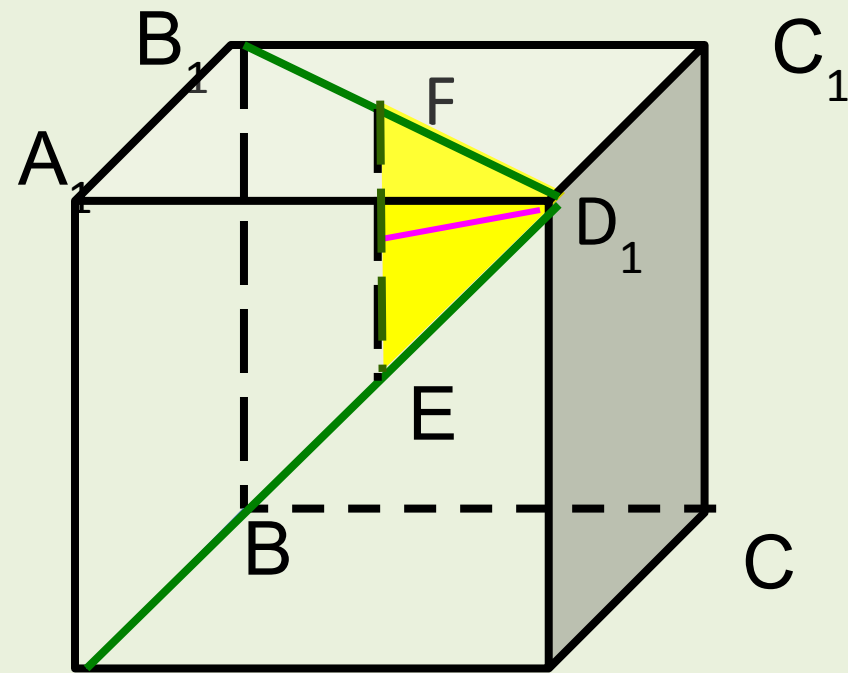
1.2. Расстояние от точки до прямой

- **Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.**
- **Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.**
- **Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.**

Поэтапно-вычислительный метод

Расстояние от точки до прямой можно вычислить, как длину отрезка перпендикуляра, если удастся включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот.

Пример 4. *При условиях примера 1 найти расстояние от точки D_1 до прямой EF .*



Решение. Пусть h – длина высоты треугольника, D_1EF опущенной из точки D_1 .
Найдем h , используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна

$$\frac{1}{2} D_1F * D_1E * \sin \angle FD_1E = \frac{1}{2} * \frac{2\sqrt{2}}{3} * \frac{\sqrt{2}}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

С другой стороны площадь треугольника D_1EF равна

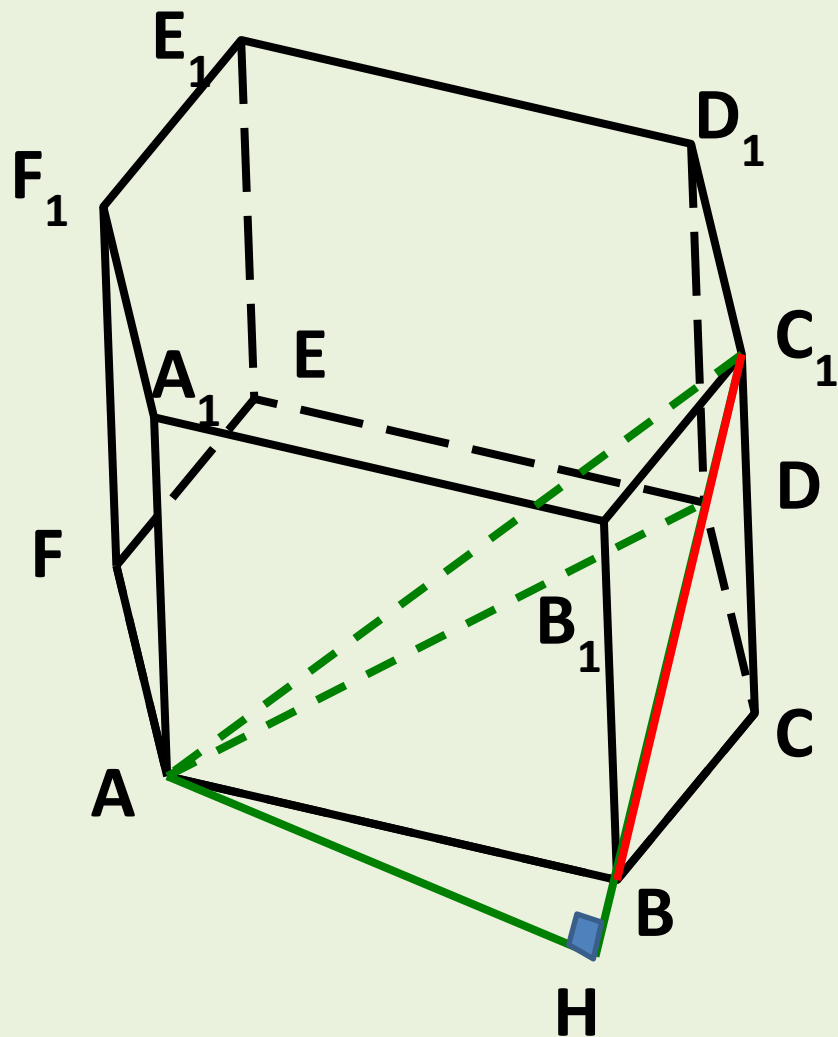
$$\frac{1}{2} FE * h = \frac{\sqrt{6}}{6} h. \quad \text{Из уравнения} \quad \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{6} h$$

находим $h = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2 + D_1E^2 = D_1F^2$, т.е. треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ : $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Пример 5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны l , найти расстояние от точки A до прямой BC_1 .



Решение.

В квадрате $BCC_1 B_1$ диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$

В прямоугольном треугольнике ACD , где

$$\angle ACD = 90^\circ, \quad AD = 2,$$

находим $AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Из прямоугольного
треугольника ACC_1 имеем $AC_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

В треугольнике ABC_1 , используя теорему
косинусов, получаем $\cos \varphi = \frac{2^2 + (\sqrt{2})^2 - 1^2}{2 * 2 * \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

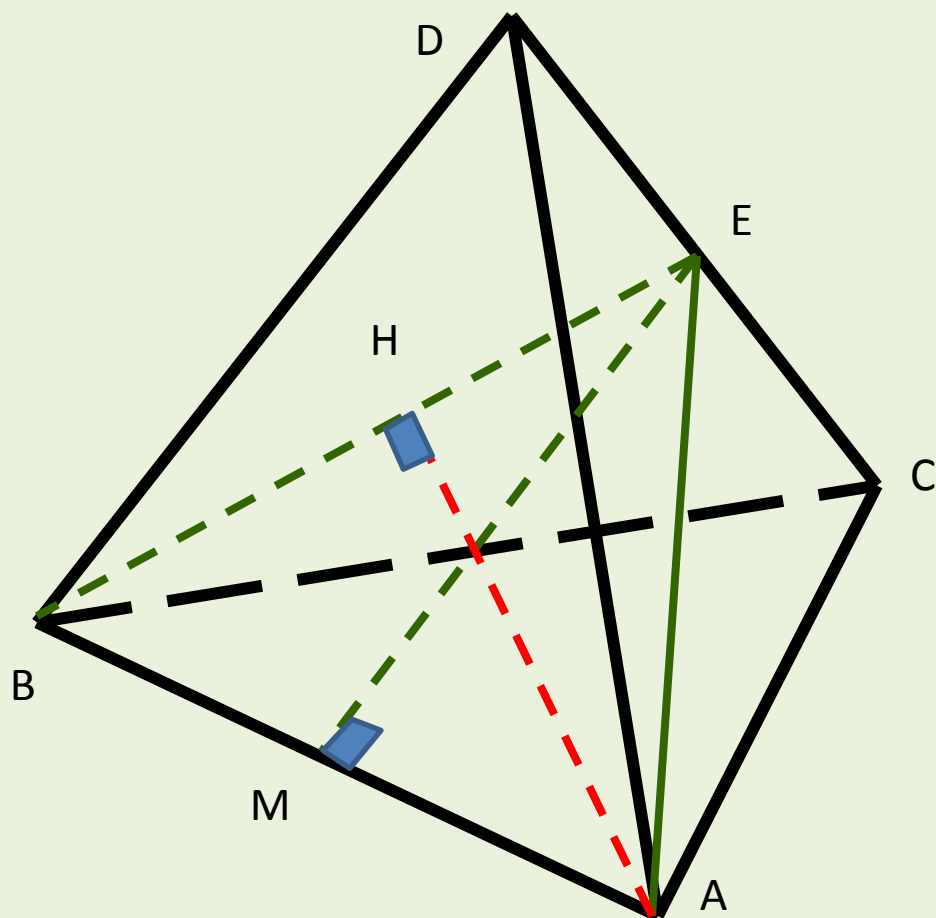
где $\angle AC_1B = \varphi$. Далее находим $\sin \varphi = \frac{\sqrt{14}}{8}$

и из треугольника AC_1H высоту

$$AH = AC_1 \sin \varphi = 2 * \frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ : $\frac{\sqrt{14}}{4}$

Пример 6. (МИОО, 2010). В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны l , найти расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .



Решение.

Так как все ребра $ABCD$ - равные правильные треугольники, то медианы BE и AE треугольников BDC и ADC равны и

$$BE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник ВЕА и его высоты ЕМ и АН. Выражая площадь треугольника двумя способами, получаем

$$S_{BEA} = \frac{1}{2} * AH * BE = \frac{1}{2} * EM * AB, \quad \text{получаем равенство}$$

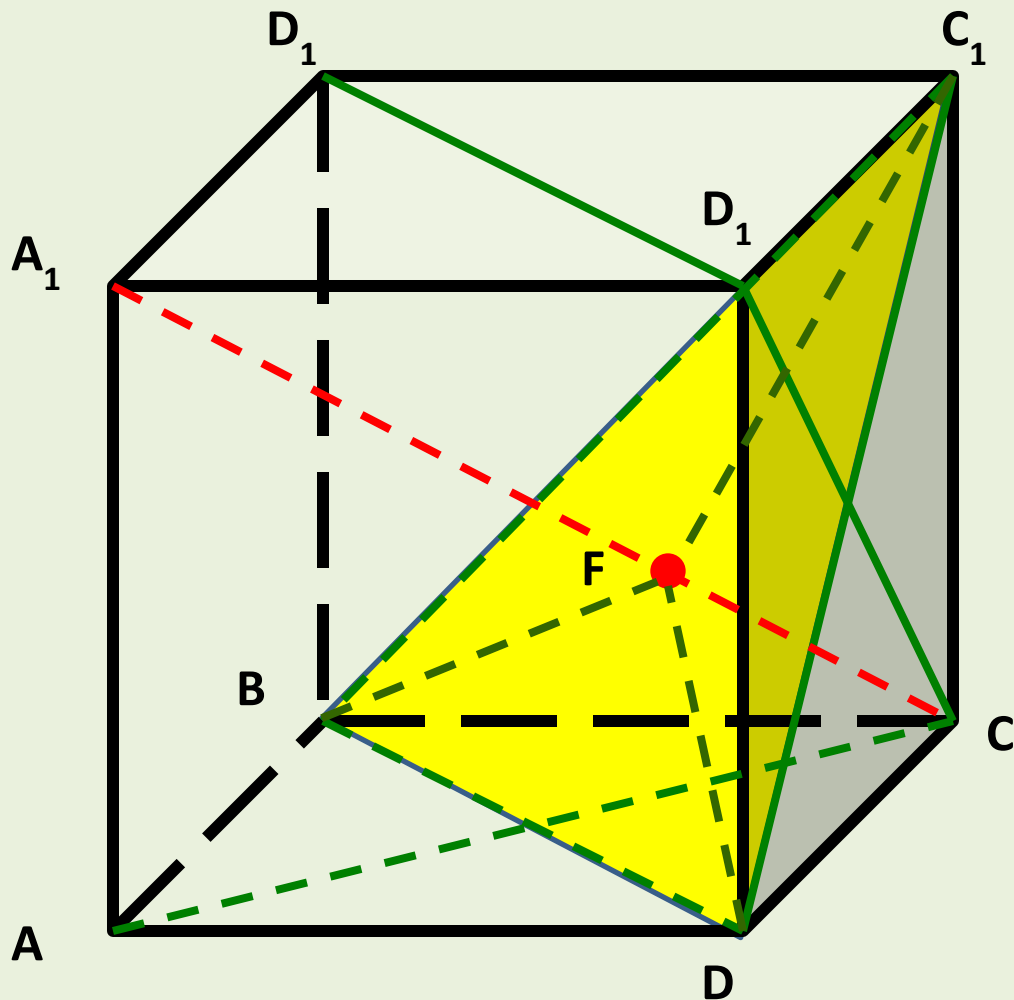
$$AH * BE = EM * AB. \quad \text{Так как } EM = \sqrt{BE^2 - BM^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{то получаем}$$

$$AH = \frac{EM * AB}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} * 1 * \frac{2}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ответ : } \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Пример 7. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти расстояние от точки D до прямой $A_1 C$.



Пусть $A_1C \square BDC_1 = F$. Так как $A_1C \perp BDC_1$
(опорная задача 20), то $FC_1 = FB = FD$

как проекции на плоскость BDC_1 равных наклонных CC_1 , CB и CD соответственно. Следовательно, точка F является центром правильного треугольника BDC_1 . Поэтому искомое расстояние равно радиусу окружности, описанной около треугольника BDC_1 .

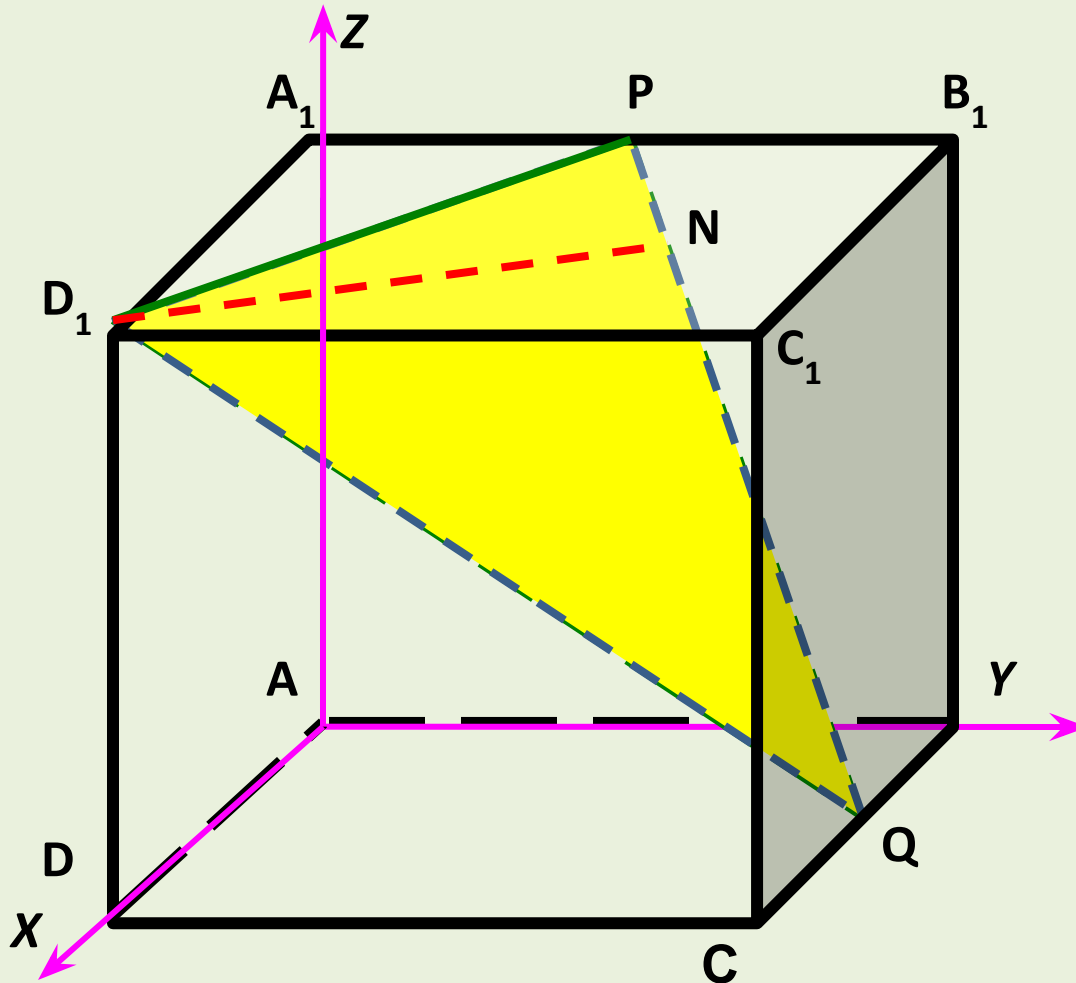
Сторона этого треугольника равна $\sqrt{2}$ значит,

$$\rho(D, A_1C) = DF = \frac{\sqrt{2} * \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Координатный

Пример 8. ~~метод~~ В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ , где P и Q – середины соответственно ребер $A_1 B_1$ и BC .



Решение. Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке A
Найдем координаты точек

$$P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), Q\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right), D_1(1; 0; 1). \quad \text{Тогда}$$

$$PQ = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad D_1Q = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2},$$

$$D_1P = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 0} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Из треугольника D_1PQ , используя формулу

$$\cos \angle D_1 P Q = \frac{D_1 P^2 + Q P^2 - D_1 Q^2}{2 * D_1 P * Q P}, \quad \text{находим}$$

$$\cos \angle D_1 P Q = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}}{2 * \sqrt{\frac{5}{4}} * \sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{30}}. \quad \text{Далее} \quad \text{получаем}$$

$$\sin \angle D_1 P Q = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{30}} \right)^2} = \sqrt{\frac{29}{30}}.$$

Пусть $D_1 N \perp P Q$, где $N \in P Q$. Тогда

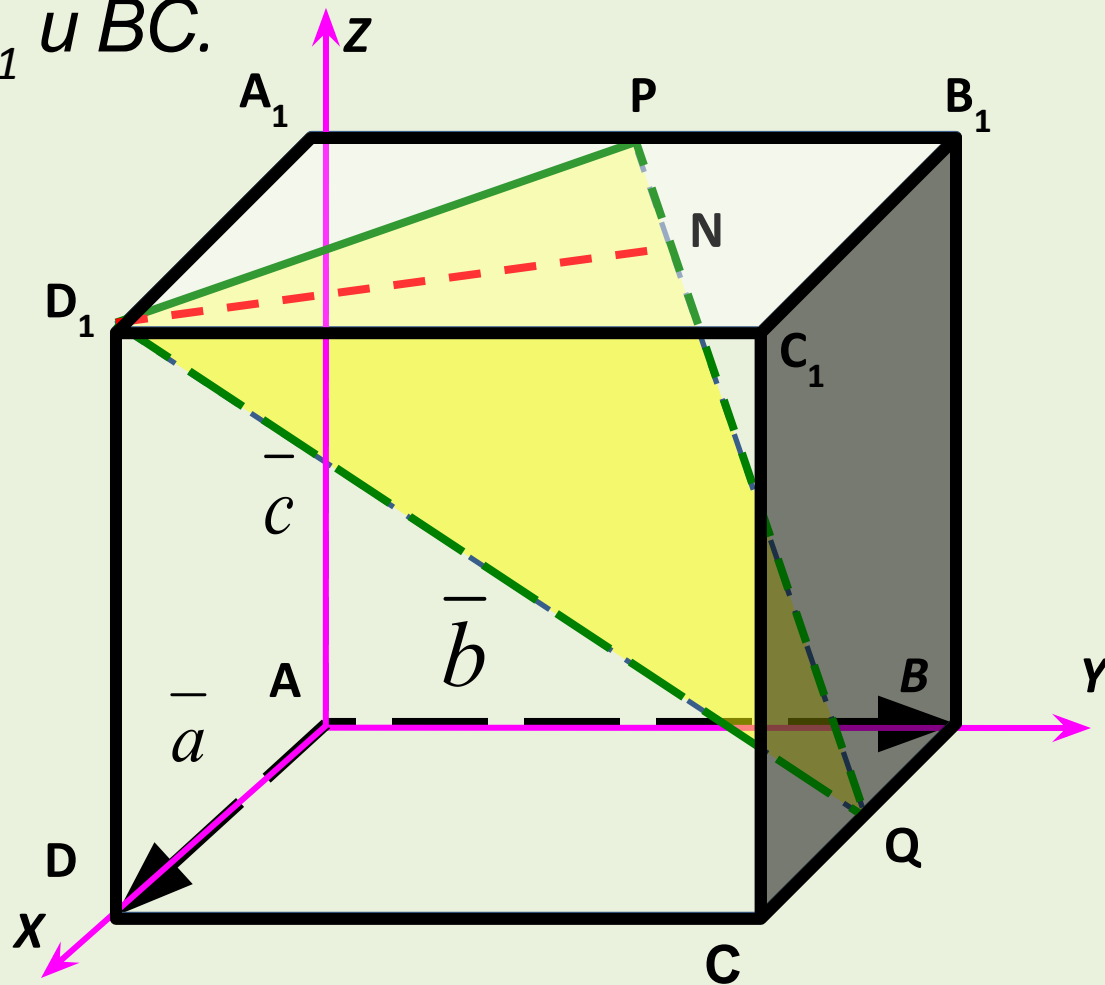
$$D_1 N = D_1 P * \sin \angle D_1 P Q, \quad D_1 N = \sqrt{\frac{5}{4}} * \sqrt{\frac{29}{30}} = \sqrt{\frac{174}{144}} = \frac{\sqrt{174}}{12}$$

$$\text{Ответ:} \quad \frac{\sqrt{174}}{12}$$

Векторный

Пример. Метод

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ , где P и Q – середины соответственно ребер $A_1 B_1$ и BC .



Решение.

Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * \vec{c} = \vec{b} * \vec{c} = 0.$$

Выразим вектор $\overrightarrow{PQ}$ через базисные векторы

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{PD_1} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

Пусть $D_1N \perp PQ$, где $N \in PQ$. Выразим

вектор $\overrightarrow{D_1N}$, учитывая коллинеарность

$$\text{векторов } \overrightarrow{PN} \text{ и } \overrightarrow{PQ}: \quad \overrightarrow{D_1N} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PD_1} = x * \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1}$$

Так как $\overrightarrow{D_1N} \perp \overrightarrow{PQ}$, то $\overrightarrow{D_1N} * \overrightarrow{PQ} = 0$.

Отсюда получаем $(x * \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1}) * \overrightarrow{PQ} = 0$

$$x * \overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{PD_1} * \overrightarrow{PQ},$$

$$x * \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{c} \right)^2 = \left(\vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} \right) * \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{c} \right),$$

$$x * \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{6}$$

$$\overrightarrow{D_1N} = \frac{1}{6} * \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{c} \right) + \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} = -\frac{11}{12} \vec{a} + \frac{7}{12} \vec{b} - \frac{1}{6} \vec{c}$$

$$|\overrightarrow{D_1N}| = \sqrt{D_1N^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{12} \vec{a} + \frac{7}{12} \vec{b} - \frac{1}{6} \vec{c} \right)^2} = \sqrt{\frac{121}{144} + \frac{49}{144} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{174}}{12}$$

Замечание. Решение данного примера векторным методом не является рациональным, но приведено с целью показа широких возможностей векторного метода при решении задач разных видов

Используемая литература:

***Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники:
виды задач и методы их решения.***