Методы решения геометрических задач

ЕГЭ, задание С2

(Расстояние от точки до плоскости)

Подготовил:
учитель математики
МОУ «СОШ №10 с. Солдато-Александровского»
Кобзев Д.А.

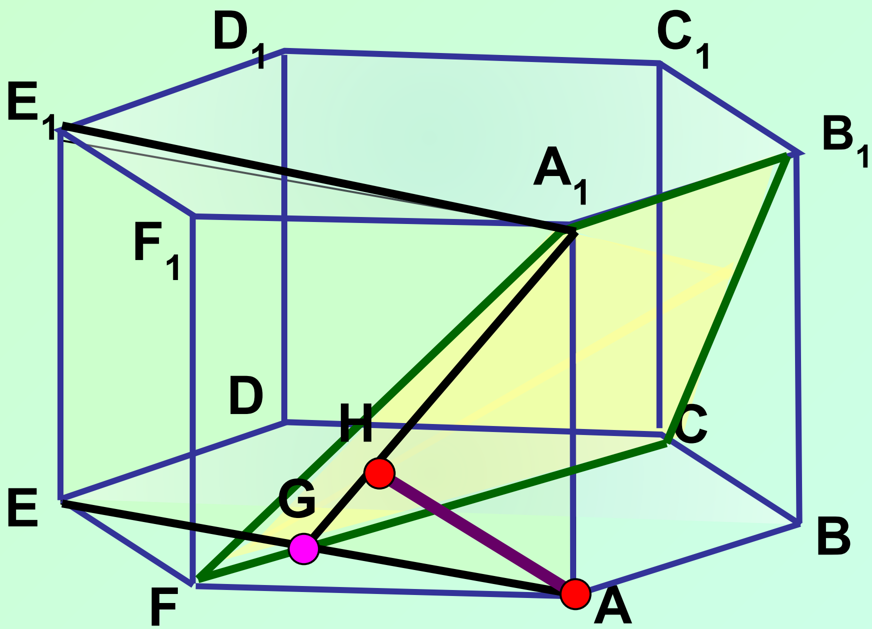
2012 – 2013 уч.г.

Расстояние от точки до плоскости

Методы

- Поэтапно-вычислительный метод
- Метод параллельных прямых и плоскостей
- Векторный метод
- Координатный метод
- Метод объемов

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.



$$FC \perp AE, FC \perp AA_1 \Rightarrow FC \perp (AA_1E_1).$$

$$FC \cap AE = G.$$

$$(AA_1E_1) \perp (A_1B_1C) - \left[FC \in (A_1B_1C)\right],$$

$$(AA_1E_1) \cap (A_1B_1C) = A_1G.$$

Высота AH в треугольнике AA_1G – искомое расстояние.

Из прямоуг. треугольника ADE:

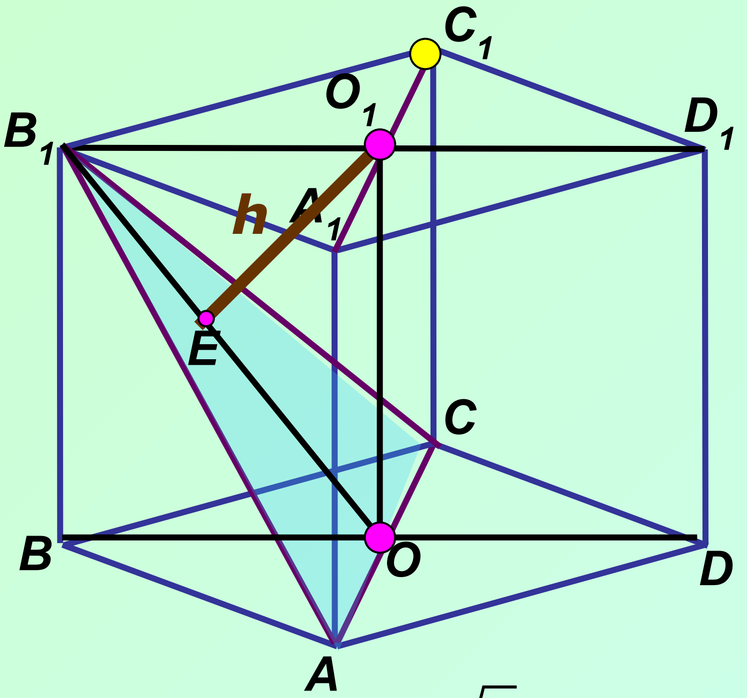
$$AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = \sqrt{3}, AG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из прямоуг. треугольника AGA_1: $GA_1 = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

$$AH = \frac{AG \cdot AA_1}{GA_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 : \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{7}}.$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C



$A_1C_1 \parallel AC,$ то $A_1C_1 \parallel (AB_1C).$

Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки A_1C_1 до плоскости AB_1C.

Обозначим расстояние от O_1 до (AB_1C) через h.

Покажем, что $O_1E \perp AB_1C$.

$$O_1E \in BB_1D_1D,\ AC \perp BB_1D_1D \Rightarrow O_1E \perp AC$$

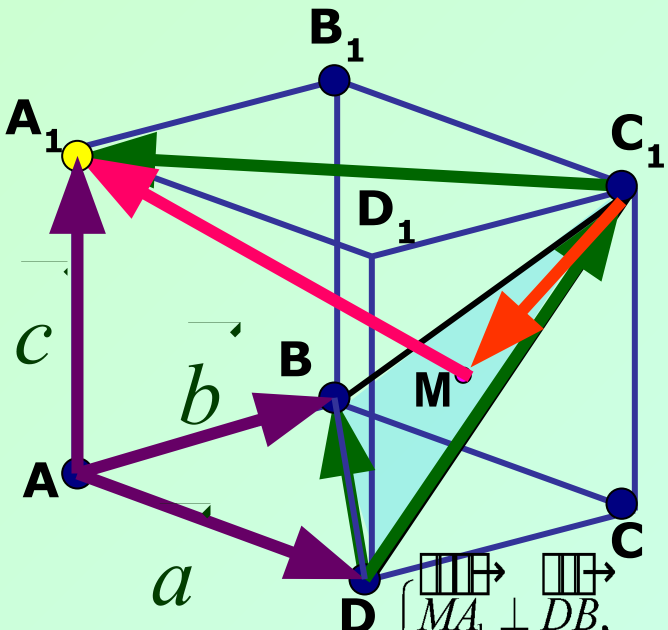
O_1E – перпендикуляр к (AB_1C), а $O_1E = h$

Так как $B_1O_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, O_1O = 1,$ то из прямоугольного треугольника OB_1O_1:

$OB_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2} + 1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.$ Искомое расстояние: $h = \dfrac{B_1O_1 \cdot O_1O}{OB_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 : \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1



Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AA_1}=\vec{c},$ тогда

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1, \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

Выразим векторы $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{C_1A_1}$ через $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}, \overrightarrow{DC_1}=\vec{b}+\vec{c}, \overrightarrow{C_1A_1}=-\vec{a}-\vec{b}.$$

Пусть $MA_1\perp BDC_1; M\in BDC_1.$

$$\overrightarrow{C_1M}=x\cdot\overrightarrow{DB}+y\cdot\overrightarrow{DC_1}.$$

$$\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{C_1A_1}-\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1A_1}-\left(x\cdot\overrightarrow{DB}+y\cdot\overrightarrow{DC_1}\right).$$

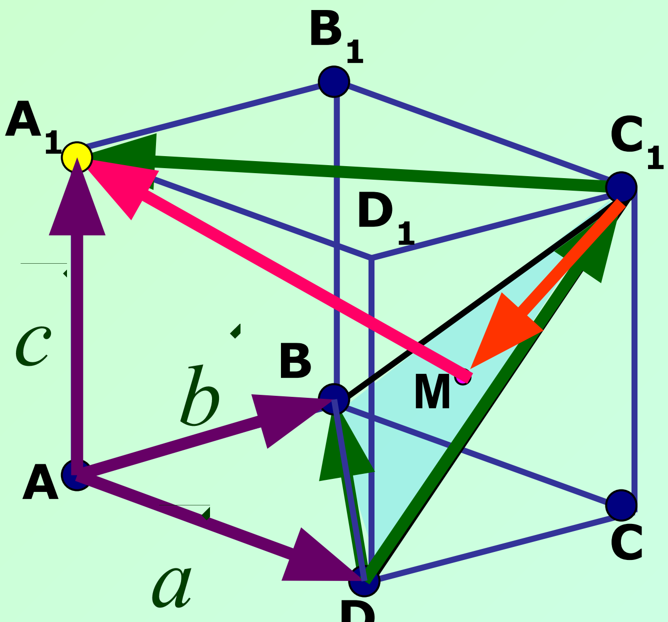
$$\begin{cases}\overrightarrow{MA_1}\perp\overrightarrow{DB},\\ \overrightarrow{MA_1}\perp\overrightarrow{DC_1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DB}-\left(x\cdot\overrightarrow{DB}^2+y\cdot\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{DB}\right)=0,\\ \overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}-\left(x\cdot\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC_1}+y\cdot\overrightarrow{DC_1}^2\right)=0.\end{cases}$$

$$\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0; \overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{b}^2=1,$$

$$\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)=-\vec{b}^2=-1; \overrightarrow{DB}^2=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2=\vec{b}^2+\vec{a}^2=2,$$

$$\overrightarrow{DC_1}^2=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\vec{b}^2+\vec{c}^2=2,$$

Имеем:



$$\begin{cases} 0-(x\cdot 2+y\cdot 1)=0, \\ -1-(x\cdot 1+y\cdot 2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0, \\ x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

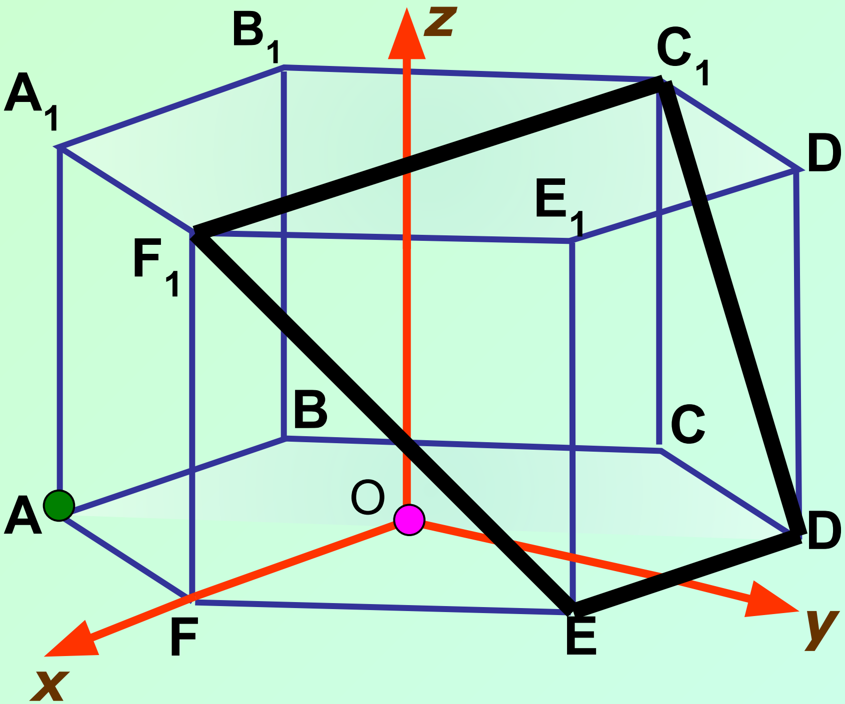
$$\overrightarrow{MA_1}=-\vec{a}-\vec{b}-\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{2}{3}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}.$$

Таким образом

$$|\overrightarrow{MA_1}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости DEF_1



Введем систему координат и найдем координаты точек:

$$A\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), D\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), F_1(1;0;1).$$

$ax+by+cz+d=0-$ уравнение (DEF_1).

Подставим координаты точек D, E, F_1 в уравнение:

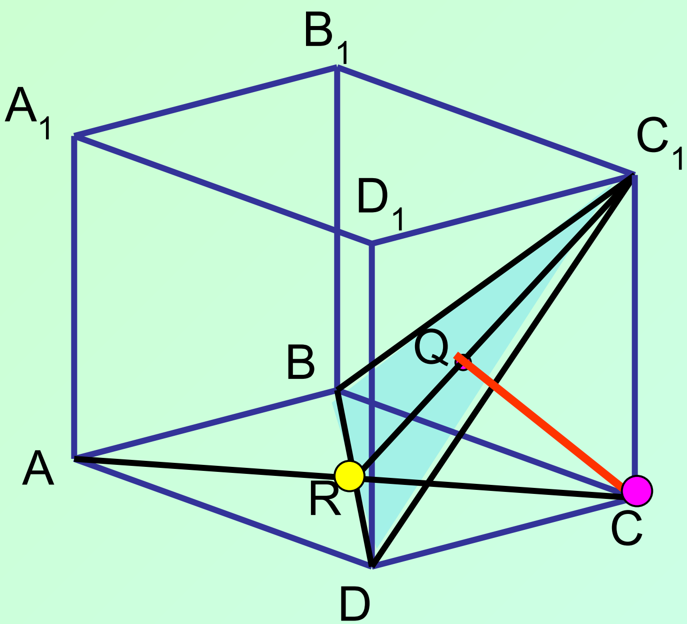
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0,(D) \\ \frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0,(E) \\ a+c+d=0.(F_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0, \\ b=-\frac{2\sqrt{3}}{3}d, \\ c=-d. \end{cases}$$

уравнение (DEF_1): $2\sqrt{3}y+3z-3=0.$

$$\rho(A,DEF_1)=\frac{\left|0\cdot\frac{1}{2}-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot 0-3\right|}{\sqrt{0^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{7}.$

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти расстояние от точки C до плоскости BDC_1



Расстояние x равно высоте CQ, опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{BCD}\cdot CC_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot CC_1 = \frac{a^3}{6}.$$

Треугольник BDC_1 – равносторонний.

$$V_2 = \frac{1}{3}S_{BC_1D}\cdot CQ = \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot x = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot x.$$

Так как $V_1 = V_2$, то получаем уравнение: $$\frac{a^3}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot x;\ x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $$\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$