Алгебра и начала математического анализа 11 класс

«Исследование функций и построение их графиков»

<u>Автор презентации</u>:

учитель математики МБОУ «Малошильнинская СОШ» Тукаевского района

Республики Татарстан

Киямова Фируза Мухамматовна

Алгоритм исследования функции

Для исследования функции необходимо пройти следующие этапы:

1. Находим область определения функции:

D(f)=?

Областью определения функции y=f(x), заданной аналитически, называют множество всех действительных значений независимой переменной x, для каждого из которых функция принимает действительные значения.

Находим область изменения функции: **E(f)-?**

Областью изменения функции f(x) называют множество всех чисел f(x), соответствующих каждому x из области определения функции.

2. Выясняем четность функции.

- Если **f(-x)=f(x)**, то функция **f(x)** называется ***четной***. График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси Оу).
- Если **f(-x)=-f(x)**, то функция **f(x)** называется ***нечетной***. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3.Выясняем периодичность функции

Если **$f(x+T)=f(x)$** при некотором **$T>0$**, то функция **$y=f(x)$** называется ***<u>периодической</u>***. График периодической функции имеет одну и ту же форму на каждом из отрезков

$\dots, [-2T; -T], [-T; 0], [0; T], [T; 2T], \dots$.

Поэтому <u>достаточно построить график</u> на каком-нибудь одном таком отрезке и затем воспроизвести полученную кривую на остальных отрезках.

4. Находим точки максимума и минимума функции и интервалы возрастания и убывания (интервалы монотонности).

Для этого:

- вычисляем производную **$f'(x)$** и находим критические точки функции, т.е. точки, в которых **$f'(x)=0$** или не существует;
- определяя знак производной, находим интервалы возрастания и убывания функции: если **$f'(x)>0$**, то функция возрастает, если **$f'(x)<0$**, то функция убывает;
- если производная меняет знак при переходе через критическую точку **$x_0 \in D$**, то **x_0** – *точка экстремума*: если производная меняет знак с «минуса» на «плюс» – то **x_0** – *точка минимума*, если же с «плюса» на «минус» – то *точка максимума*. Если производная сохраняет знак при переходе через критическую точку, то в этой точке экстремума нет.

5. Находим точки перегиба функции и интервалы выпуклости вверх/вниз.

- Для этого:
- <u>вычисляем вторую производную</u> **f”(x)** и находим точки, принадлежащие области определения функции, в которых **f'(x)=0** или не существует;
- определяя знак второй производной, *находим интервалы выпуклости и вогнутости*:
- если **f”(x)<0**, то *график функции имеет выпуклость вверх*,
- если **f”(x)>0**, то *график функции имеет выпуклость вниз;*
- если вторая производная меняет знак при переходе через точку
- $x_0 \in D$, в которой **f'(x)=0** или не существует, то x_0 – *точка перегиба*.

6. Находим асимптоты функции.

- Вертикальные:

находим односторонние пределы в граничных точках

$\lim\limits_{\substack{n\to a \\ n>a}} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{\substack{n\to a \\ n>a}} f(x) = -\infty$.

Если такие пределы существуют, то прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции y=f(x)

- Наклонные асимптоты:

Если выполняется условие lim (f(x) – (kx + b)) = 0,

$x \to \pm\infty$

то прямая y = kx + b является асимптотой функции y = f(x) при $x \to \pm\infty$.

Коэффициенты k и b можно найти следующим образом:

- $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\qquad b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$

7. Есть ли у функции промежутки, где она возрастает (убывает)?

- **f'(x)> o**, <u>функция возрастающая</u>
- **f'(x)<o**, <u>функция убывающая</u>

8. Есть ли у нее промежутки знакопостоянства?

- **$f'(x) = 0$** на промежутке, => функция **$f(x)$** постоянная на этом промежутке.
- Если в точке **x_0** производная меняет знак с «+» на «-», то **x_0** - *точка локального максимума*;
- Если в точке **x_0** производная меняет знак с «-» на «+», то **x_0** - *точка локального минимума*.

Пример

$y = x/x^2 - 1$

- 1. Знаменатель выражения $x/(x^2 - 1)$ обращается в нуль при $x = -1$ и при $x = 1$, поэтому **D(f)** = $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.
- 2. **E(f) = R** (видно из дальнейшего исследования)
- 3. **f(-x) = -f(x)** - функция нечетная.
- 4. Функция непериодическая.
- 5. Производная функции в области определения:

  $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ и $f'(x) < 0$ во всей области определения =>функция непрерывна и возрастает во всей области определения, точек локального экстремума нет.
- 6. $\mathbf{f''(x) = 2x(x^2 + 3)/(x^2-1)^3}$

обращается в нуль в точке $x=0$

Знак второй производной **f’’(x)**

x		(-1;0)	(0;1)	
f’’(x)	-	+	-	+

Вторая производная меняет знак только в одной точке x=0 => xo=0 – точка перегиба.
На интервалах (-∞;-1) и(0;1) график функции имеет выпуклость вверх, а на интервалах (-1;0) и (1; +∞) - выпуклость вниз.
Вычислим координаты нескольких точек:

x	0	1/2	2	3
f (x)	0	-2/3	2/3	3/8

График имеет вид

•