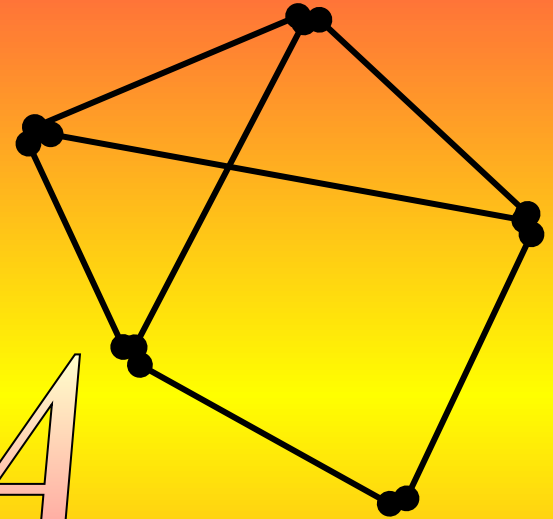
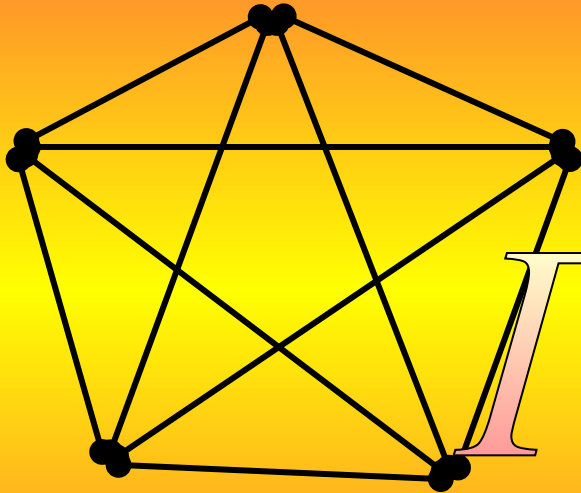
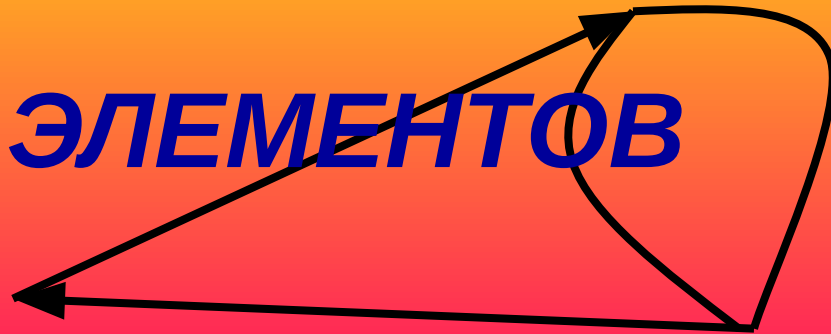


ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



ГРАФ

И ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ

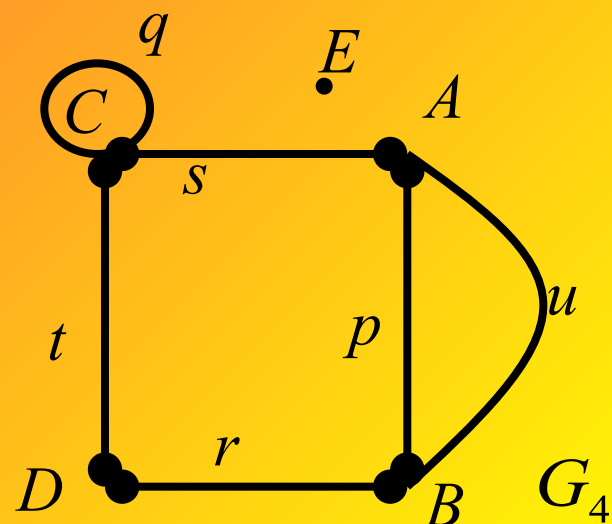
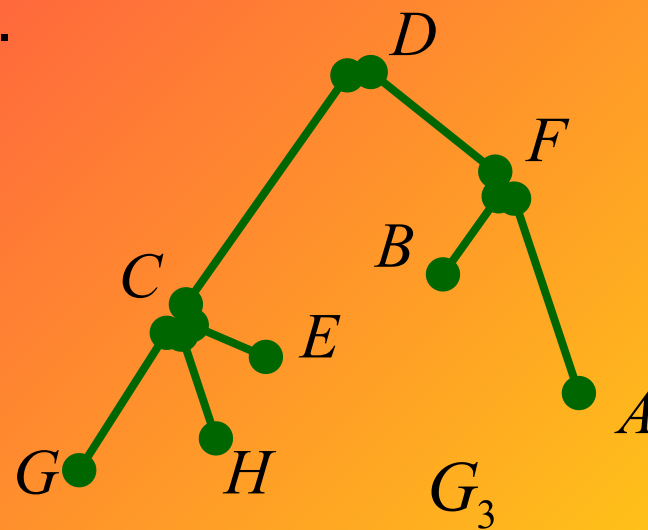
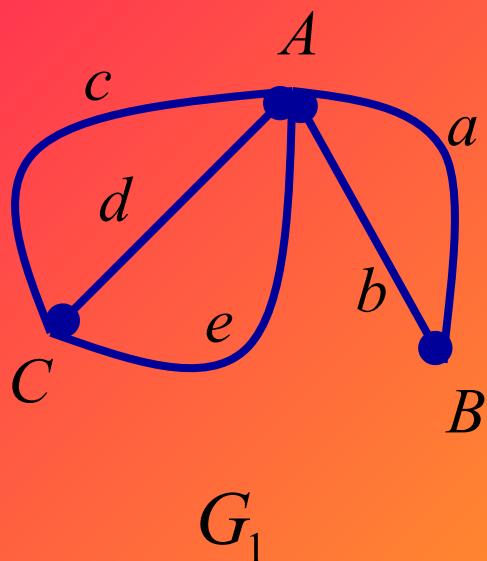


ГРАФОМ $G = (V, X)$ НАЗЫВАЕТСЯ
ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ:
МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО
ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ
ПАРЫ ТОЧЕК.

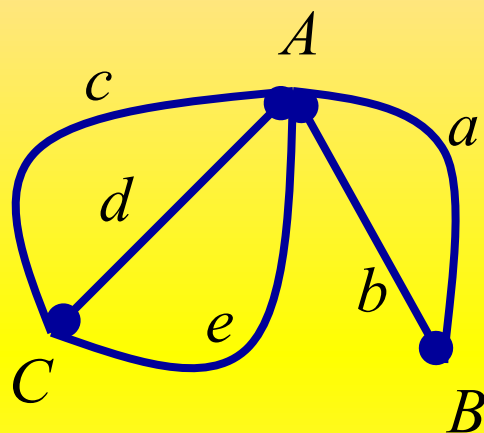
ВПЕРВЫЕ ПОНЯТИЕ «ГРАФ» ВВЕЛ В
1936 г. ВЕНГЕРСКИЙ МАТЕМАТИК ДЕННИ
КЁНИГ. НО ПЕРВАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ
ГРАФОВ ПРИНАДЛЕЖАЛА ПЕРУ
ВЕЛИКОГО ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА И БЫЛА
НАПИСАНА ЕЩЕ В 1736 г.

ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ **ВЕРШИНАМИ**, ИЛИ **УЗЛАМИ**,
ГРАФА, ЛИНИИ – **РЕБРАМИ** ГРАФА.

ПРИМЕРЫ ГРАФОВ



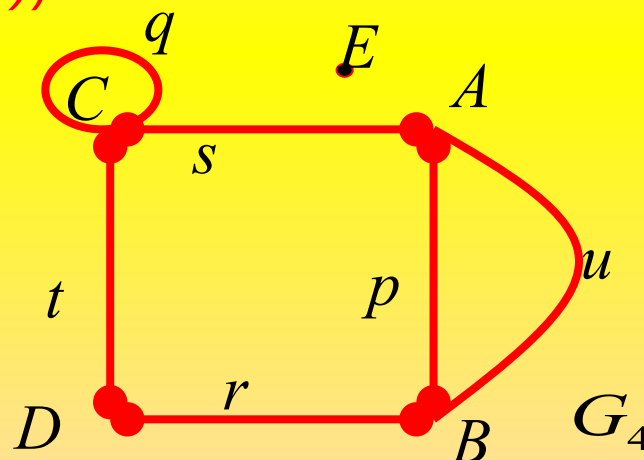
ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ **ИНЦИДЕНТНО**. ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.



G_1

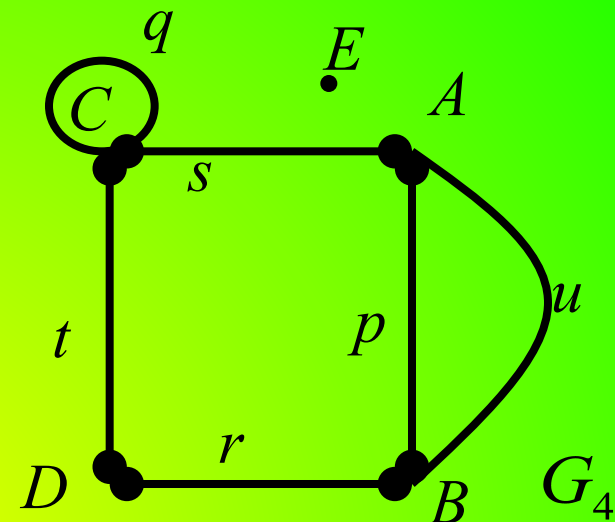
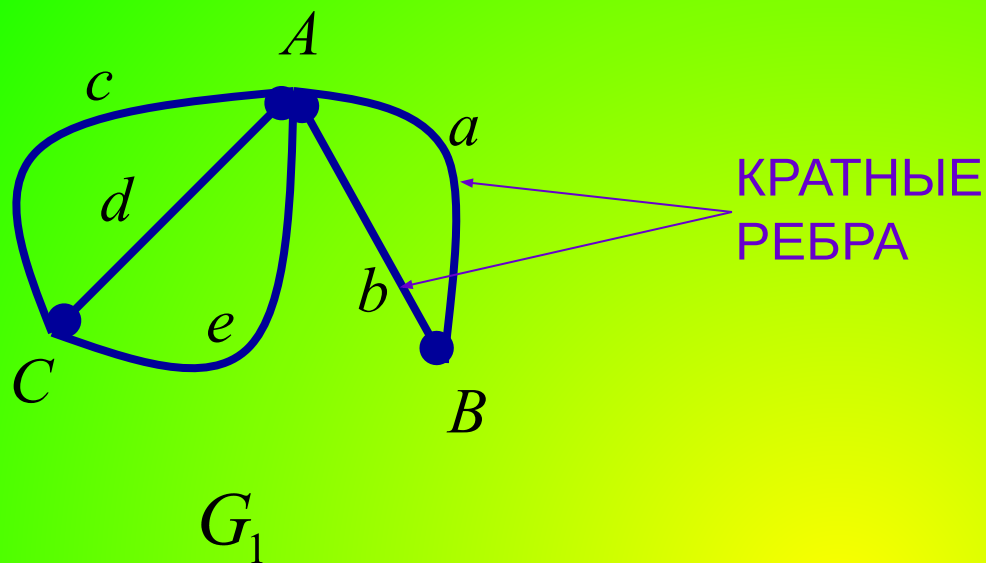
НА РИСУНКЕ СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЕРШИНЫ А и В, А и С ; СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ РЕБРА c и d , a и b .

ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ **ПЕТЛЕЙ**(у графа G_4 петля – $q(C,C)$).



G_4

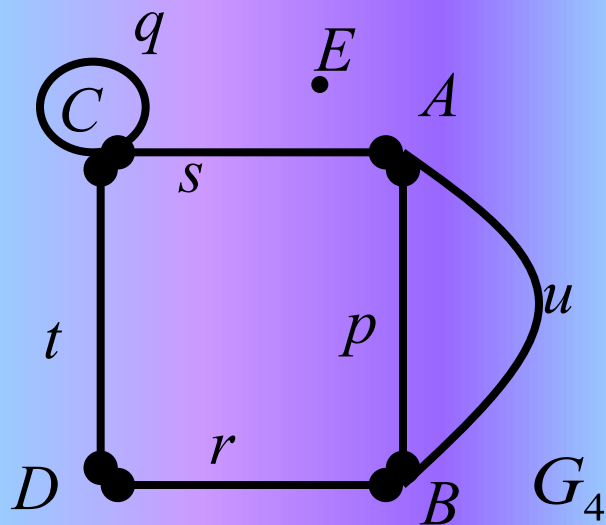
ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.



ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ
ВЕРШИНЕ A , НАЗЫВАЕТСЯ
СТЕПЕНЬЮ ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И
ОБОЗНАЧАЕТСЯ $deg(A)$.

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ,
ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ
ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В
ЭТУ ВЕРШИНУ.

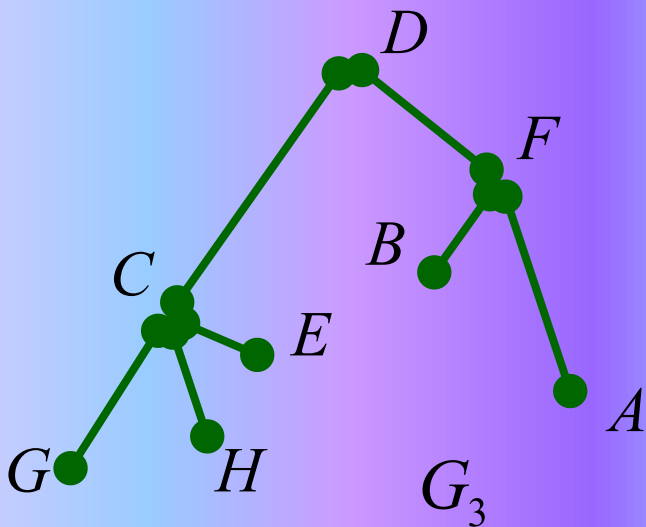
$$\begin{aligned} deg(A) &= 3; \\ deg(B) &= 3; \\ deg(C) &= 4; \\ deg(D) &= 2; \\ deg(E) &= 0. \end{aligned}$$



$$\deg(E) = 0$$



E –
ИЗОЛИРОВАННАЯ
ВЕРШИНА



$$\deg(G) = 1$$

$$\deg(H) = 1$$

$$\deg(E) = 1$$

$$\deg(B) = 1$$

$$\deg(A) = 1$$



G, H, E, B, A
- ВИСЯЧИЕ
ВЕРШИНЫ

ТЕОРЕМА

В ГРАФЕ $G(V, X)$ СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

$$\sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 2m$$

ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ **ЧЕТНОЙ (НЕЧЕТНОЙ)**, ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ(НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.

ТЕОРЕМА

ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

СЛЕДСТВИЕ

НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ
ПОЛНЫМ, ЕСЛИ
ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО
РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ
СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И
ТОЛЬКО ОДНИМ
РЕБРОМ.

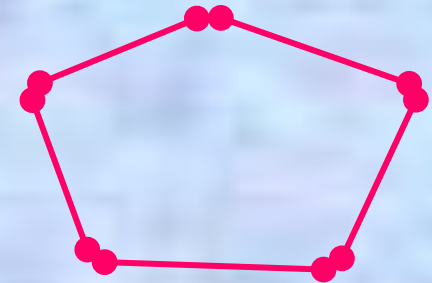


G_2

ДОПОЛНЕНИЕМ ГРАФА
НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ
ЖЕ ВЕРШИНАМИ И
ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ
РЕБРА, КОТОРЫЕ
НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К
ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ
ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.

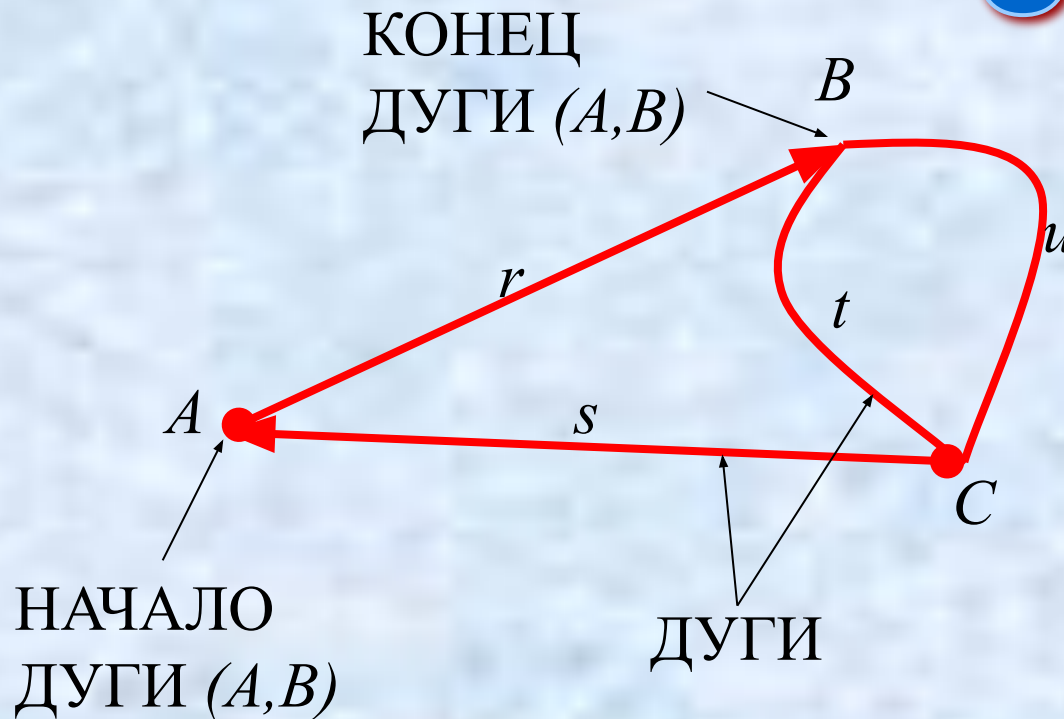


G_5



ДОПОЛНЕНИЕ
ГРАФА G_5 ДО
ГРАФА G_2

ОРГРАФ



СТЕПЕНИ ВХОДА
ВЕРШИН ГРАФА
(см. рис.):

$$\deg_+(A) = 1$$

$$\deg_+(B) = 1$$

$$\deg_+(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА
ВЕРШИН:

$$\deg_-(A) = 1$$

$$\deg_-(B) = 2$$

$$\deg_-(C) = 1$$

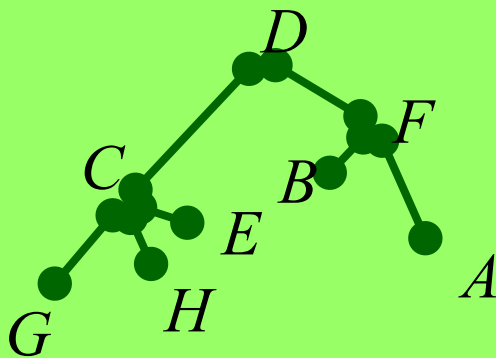
СТЕПЕНЬ ВХОДА (ВЫХОДА)
ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ
ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА
ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ
(НАЧАЛОМ).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ ВТОРАЯ ВЕРШИНА ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С ПЕРВОЙ ВЕРШИНОЙ СЛЕДУЮЩЕГО, НАЗЫВАЕТСЯ **МАРШРУТОМ**.

ЧИСЛО РЕБЕР МАРШРУТА НАЗЫВАЕТСЯ **ДЛИНОЙ** МАРШРУТА.

ЕСЛИ НАЧАЛЬНАЯ ВЕРШИНА МАРШРУТА СОВПАДАЕТ С КОНЕЧНОЙ, ТО ТАКОЙ МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЗАМКНУТЫМ** ИЛИ **ЦИКЛОМ**.

ЕСЛИ РЕБРО ВСТРЕТИЛОСЬ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ, ТО МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЦЕПЬЮ**.

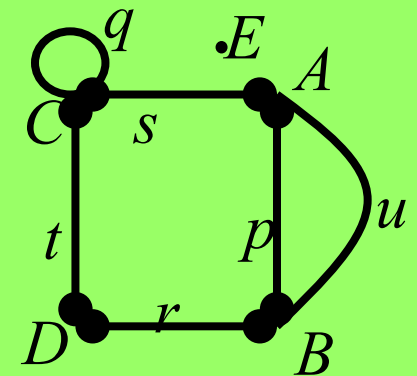


HCDFD – МАРШРУТ
ДЛИНОЙ 4.

(t, s, p, r) – 4-цикл

(t, s, u, r, t, s, p, r)
– 8-цикл

петля (q) – 1-цикл



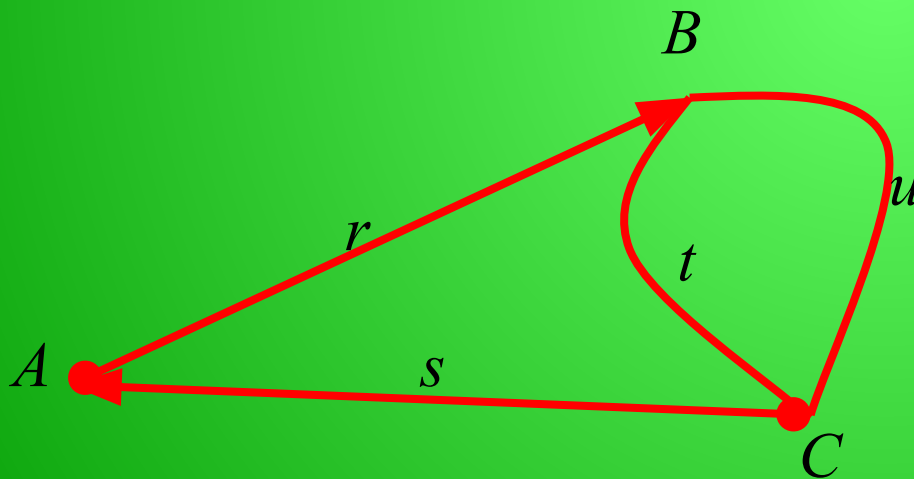
(t, s, p) – 3-цепь

ПУТЬ – УПОРЯДОЧЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ КОНЕЦ ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С НАЧАЛОМ СЛЕДУЮЩЕГО И ВСЕ РЕБРА ЕДИНСТВЕННЫ.

(u, s, r, t) – 4-путь

(r, u) – 2-путь

(s, r, t) и (u, s, r) – 3-циклы



ЦИКЛ В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

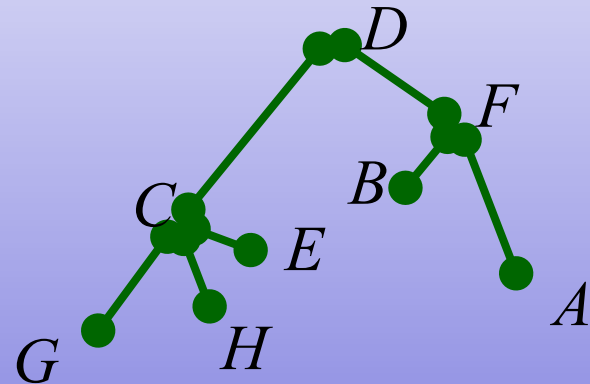
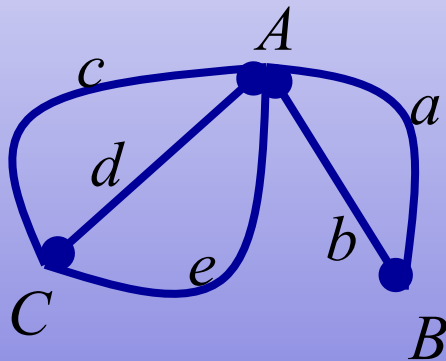
ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ
НАЗЫВАЮТСЯ **ПРОСТЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ
ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ
ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ
НАЗЫВАЕТСЯ **СВЯЗНЫМ**, ЕСЛИ
МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО
ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

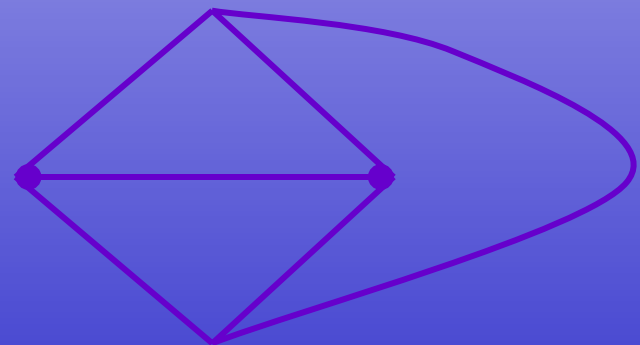
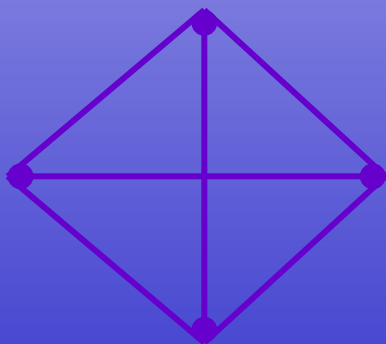
ТЕОРЕМА

ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ СВЯЗНЫЙ
ГРАФ ЯВЛЯЛСЯ ПРОСТЫМ
ЦИКЛОМ, НЕОБХОДИМО И
ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ КАЖДАЯ
ЕГО ВЕРШИНА ИМЕЛА СТЕПЕНЬ,
РАВНУЮ 2.

ГРАФ G НАЗЫВАЕТСЯ **ПЛАНАРНЫМ(ПЛОСКИМ)**, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ G' , В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.



ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ



ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ

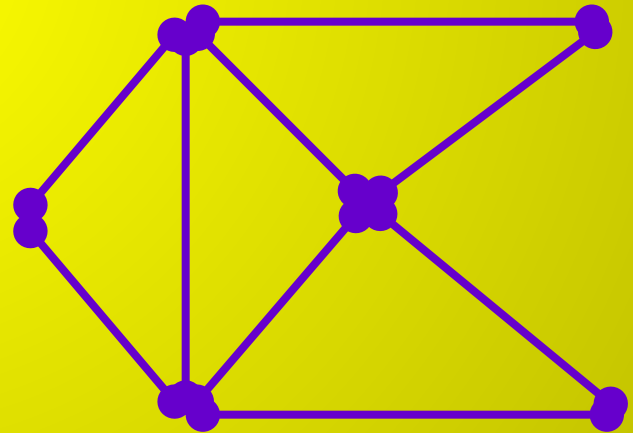
ИЗОБРАЖЕННЫЙ ИНАЧЕ

ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА
НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), КОТОРЫЙ
СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО
ОДИН РАЗ.

ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ
ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ.

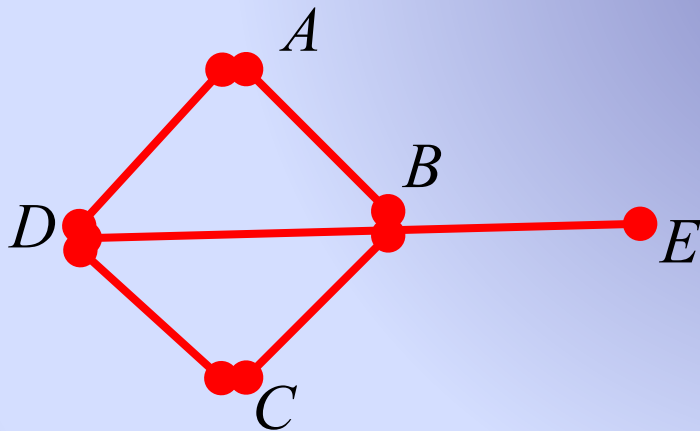
ТЕОРЕМА

ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ
ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И
ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН –
СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ
ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.



**ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ
(ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ
ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ
КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО
ОДИН РАЗ.**

**ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ
ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, НАЗЫВАЕТСЯ
ГАМИЛЬТОНОВЫМ.**



*(C, D, A, B, E) –
гамильтонов путь*

МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА G НАЗЫВАЮТ ТАБЛИЦУ B , СОСТОЯЩУЮ ИЗ n СТРОК(ВЕРШИНЫ) И m СТОЛБЦОВ(РЕБРА), В КОТОРОЙ:

- ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ X_j
 $b_{ij} = 0$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ X_j

- ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

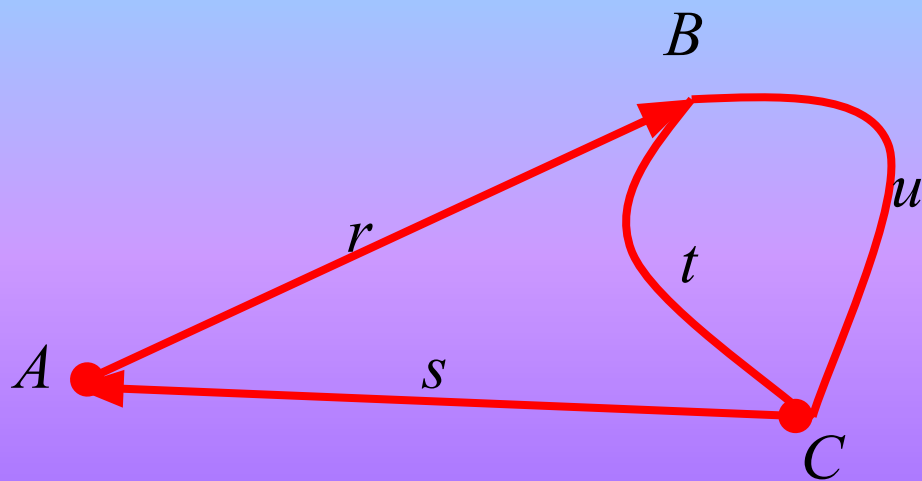
$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ЯВЛЯЕТСЯ НАЧАЛОМ ДУГИ X_j
 $b_{ij} = 0$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i НЕ ИНЦИДЕНТНА ДУГЕ X_j
 $b_{ij} = -1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ ДУГИ X_j

МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ ГРАФА $G(V, X)$ БЕЗ КРАТНЫХ РЕБЕР НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНУЮ МАТРИЦУ А ПОРЯДКА n , В КОТОРОЙ:

$$a_{ij} = 1, \text{ ЕСЛИ } (V_i, V_j) \in X$$

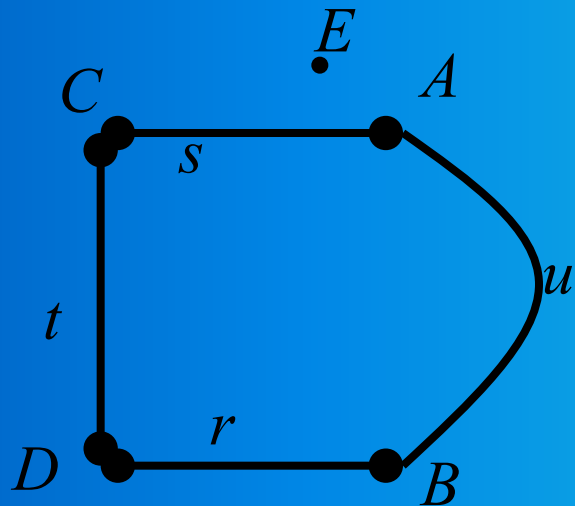
$$a_{ij} = 0, \text{ ЕСЛИ } (V_i, V_j) \notin X$$

ЗАДАЙТЕ СЛЕДУЮЩИЙ ОРГРАФ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ



	r	s	t	u
A	1	-1	0	0
B	-1	0	1	1
C	0	1	-1	-1

ЗАДАЙТЕ СЛЕДУЮЩИЙ ГРАФ ТАБЛИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ



	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>	0	1	1	0	0
<i>B</i>	1	0	0	1	0
<i>C</i>	1	0	0	1	0
<i>D</i>	0	1	1	0	0
<i>E</i>	0	0	0	0	0

Автор: Оркина Марина Александровна,
преподаватель ГОУ СПО
«Зубово-Полянский педагогический колледж»
Республика Мордовия