

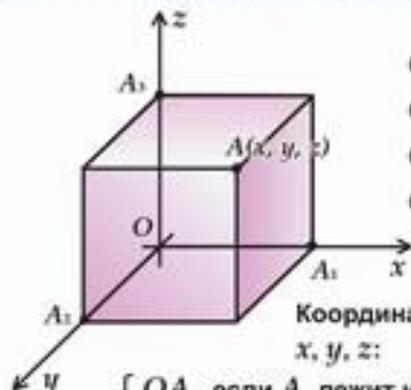
# Таблицы геометрия

11 класс

# Содержание

1. [Координаты точки и координаты вектора в пространстве](#)
2. [Скалярное произведение векторов в пространстве](#)
3. [Движение](#)
4. [Цилиндр](#)
5. [Конус](#)
6. [Сфера и шар](#)
7. [Объем прямоугольного параллелепипеда](#)
8. [Объем прямой призмы и цилиндра](#)
9. [Объем наклонной призмы](#)
10. [Объем пирамиды](#)
11. [Объем конуса](#)
12. [Объем шара и площадь сферы](#)

# КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ



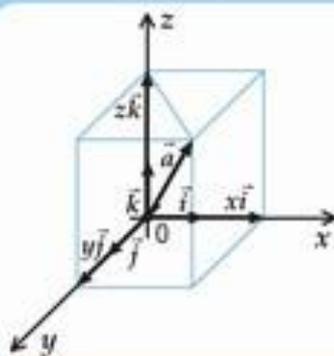
$O$  – начало координат  
 $Ox$  – ось абсцисс  
 $Oy$  – ось ординат  
 $Oz$  – ось аппликат

Координаты точки  $A$  – это тройка чисел  $x, y, z$ :

$$x = \begin{cases} OA_1, & \text{если } A_1 \text{ лежит на положительной полуоси } Ox, \\ 0, & \text{если } A_1 = O \\ -OA_1, & \text{если } A_1 \text{ лежит на отрицательной полуоси } Ox \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} OA_2, & \text{если } A_2 \text{ лежит на положительной полуоси } Oy, \\ 0, & \text{если } A_2 = O \\ -OA_2, & \text{если } A_2 \text{ лежит на отрицательной полуоси } Oy \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} OA_3, & \text{если } A_3 \text{ лежит на положительной полуоси } Oz, \\ 0, & \text{если } A_3 = O \\ -OA_3, & \text{если } A_3 \text{ лежит на отрицательной полуоси } Oz \end{cases}$$



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – векторы единичной длины.

Для произвольного вектора  $\vec{a}$  существует разложение  
 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$x, y, z$  – координаты вектора  $\vec{a}$ :

$\vec{a} \{x, y, z\}$



# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – это число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:  
 $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a, b})$ ; если  $\vec{a} = \vec{b}$ ,  
 то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2$ .  $\vec{a}^2$  – скалярный квадрат.

Если  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ;  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ ,  
 то  $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения:

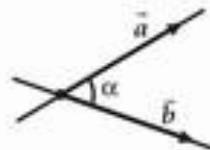


$$1) \vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$2) \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$$

$$3) (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$

$$4) k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$$



Косинус угла между двумя прямыми с направляющими векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



# ДВИЖЕНИЕ

Движение пространства – это такое отображение пространства на себя, при котором сохраняются расстояния между точками.

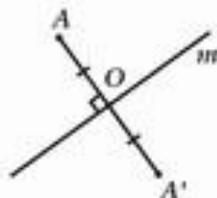
Примеры движения пространства:



1) Центральная симметрия

$$A \rightarrow A', OA = OA'$$

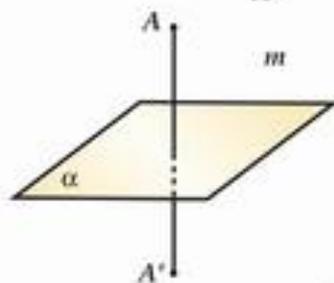
$O$  – центр симметрии



2) Осевая симметрия

$m$  – ось симметрии

$$A \rightarrow A', OA = OA', AA' \perp m$$



3) Зеркальная симметрия

$\alpha$  – плоскость симметрии

$$A \rightarrow A', OA = OA', AA' \perp \alpha$$



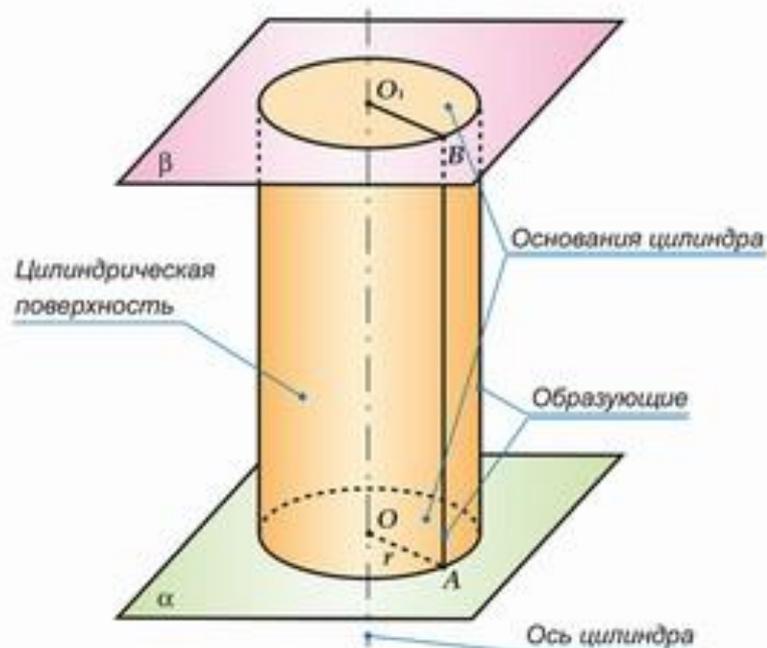
4) Параллельный перенос  
на вектор  $\vec{a}$

$$A \rightarrow A', \vec{AA'} = \vec{a}$$



# ЦИЛИНДР

Цилиндр – это тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами, называемыми основаниями цилиндра. Цилиндр изображен на рисунке.



Площадь боковой поверхности цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h \quad (h = OO_1 - \text{высота цилиндра})$$

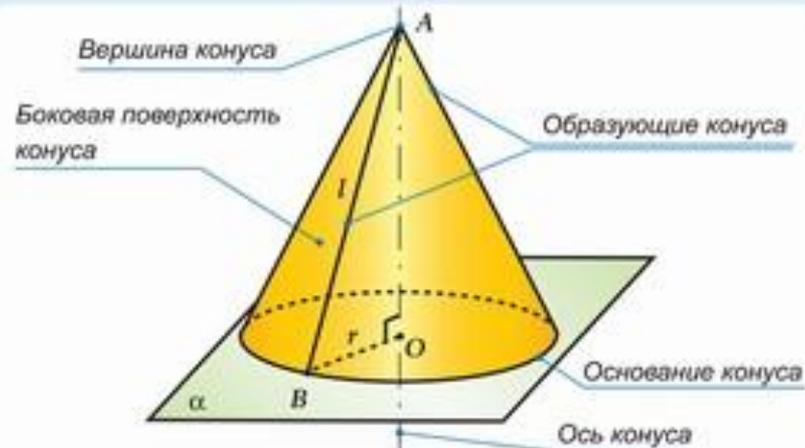
Площадь полной поверхности цилиндра:

$$S_{\text{пол}} = 2\pi r(r + h)$$



# КОНУС

Конус – это тело, ограниченное конической поверхностью и кругом. Конус изображен на рисунке.



Площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{бок} = \pi r l, \text{ где } l - \text{длина образующей}$$

Площадь полной поверхности конуса:  $S_{полн} = \pi r(r + l)$



Усеченный конус

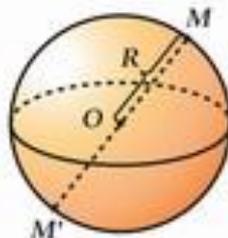
Площадь боковой поверхности усеченного конуса:

$$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$$



## СФЕРА И ШАР

Сфера – это поверхность, которая состоит из всех точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром сферы.



$OM$  – радиус сферы

$MM'$  – диаметр сферы

$MM' = 2R$ .

Расстояние от точек сферы до центра сферы называется радиусом сферы  $R$ .

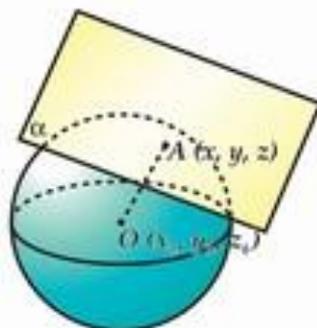
Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр сферы, называется диаметром сферы. Диаметр сферы равен  $2R$ .

$M$  лежит на сфере, если  $OM = R$

$M$  лежит вне сферы, если  $OM > R$

$M$  лежит внутри сферы, если  $OM < R$ .

Шар – это тело, ограниченное сферой.



В прямоугольной системе координат уравнение сферы с центром в точке  $O(x_0, y_0, z_0)$  и радиусом  $R$  имеет следующий вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

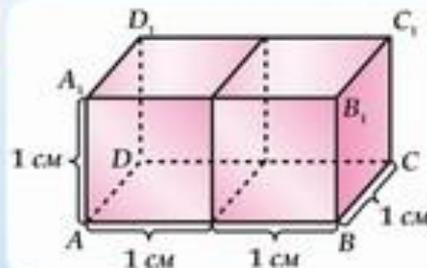
$\alpha$  – касательная плоскость к сфере

$A$  – точка касания сферы

и плоскости  $\alpha$ :  $OA \perp \alpha$



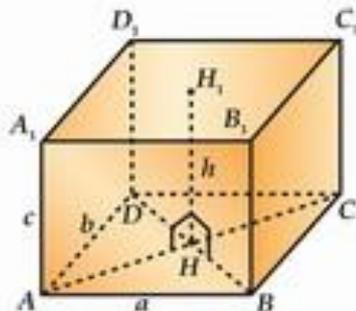
# ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА



Единица измерения объемов – кубический сантиметр ( $\text{см}^3$ )

Кубический сантиметр – куб с ребром 1 см

Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен  $2 \text{ см}^3$

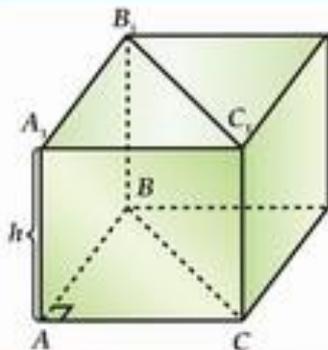


Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех измерений этого параллелепипеда:

$$V = abc$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания этого параллелепипеда на его высоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

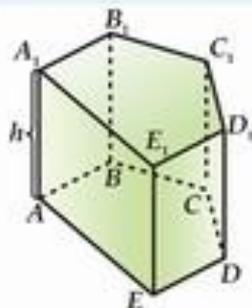


Объем прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник, равен произведению площади этого треугольника на высоту призмы:

$$V_{ABCA_1 B_1 C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot h$$



# ОБЪЕМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ И ЦИЛИНДРА



Объем прямой призмы равен произведению площади основания этой призмы на ее высоту:

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1A_2B_2C_2D_2E_2} = S_{ABCDE} \cdot h$$

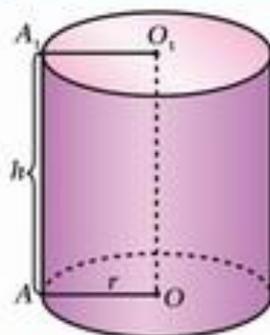
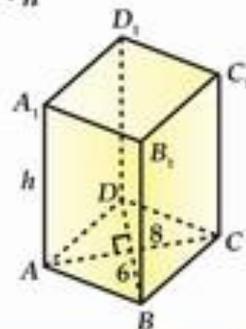
Пример: В основании прямой призмы - ромб с диагоналями 6 см и 8 см.

Высота призмы равна 10 см.

Найти: Объем призмы

Решение:  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1A_2B_2C_2D_2E_2} = S_{\text{осн}} \cdot h = 24 \cdot 10 = 240 \text{ (см}^3\text{)}$$



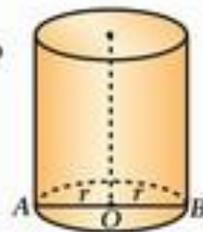
Объем цилиндра равен произведению площади основания цилиндра на высоту:

$$V_{\text{цил}} = S \cdot h = \pi r^2 h$$

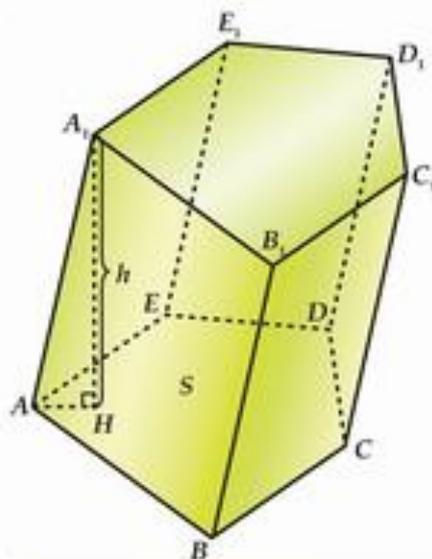
Пример: Найти объем цилиндра, если диаметр его основания равен 12 см, а высота 6 см.

Решение:  $V_{\text{цил}} = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h =$

$$= \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h = \pi \cdot \frac{144}{4} \cdot 6 = 216\pi \text{ (см}^3\text{)}$$



# ОБЪЕМ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ



Объем наклонной призмы равен произведению площади основания этой призмы на ее высоту:

$$V = S \cdot h$$

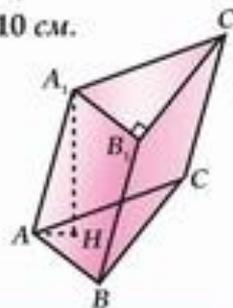
**Пример:** Найти объем наклонной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой  $AC$ , равной 10 см, катетом  $AB$ , равным 6 см, и высота  $A_1H$  которой равна 10 см.

**Решение:** Пусть  $AB = 6$  см.

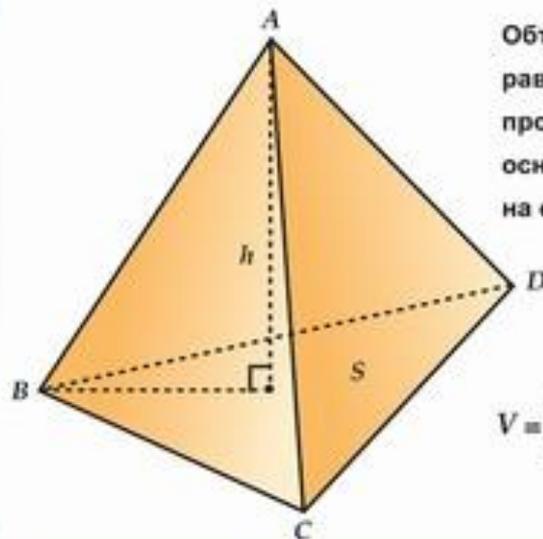
Тогда  $BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$  (см) по теореме Пифагора.

Тогда :  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$  (см<sup>2</sup>)

$V_{ABC A_1 B_1 C_1} = S \cdot h = 24 \cdot 10 = 240$  (см<sup>3</sup>)



# ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ



Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания пирамиды на ее высоту:

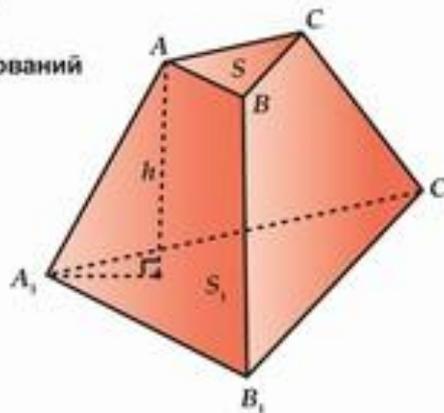
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Объем усеченной пирамиды равен:

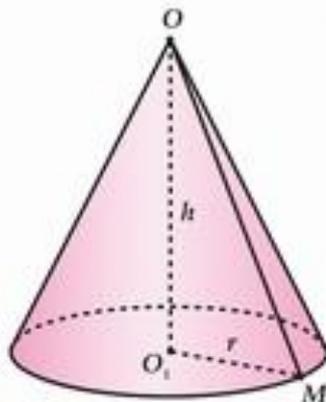
$$V = \frac{1}{3} (S + \sqrt{SS_1} + S_1) \cdot h,$$

где  $S$  и  $S_1$  – площади оснований пирамиды,

$h$  – высота пирамиды



## ОБЪЕМ КОНУСА

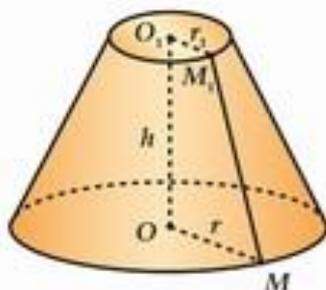


Объем конуса равен одной трети произведения площади основания конуса на его высоту:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

( $r$  – радиус основания конуса,  
 $h$  – высота цилиндра)

Объем усеченного конуса равен:



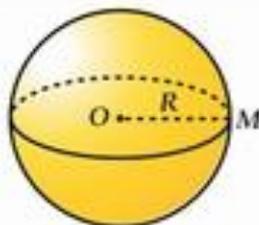
$$V = \frac{1}{3} (S + \sqrt{SS_1} + S_1) \cdot h =$$

$$= \frac{1}{3} \pi (r^2 + rr_1 + r_1^2) \cdot h,$$

где  $r$  и  $r_1$  – радиусы оснований  
усеченного конуса, а  $h$  – высота  
усеченного конуса

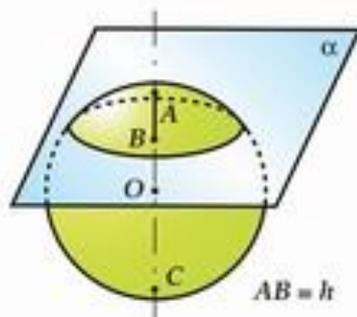


## ОБЪЕМ ШАРА И ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ



Объем шара радиуса  $R$  равен  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

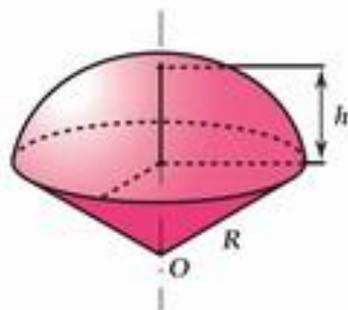
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$



Объем шарового сегмента равен

$$V = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right),$$

где  $h$  – высота шарового сегмента,  
 $R$  – радиус шара



Объем шарового сектора равен

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h, \quad R - \text{радиус шара,}$$

$h$  – высота шарового сегмента

Площадь сферы равна  $4\pi R^2$ ,  
где  $R$  – радиус сферы

