

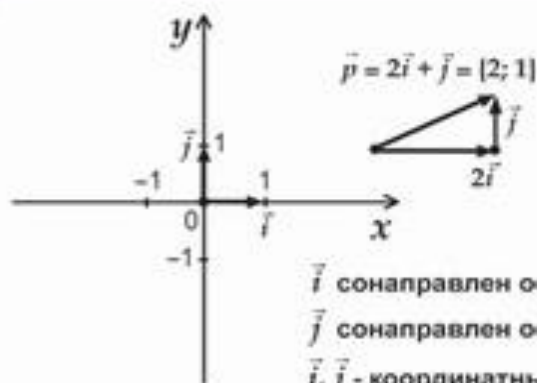
Таблицы Геометрия

9 класс

Содержание:

1. [Координаты вектора](#)
2. [Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца](#)
3. [Уравнения окружности и прямой](#)
4. [Синус, Косинус, Тангенс](#)
5. [Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения](#)
6. [Соотношение между сторонами и углами треугольника](#)
7. [Теоремы Синусов и Косинусов](#)
8. [Скалярное произведение векторов](#)
9. [Правильные многоугольники](#)
10. [Построение правильных многоугольников](#)
11. [Длина окружности и площадь круга](#)
12. [Понятие движения](#)
13. [Параллельный перенос и поворот](#)

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА



$\vec{i}$ сонаправлен оси Ox , $|\vec{i}| = 1$;

$\vec{j}$ сонаправлен оси Oy , $|\vec{j}| = 1$

$\vec{i}, \vec{j}$ - координатные векторы

Любой вектор $\vec{p}$ можно разложить
по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\vec{p} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Числа x и y - координаты вектора $\vec{p}$.

Свойства:

- 1) Если $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} = \{x_2; y_2\}$,
то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$,
а $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$
- 2) Если $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \{x; y\}$,
то $\forall k \in \mathbb{R} \quad k \cdot \vec{a} = kx \cdot \vec{i} + ky \cdot \vec{j} = \{kx; ky\}$

Примеры:

- 1) Если $\vec{a} = \{2; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -2\}$,
то $\vec{a} + \vec{b} = \{2 + 1; -1 - 2\} = \{3; -3\}$,
а $\vec{a} - \vec{b} = \{2 - 1; -1 - (-2)\} = \{1; 1\}$
- 2) Если $\vec{a} = \{1; 2\}$, $\vec{b} = \{-1; 0\}$,
то $2\vec{a} + 3\vec{b} = \{2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1); 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0\} = \{-1; 4\}$

СВЯЗЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОРА И КООРДИНАТАМИ ЕГО НАЧАЛА И КОНЦА



Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки $M(x; y)$ и имеет координаты $\{x; y\}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_1; y_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2)$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Свойства:

1) Длина вектора $\vec{a} \{x; y\}$ равна $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Например, если $\vec{a} = \{3; 4\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

2) Если $C(x; y)$ – середина отрезка AB ,

где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Например, середина отрезка AB , где $A(1; 1)$, $B(2; 5)$ – это точка $A(\frac{3}{2}; 3)$

3) Расстояние d между точками

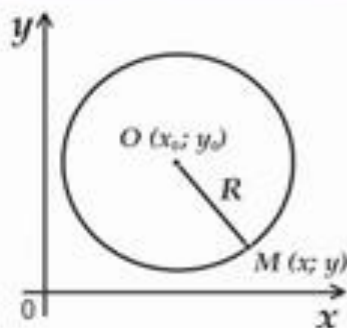
$M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ равно:

$$d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

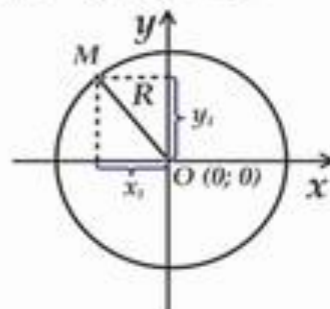
Например, если $M_1(0; 1)$, $M_2(2; 3)$, то $d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



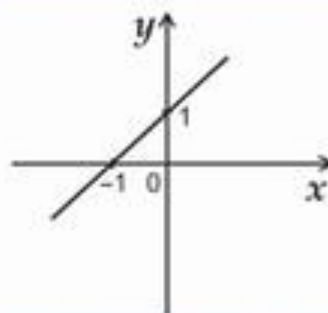
УРАВНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ



Уравнение окружности
с центром в точке $O(x_0; y_0)$
и радиусом $OM = R$
в прямоугольной системе
координат имеет вид:
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



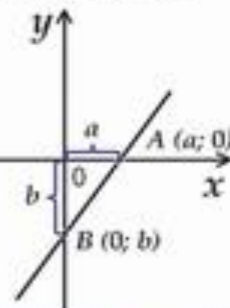
Частный случай:
уравнение окружности
радиуса R с центром
в начале координат $O(0; 0)$:
 $x^2 + y^2 = R^2$



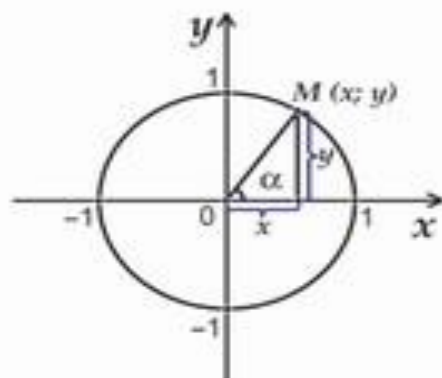
Общее уравнение прямой
в прямоугольной системе
координат: $ax + by + c = 0$
Например, $x - y + 1 = 0$

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС



Синусом любого угла α называется ордината y точки M :

$$\sin \alpha = y$$

Косинусом любого угла α называется абсцисса x точки M :

$$\cos \alpha = x$$

Тангенсом угла α ($\alpha \neq 90^\circ$) называется отношение:

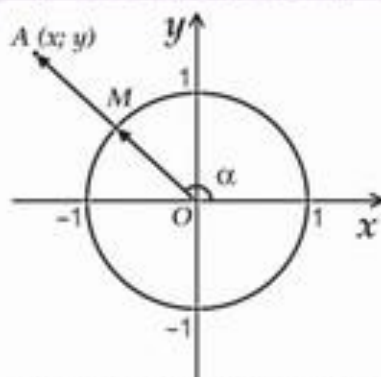
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

При $\alpha = 90^\circ$ $\operatorname{tg} \alpha$ не определен, так как $\cos 90^\circ = 0$ и в формуле для $\operatorname{tg} \alpha$ знаменатель обращается в 0.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ



Основное
тригонометрическое
тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Формулы приведения:

- 1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
- 2) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;
- 3) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;
- 4) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Точка M имеет координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$

Точка A имеет координаты $x = |\overline{OA}| \cdot \cos \alpha$; $y = |\overline{OA}| \cdot \sin \alpha$

Пример 1: Найти $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Решение: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Так как $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\cos \alpha < 0$, значит $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Пример 2: Найти $\sin \alpha$, если а) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

б) $\cos \alpha = -1$

в) $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

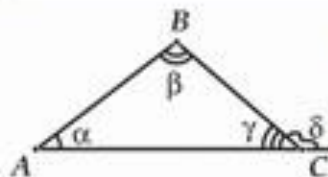
Решение: а) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$

в) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$



СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

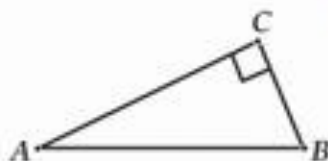


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\delta = \alpha + \beta$$

Теорема о сумме углов треугольника:
Сумма углов треугольника равна 180° .

Следствие:
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.



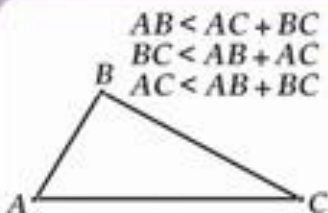
$$\angle C > \angle A \Rightarrow AB > BC$$

$$\angle C > \angle B \Rightarrow AB > AC$$

$$AC > BC \Rightarrow \angle B > \angle A$$

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника:
1) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
2) В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Следствие:
В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.



$$AB < AC + BC$$

$$BC < AB + AC$$

$$AC < AB + BC$$

$$BC > AC - AB$$

$$AC > BC - AB$$

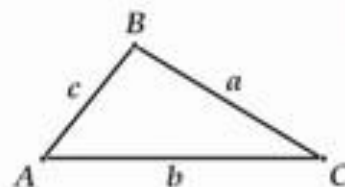
$$AB > AC - BC$$

Неравенство треугольника:

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше разности двух других сторон



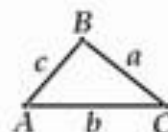
ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ



Теорема синусов:

Стороны произвольного треугольника прямо пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

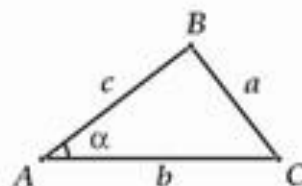


Пример: Дан треугольник ABC:

$$a = BC = 5 \text{ см}, c = AB = 3 \text{ см}, \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Найти: $\sin C$

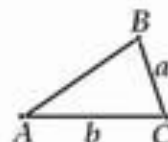
$$\text{Решение: } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$



Теорема косинусов:

Квадрат стороны произвольного треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Пример: Дан треугольник ABC:

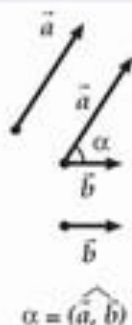
$$a = BC = 4 \text{ см}, b = AC = 5 \text{ см}, \cos C = \frac{1}{2}$$

Найти: AB

$$\text{Решение: } AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

$$AB = \sqrt{21}$$



СКАЛЯРНОЕ
ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение двух векторов

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ - это произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$$

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$,

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $\vec{a}^2$ - скалярный квадрат вектора $\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения:

$$1) \vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$3) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$4) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Теорема:

Если $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$,
то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Примеры:

$$1) \vec{a} = \{2; 1\}, \vec{b} = \{1; -1\}. \text{ Вычислить } \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$$

$$2) \vec{a} = \{1; 1\}, \vec{b} = \{0; 2\}. \text{ Найти угол между векторами } \vec{a} \text{ и } \vec{b}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 45^\circ$$



ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник называется выпуклым, если он целиком лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все углы равны.



Сумма углов правильного n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

Углы правильного n -угольника равны $\frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ$.

O – центр вписанной и описанной окружности – называется центром многоугольника.

Формула площади правильного n -угольника:

$$S = \frac{1}{2} Pr \quad (P - \text{периметр многоугольника, } r - \text{радиус вписанной окружности})$$

Формула стороны правильного n -угольника:

$$a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n} \quad (a_n - \text{сторона, } R - \text{радиус описанной окружности})$$

Формула радиуса вписанной окружности:

$$r = R \cos \frac{\pi}{n}$$

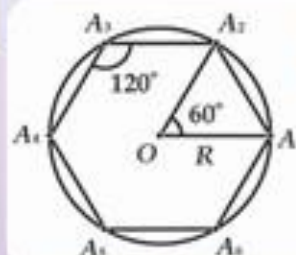
Например, площадь правильного шестиугольника

со стороной a равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot R \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

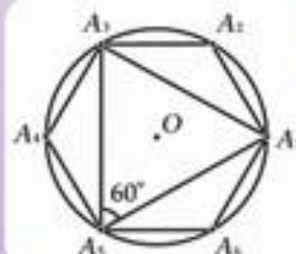


ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ



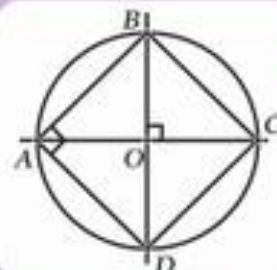
Построение правильного вписанного шестиугольника:

Выбираем точку A_1 на окружности, далее из точки A_1 как из центра радиусом R делаем засечку и получаем вершину – A_2 , аналогично получаем остальные вершины.



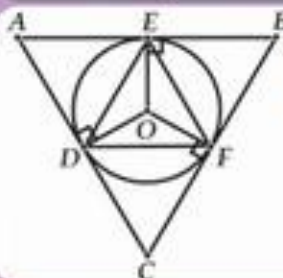
Построение правильного вписанного треугольника:

Соединяем через одну вершины правильного шестиугольника.



Построение правильного вписанного четырехугольника, то есть квадрата:

Через центр окружности проводим две перпендикулярные прямые. Точки их пересечения с окружностью - вершины квадрата.

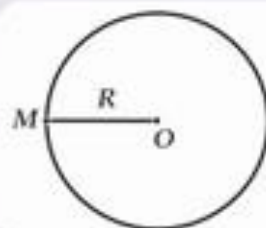


Построение правильного описанного многоугольника по правильному вписанному многоугольнику:

Необходимо провести касательные к окружности в вершинах правильного вписанного многоугольника.

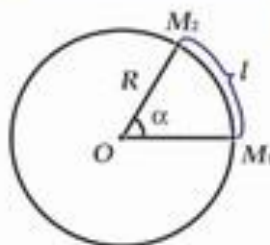


ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА



Формула длины окружности: $l = 2\pi R$,
где R – радиус окружности, а $\pi \approx 3,14$.

Например, длина окружности радиуса
 $R = 3$ см равна $l = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ (см)

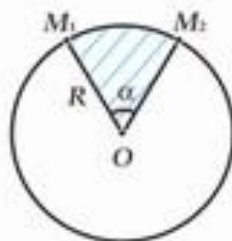


Формула длины дуги окружности
с градусной мерой α :

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$$

Например, длина дуги окружности
радиуса 2 см с градусной мерой 60° равна:

$$l = \frac{\pi \cdot 2}{180} \cdot 60 = \frac{2\pi}{3} \text{ (см)}$$



Формула площади круга: $S = \pi R^2$

Например, площадь круга радиуса 10 см
равна $S = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ (см²)

Площадь кругового сектора
радиуса R , ограниченного дугой
с градусной мерой α :

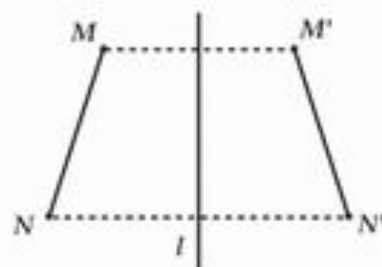
$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

Например, площадь кругового сектора
радиуса 5 см, ограниченного дугой
с градусной мерой 120° , равна:

$$S = \frac{\pi \cdot 25}{360} \cdot 120 = \frac{25\pi}{3} \text{ (см}^2\text{)}$$



ПОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ

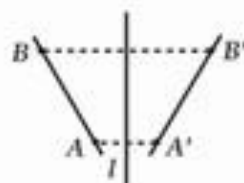


Осевая симметрия обладает тем свойством, что она сохраняет расстояния между точками:

$$MN = M'N'$$

Движение плоскости – это такое отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния.

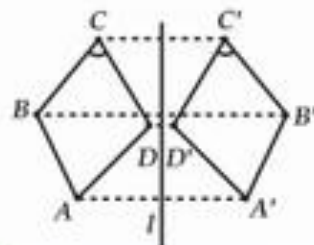
Свойства движения:



1) Точки прямой при движении переходят в точки прямой и при этом сохраняется порядок их взаимного расположения

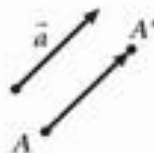
2) Прямые при движении переходят в прямые, отрезки в отрезки

3) При движении сохраняются углы

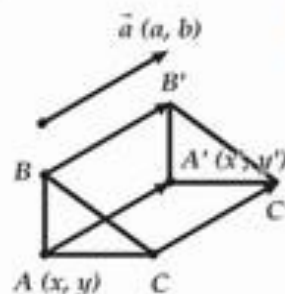


4) При движении многоугольник переходит в равный ему многоугольник

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ПОВОРОТ



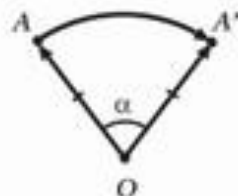
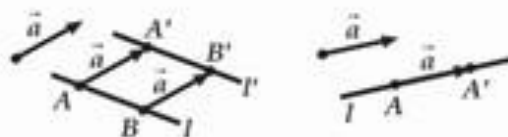
Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ – это такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка плоскости A отображается в такую точку A' , что $\overline{AA'} = \vec{a}$.



$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + a \end{cases}$$

Свойство параллельного переноса:

- 1) Параллельный перенос – движение
- 2) При параллельном переносе прямая переходит либо в параллельную прямую, либо в себя.



Поворот плоскости вокруг точки O на угол α – это такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка плоскости A отображается в такую A' , что $OA = OA'$ и $\angle AOA' = \alpha$.

Поворот плоскости – это движение.

