

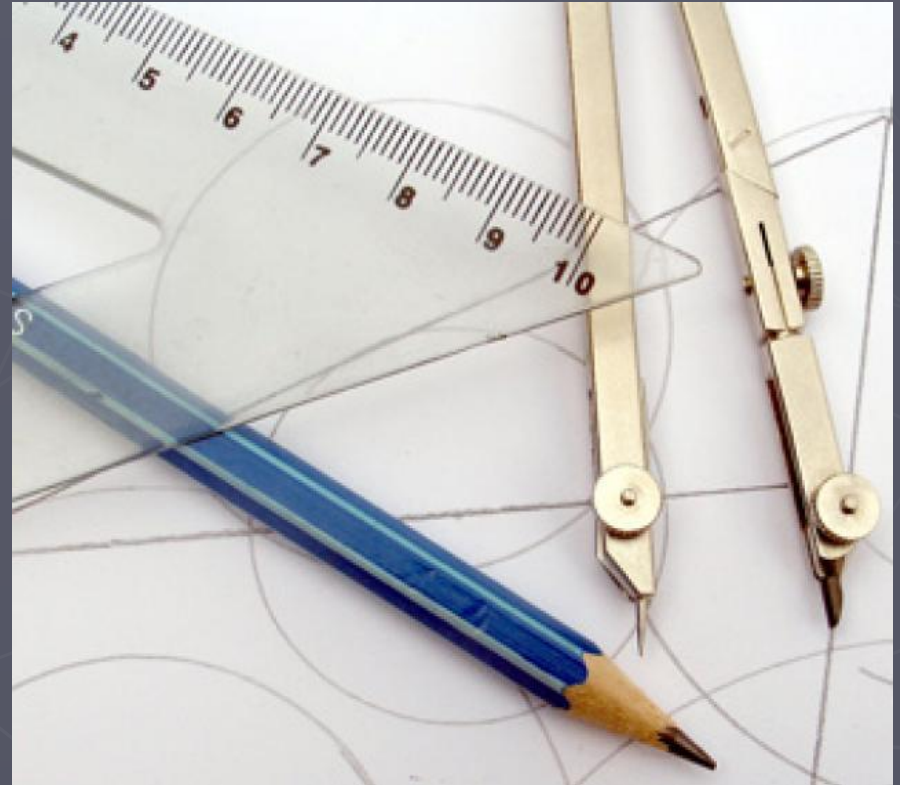
Геометрическое решение негеометрических задач

Г.Новосибирск МБОУ Гимназия№4

Учитель высшей квалификационной категории Баринова Л.Л

Содержание

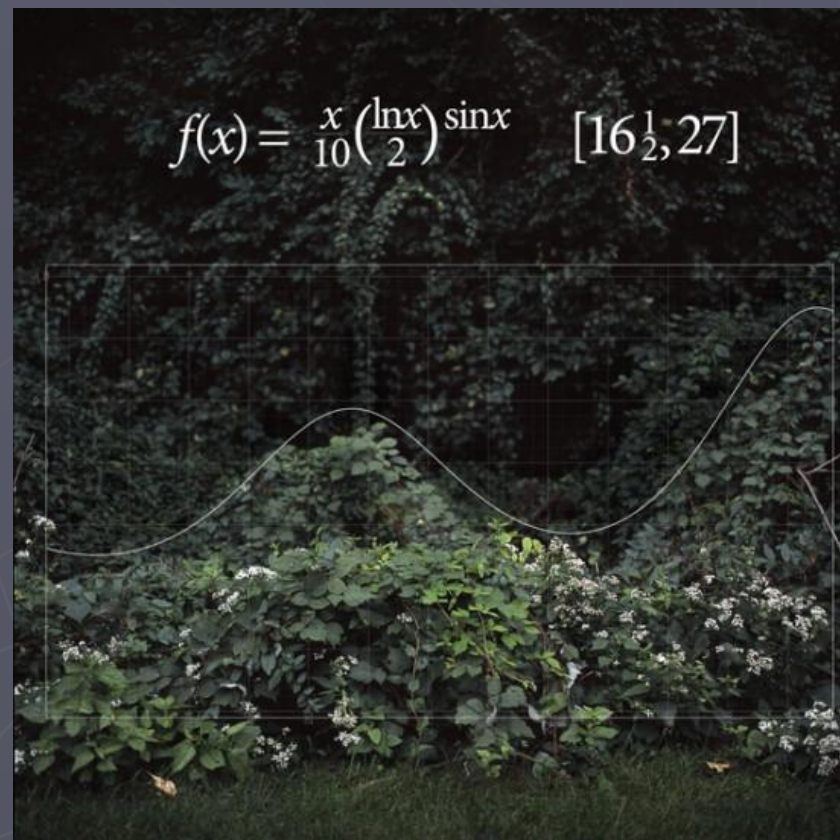
- ▶ Системы уравнений.
- ▶ Тригонометрия.
- ▶ Взаимосвязанные иррациональности.
- ▶ Экстремумы.



Системы уравнений

*Природа написана на
языке математики.*

Галилей.



Задача 1

Условие

Для положительных x, y, z из условий

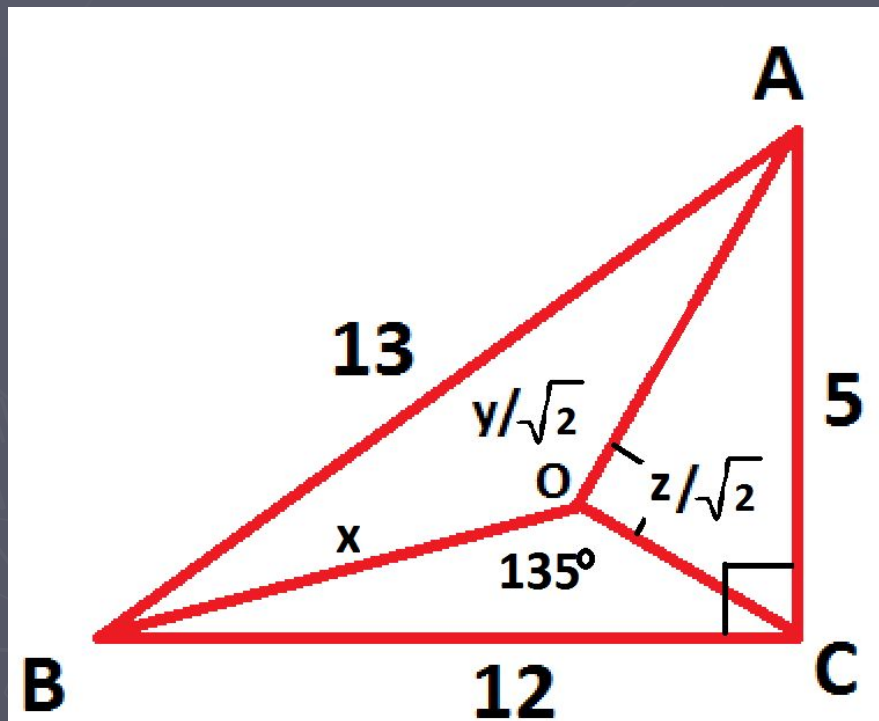
$$y^2 + z^2 = 50,$$

$$x^2 + xy + y^2/2 = 169,$$

$$x^2 + xz + z^2/2 = 144,$$

не находя значений x, y, z вычислите значение выражения $xy + yz + xz$.

Решение



$$y^2/2 + z^2/2 = 25$$

$$x^2 + xy + y^2/2 = 169$$

$$x^2 + xz + z^2/2 = 144$$

Решение

$$S_{AOB} = 1/2 * xy / \sqrt{2} * \sin 135^\circ = 1/4 xy$$

$$S_{AOC} = 1/2 * y / \sqrt{2} * z / \sqrt{2} = 1/4 yz$$

$$S_{BOC} = 1/2 * x * z / \sqrt{2} * \sin 135^\circ = 1/4 xz$$

$$S_{ABC} = 1/2 * 5 * 12 = 30$$

Заметим, что значение выражения $xy + yz + xz = 120$ равно учетверенной площади треугольника ABC. Итак, $xy + yz + xz = 120$.

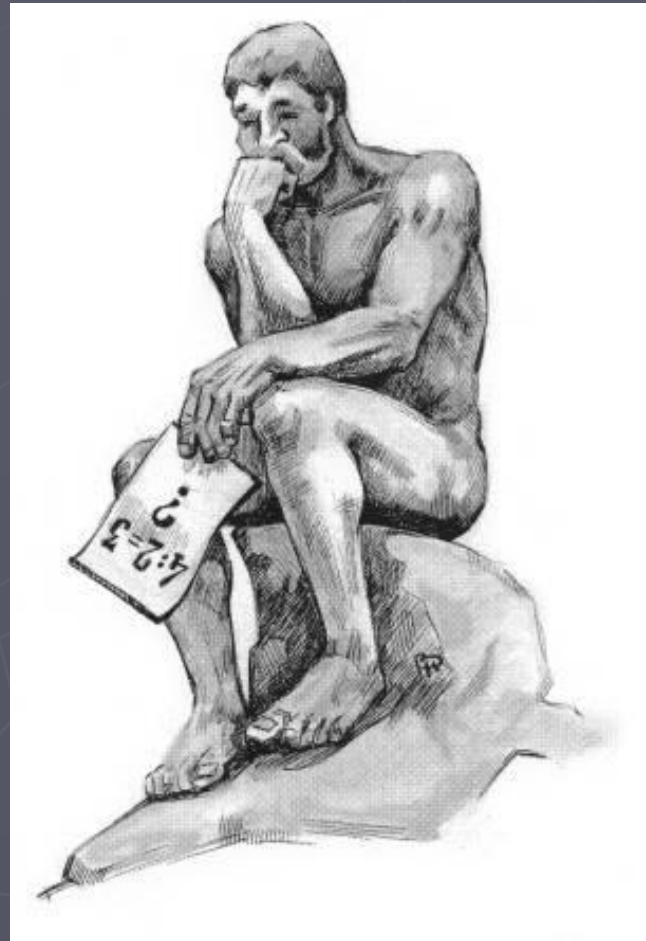
Ответ: 120.

Тригонометрия

*Арифметические знаки –
это записанные
геометрические фигуры,
а геометрические фигуры
– это нарисованные
фигуры.*

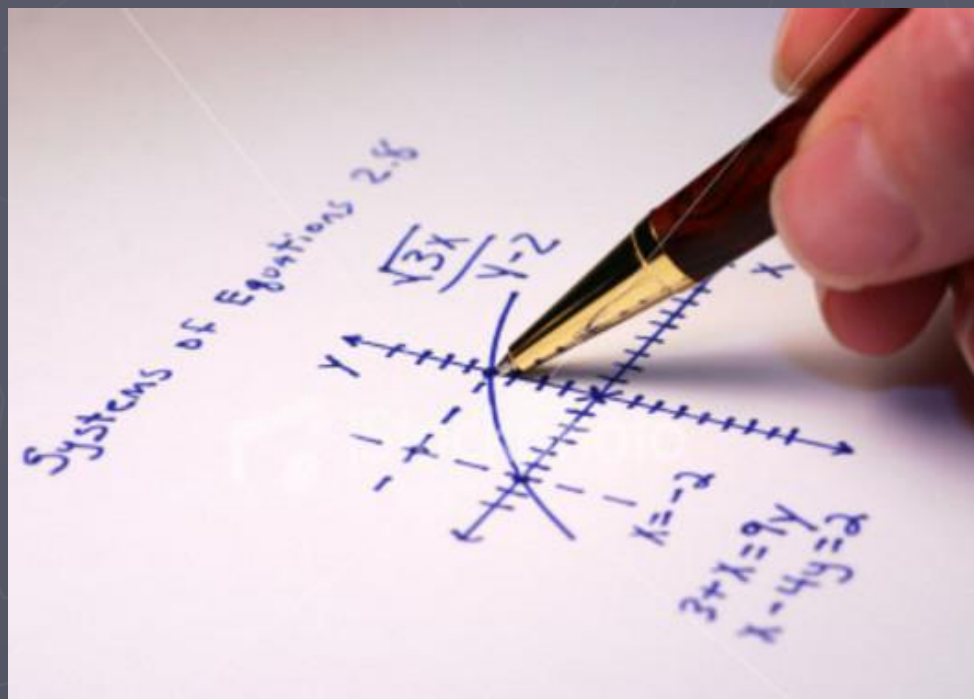
Д.

Гильберт

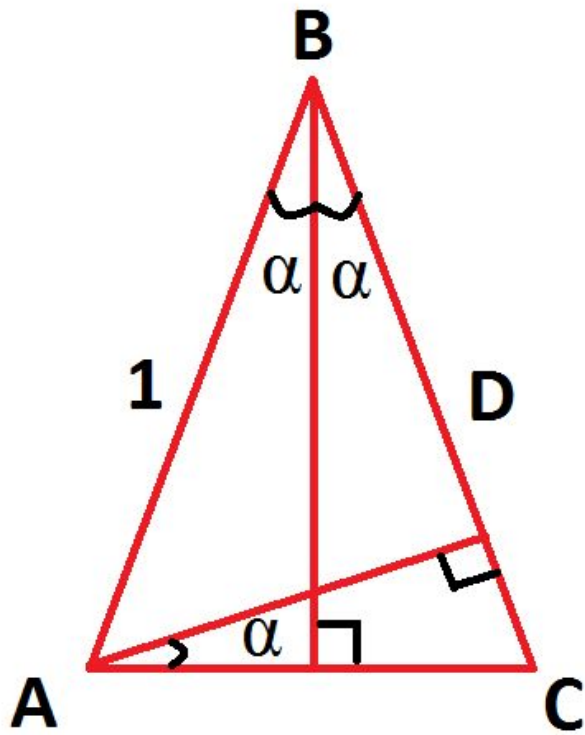


Задача 2

Докажите, что
 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$
(формула синуса
двойного угла).



Решение



Рассмотрим $\triangle ABC$
($AB=BC=1$),

угол $ABC=2\alpha$, высоты AD и BE .

$AD=\sin 2\alpha$, $AE=EC=\sin \alpha$,

$BE=\cos \alpha$

Так как $\triangle ABC \sim \triangle CAD$, то

$AB/AC=BE/AD$, т.е.

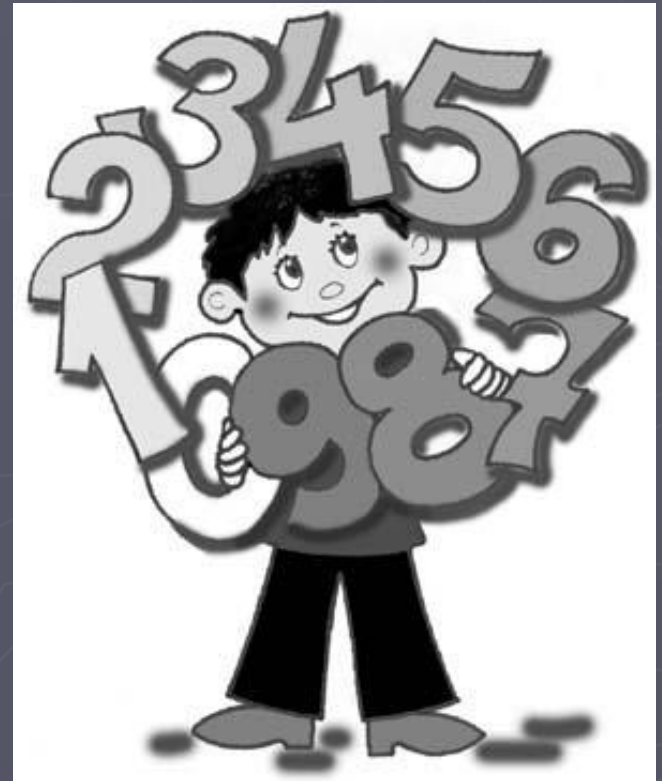
$1/2\sin \alpha = \cos \alpha / \sin 2\alpha$,

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Взаимосвязанные иррациональности

*Математику уж затем учить следует, что она
ум в порядок приводит.*

М.Ломоносов



Задача 3

Найдите наименьшее и
наибольшее значения
функции

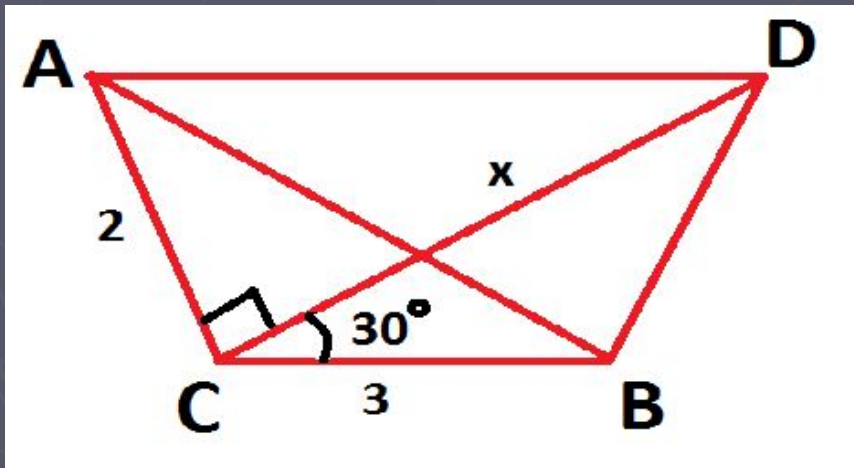
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{3} + 9}$$

*В природе все подлежит измерению,
все может быть сосчитано.*

Н.Лобачевский



Решение



$\triangle ADC$ ($AC=2$, $CD=x$, угол $ACD=90^\circ$) и

$\triangle BCD$ ($BC=3$, $CD=x$, угол $BCD=30^\circ$).

Из $\triangle ADC$ $AD=\sqrt{x^2+4}$ (по теореме Пифагора), а из $\triangle BCD$ $DB=\sqrt{x^2+9}-3x\sqrt{3}$ (по теореме косинусов)

$\text{Min } f(x)=\min(AD+DB)=AB$

Из $\triangle ABC$

$AB=\sqrt{2^2+3^2-2*2*3*\cos 120^\circ}=\sqrt{19}$
(по теореме косинусов).

Ответ: $\sqrt{19}$

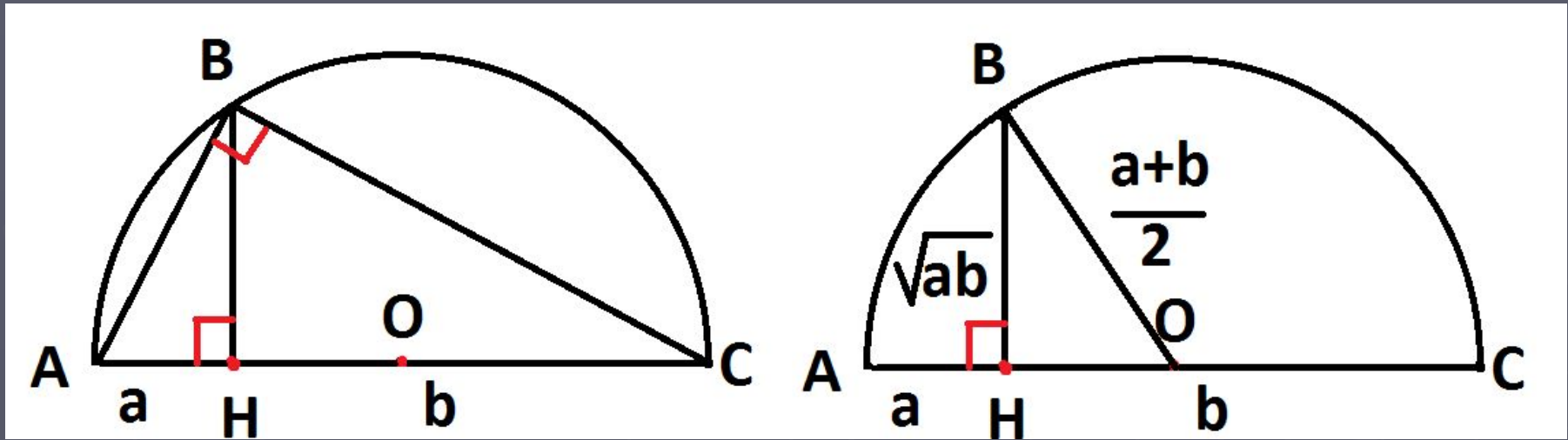
Об экстремумах

*И нет движенья – ни вперед, ни
назад, ни вверх и ни вниз.*

Т. Элиот



Подсказка



$BH = \sqrt{ab}$ – среднее геометрическое

$BO = \frac{a+b}{2}$ – среднее арифметическое

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$2\sqrt{ab} \leq a+b$$

Задача 4

Условие

При каком значении аргумента x функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Вычислите $\min f(x)$.

$$f(x) = \frac{5x^2 + 4x + 20}{2x}, \quad x > 0.$$

Решение

$$\frac{5x^2+4x+20}{2x} = \frac{1}{2} \left(5x + \frac{20}{x} \right) + 2$$

$$\frac{1}{2} \left(5x + \frac{20}{x} \right) + 2 \geq \frac{1}{2} * 2 \sqrt{5x * \frac{20}{x}} + 2$$

$$\frac{5x^2+4x+20}{2x} = 12$$

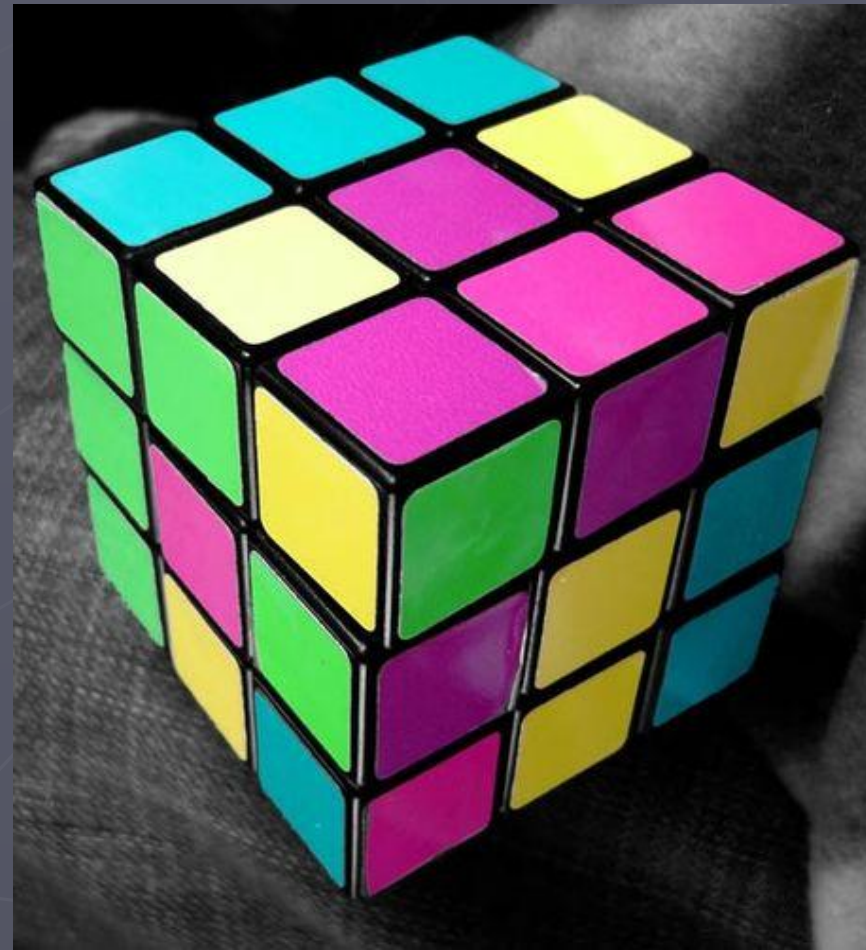
$$x=2$$

Ответ: $\min f(x)=f(2)=12$.

Задача 5

Доказать, что:

- ▶ из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат;
- ▶ из всех прямоугольников с заданной площадью наименьший периметр имеет квадрат.



Доказательство

Пусть одна из сторон равна x , тогда при заданном периметре $P=4a$ вторая сторона равна $2a-x$.

$$S(x)=(2a-x)x$$

$$(2a-x)x \leq \left(\frac{2a-x-x}{2} \right)^2, \quad ((2a-x+x)/2)^2=a^2$$

$$(2a-x)x=a^2 \Leftrightarrow x^2-2xa+a^2=0 \Leftrightarrow x=a$$

$$\text{Max } S(x)=a^2 \text{ при } x=a.$$

Доказательство

2) Пусть сторона прямоугольника равна x , тогда при заданной площади $S(x)=a^2$ другая его сторона равна a^2/x .

$$P(x)=2(a^2/x+x)$$

$$2(a^2/x+x) \geq 2*2\sqrt{x*\frac{a^2}{x}}, \quad 2*2\sqrt{x*\frac{a^2}{x}}=4a$$

$$2(x+a^2/x)=4a \Leftrightarrow x^2-4ax+a^2=0 \Leftrightarrow x=a$$

$$\text{Min } P(x)=4a \text{ при } x=a.$$

Что и требовалось доказать.

Терпенье и труд все перетрут.

Поговорка

