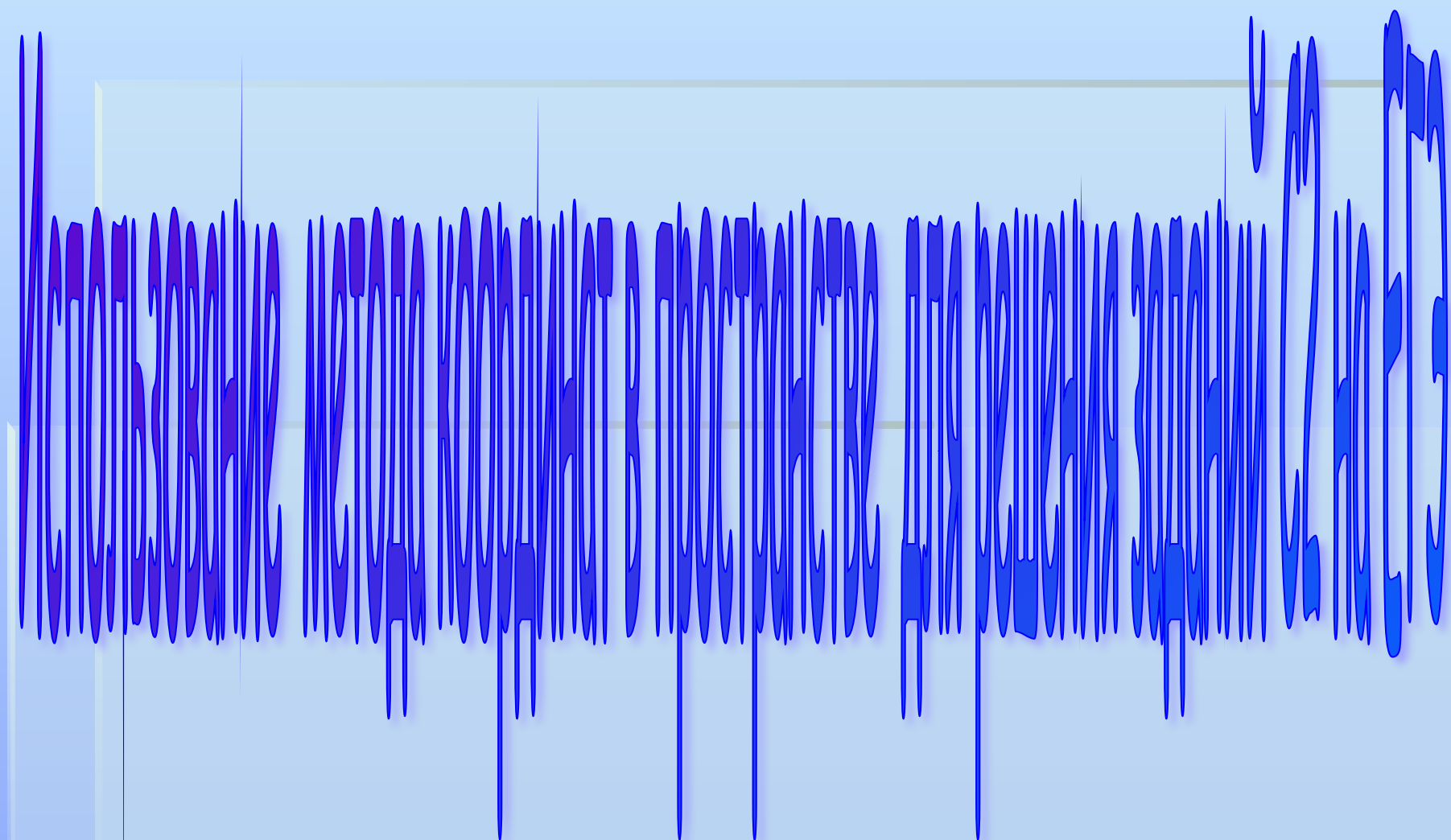




Исследование выполнил:
ученик 11а класса сш №177
САБИРОВ ИЛЬДАР

- Научный руководитель: учитель математики высшей категории Хабибуллина А.Я

Координатный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Мы уже хорошо знакомы с векторами, координатами и их свойствами. Цель моей работы: научиться применять знания для решения задач стереометрии (С2).

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

В задании С2 чаще всего требуется найти:

- угол между двумя скрещивающимися прямыми,
- угол между прямой и плоскостью,
- угол между двумя плоскостями,
- расстояние между двумя скрещивающимися прямыми,
- расстояние от точки до прямой,
- расстояние от точки до плоскости.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку.

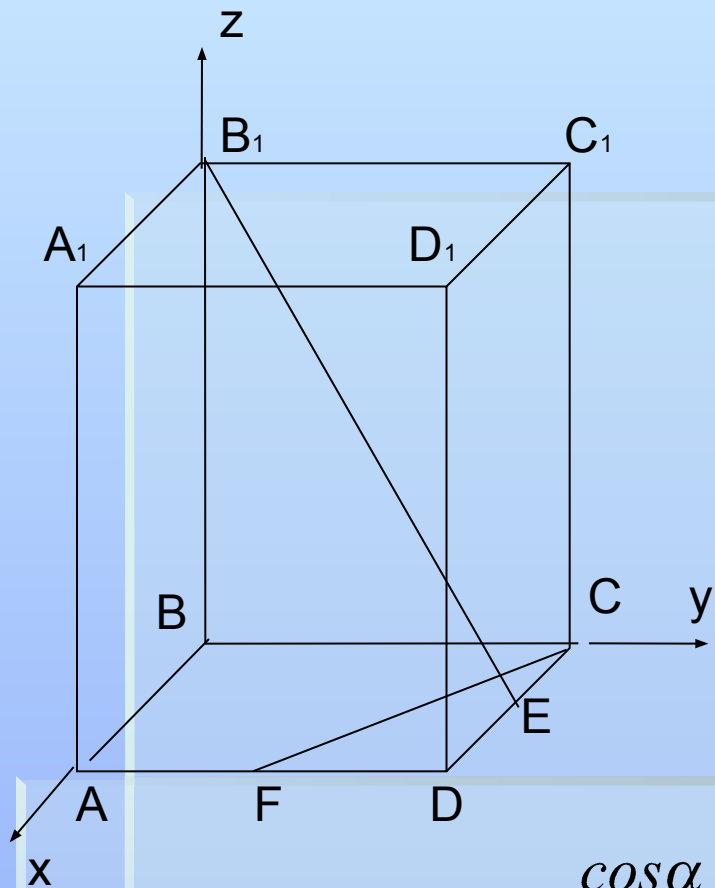
При нахождении угла между прямыми используют формулу $\cos \phi = \frac{|\vec{q} \cdot \vec{p}|}{|\vec{q}| \cdot |\vec{p}|}$ или в координатной форме $\cos \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

для нахождения угла ϕ между прямыми m и l , если векторы $\vec{q}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$ параллельны соответственно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ или $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

Задача на нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 2, высота — 4. Точка E — середина отрезка CD , точка F — середина отрезка AD . Найдите угол между прямыми CF и $B_1 E$.

Решение



Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке, и найдём искомый угол как угол между векторами.

Выпишем координаты точек B_1 , E , C , F в этой системе координат: $B_1 (0; 0; 4)$, $E(1; 2; 0)$, $C (0; 2; 0)$, $F (2; 1; 0)$.

Тогда $\overrightarrow{CF}\{2; -1; 0\}$, $\overrightarrow{B_1E}\{1; 2; -4\}$. Найдём угол между этими векторами по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_1 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$$

То есть искомый угол $\alpha = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить:

1) по формуле $\sin \phi = \sin(l; \alpha) = \frac{\rho(M; \alpha)}{AM}$, где $M \in l, l \cap \alpha = A$;

2) по формуле $\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$ или в координатах

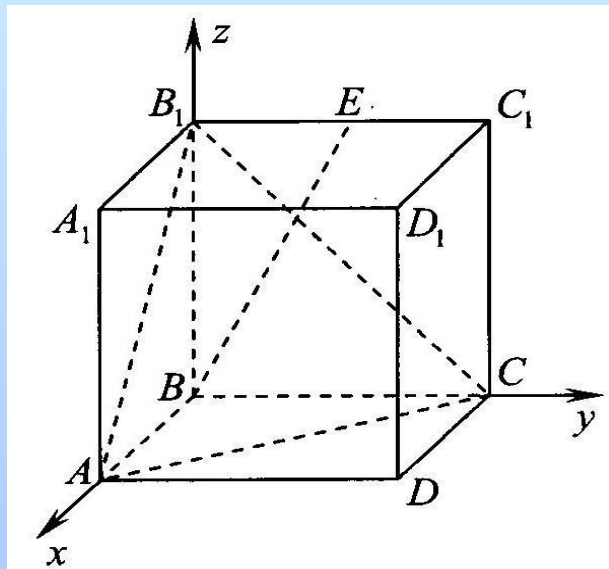
$$\sin \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\}$ — вектор нормали к плоскости α ,
 $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$ — направляющий вектор прямой l

Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра AB и AA_1 равны 1, а ребро $AD=2$. Точка E – середина ребра $B_1 C_1$.
Найдите угол между прямой BE и плоскостью $AB_1 C$.

Решение



Для решения этой задачи необходимо воспользоваться уравнением плоскости, имеющим общий вид $ax+by+cz+d=0$, где a , b и c - координаты нормали к плоскости.

Чтобы составить это уравнение, необходимо определить координаты трёх точек, лежащих в данной плоскости: $A(1; 0; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$, $C(0; 2; 0)$.

Решая систему

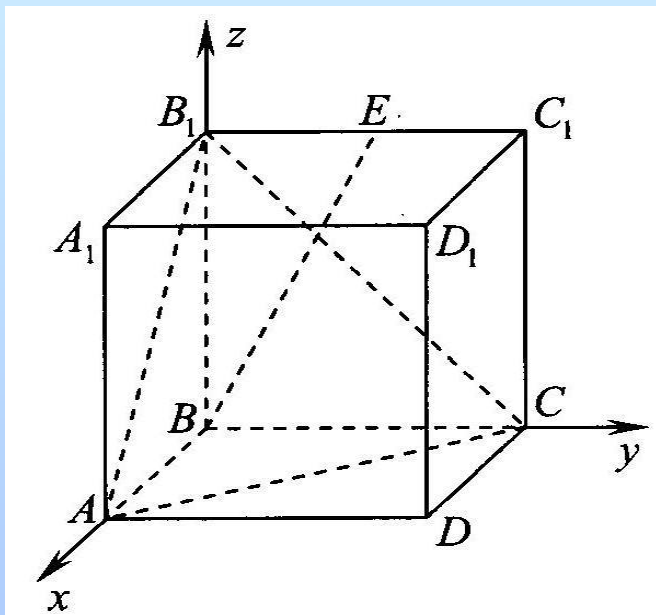
$$\begin{cases} a + d = 0, \\ c + d = 0, \\ 2b + d = 0, \end{cases}$$

находим коэффициенты a , b и c уравнения $ax+by+cz+d=0$: $a=-d$,

$b = -\frac{d}{2}$, $c=-d$. Таким образом, уравнение примет вид

$-dx - \frac{d}{2}y - dz + d = 0$ или, после упрощения, $2x+y+2z-2=0$. Значит

нормаль n к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}\{2;1;2\}$.



Длину вектора легко найти

геометрически: $|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{BB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{2}$

Но его координаты нам всё равно

необходимы. Из простых вычислений

находим, что $\overrightarrow{BE} \{0; -1; -1\}$

Найдем угол между вектором и

нормалью к плоскости по формуле

скалярного произведения векторов:

$$\sin \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{|-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: 45°

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями можно вычислить:

- 1) по формуле $\sin \angle(\alpha, \beta) = \frac{\rho(M; \beta)}{\rho(M; l)}$, где $M \in \alpha, \alpha \cap \beta = l$
- 2) как угол между нормальными по формуле $\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

или в координатной форме $\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

где $\vec{n}_1 \{A_1; B_1; C_1\}$ - вектор нормали плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$,

$\vec{n}_2 \{A_2; B_2; C_2\}$ - вектор нормали плоскости $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

Задача на нахождение угла между двумя плоскостями.

В единичном кубе
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол
между плоскостями $AD_1 E$ и
 $D_1 F C$, где точки E и F –
середины ребер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$.

Решение.

Введём прямоугольную систему координат. Тогда $A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D_1(1;0;1)$, $E(0;0,5;1)$, $F(0,5;1;1)$. 1) Решая систему

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a + c + d = 0, \\ 0,5b + c + d = 0 \end{cases}$$

составляем уравнение плоскости AD_1E :
 $x + 2y - z = 0$.

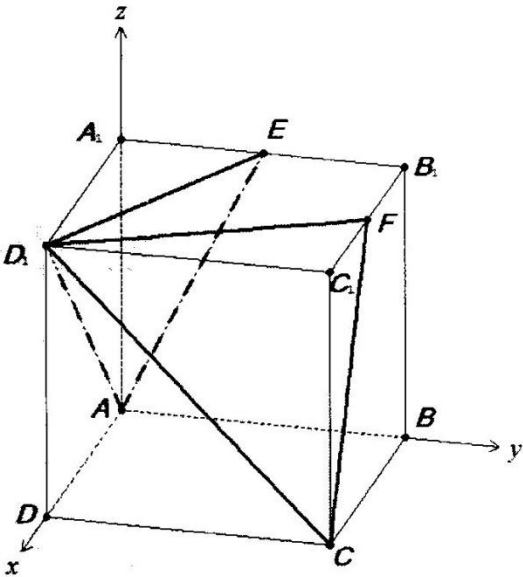
2) плоскость CFD_1 :

$$\begin{cases} a + c + d = 0, \\ 0,5a + b + c + d = 0, \\ a + b + d = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{отсюда находим} \\ \text{уравнение } 2x + y + z - 3 = 0. \end{array}$$

Найдём искомый угол как угол между нормальными плоскостей:

$$\vec{n}\{1;2;-1\}, \vec{m}\{2;1;1\} \quad \cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi = 60^\circ$$

Ответ: 60°



Расстояние между точками A и B

МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ:

1) по формуле

$$\rho(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

где $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$;

2) по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$$

Задача на нахождение расстояния между двумя точками.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб со стороной 2 и острым углом в 60° . Боковое ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды и равно 4. Найдите расстояние от середины H ребра SD и серединой M ребра BC .

Решение.

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Найдём координаты точки Н как координаты середины отрезка SD: $S(0; 0; 4)$, $D(0; 2; 0)$.

$$x = \frac{0+0}{2} = 0, y = \frac{0+2}{2} = 1, z = \frac{4+0}{2} = 2 \Rightarrow H(0; 1; 2)$$

Чтобы найти координаты точек В и С, найдём координаты их проекций на оси.

$$AB_x = AC_x = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$AB_y = AC_y - 2 = 2 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

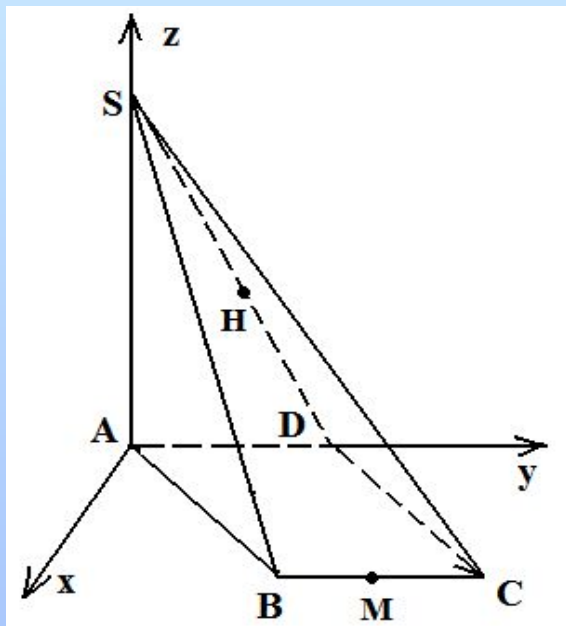
Отсюда $B(\sqrt{3}; 1; 0)$, $C(\sqrt{3}; 3; 0)$. Тогда координаты точки М равняются:

$$x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, y = \frac{1+3}{2} = 2, z = \frac{0+0}{2} = 0 \Rightarrow M(\sqrt{3}; 2; 0)$$

Теперь находим расстояние между точками, заданными своими координатами:

$$\rho(H; M) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

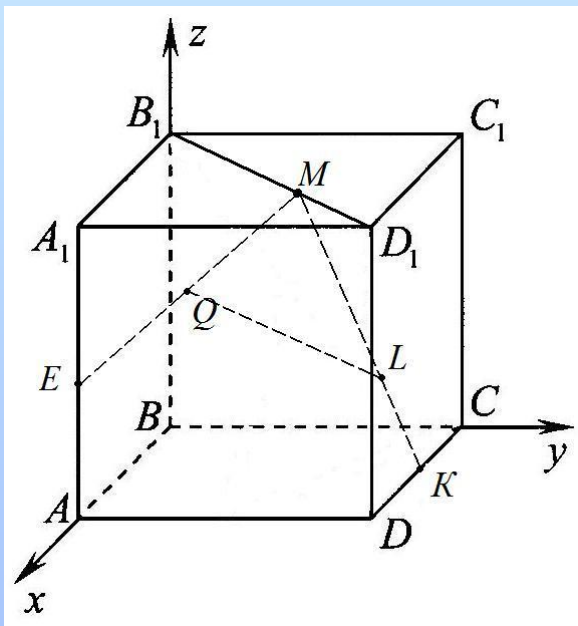
Ответ: $2\sqrt{2}$



Задача.

В единичном кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$.
Найдите расстояние между точками Q и L , где Q – середина отрезка EM , а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

Решение.



Введём декартову систему координат.

$E(1;0;0,5)$, $K(0,5;1,0)$, $B_1(0;0;1)$, $D_1(1;1;1)$.

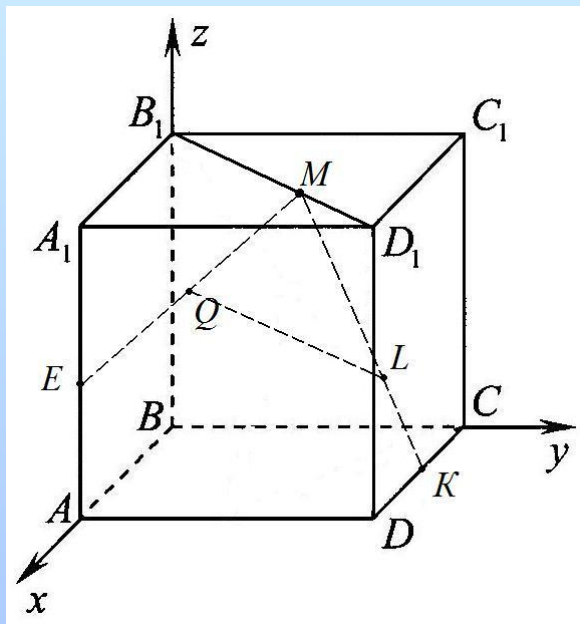
Чтобы вычислить координаты т.М, воспользуемся формулой для нахождения координат точки, которая делит отрезок B_1D_1 в отношении $\lambda=2:1$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

$$x_M = \frac{0 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}, y_M = \frac{2}{3}, z_M = \frac{1 + 2}{1 + 2} = 1 \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$$

Аналогично находим координаты точки L:

$$x_L = \frac{\frac{2}{3} + 2 \cdot 0,5}{2 + 1} = \frac{5}{9}, y_L = \frac{\frac{2}{3} + 2}{3} = \frac{8}{9}, z_L = \frac{1}{3} \Rightarrow L\left(\frac{5}{9}; \frac{8}{9}; \frac{1}{3}\right)$$



Координаты точки Q находим по формуле координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\rho(Q; L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{18}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{324}} = \frac{13}{18}$$

Ответ: $\frac{13}{18}$.

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние от точки M до плоскости α

- 1) вычисляется по формуле $\rho = \rho_1 \frac{r}{r_1}$, где $\rho = \rho(M; \alpha)$, $\rho_1 = \rho(M_1; \alpha)$, $OM = r$, $OM_1 = r_1$, $MM_1 \perp \alpha$; в частности, $\rho = \rho_1$, если $r = r_1$: прямая m , проходящая через точку M , пересекает плоскость α в точке O , а точка M_1 лежит на прямой m ;
- 2) вычисляется по формуле

где $M(x_0; y_0; z_0)$, плоскость α задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$;

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача на нахождение расстояния от точки до плоскости.

В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$
проведена диагональ B_1D . В каком
отношении, считая от вершины B_1 ,
плоскость A_1BC_1 делит
диагональ B_1D ?

Решив систему $\begin{cases} d = 0, \\ la + lz + d = 0, \\ lb + lc + d \end{cases}$

Теперь найдём расстояние от каждой точки до плоскости по формуле

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho_1(D; A_1 C_1 B) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\rho_2(B_1; A_1 C_1 B) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

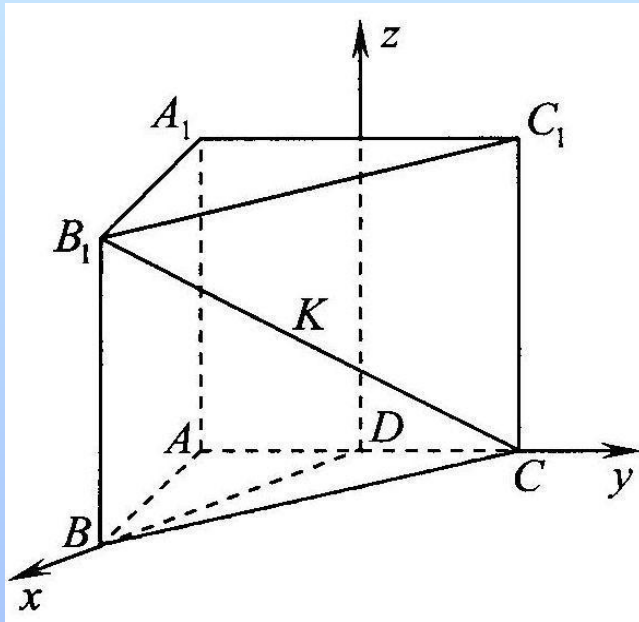
$$\rho_1 : \rho_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 : 1$$

Ответ: 2:1.

Задача.

Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный треугольник ABC , основание AC и высота BD которого равны 4. Боковое ребро равно 2. Через середину K отрезка B_1C проведена плоскость, перпендикулярная к этому отрезку. Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости.

Решение.



Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данной призмы и точки К в этой системе координат: $A(0;-2;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;2;0)$, $B_1(4;0;2)$, $K(2;1;1)$. Тогда $\overrightarrow{B_1C} \{-4;2;-2\}$. Этот вектор перпендикулярен плоскости, значит, он является его нормалью. К тому же плоскость проходит через точку К. То есть уравнение плоскости имеет вид $-2(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0$ или, после упрощения, $2x-y+z-4=0$.

Теперь находим расстояние от т. $A(0;-2;0)$ до плоскости:

$$\rho(A; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Как вы видите, все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), координатным методом получаются в ходе несложных алгебраических вычислений. Нам не нужно задумываться, к примеру, как проходит та или иная плоскость, как упадет перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, каким образом скрещивающиеся прямые перенести, чтобы они были пересекающимися и т.д. Нам просто надо поместить тело в прямоугольную систему координат, определить координаты точек, векторов или плоскостей и воспользоваться формулой.

Благодари

м за

внимание!
