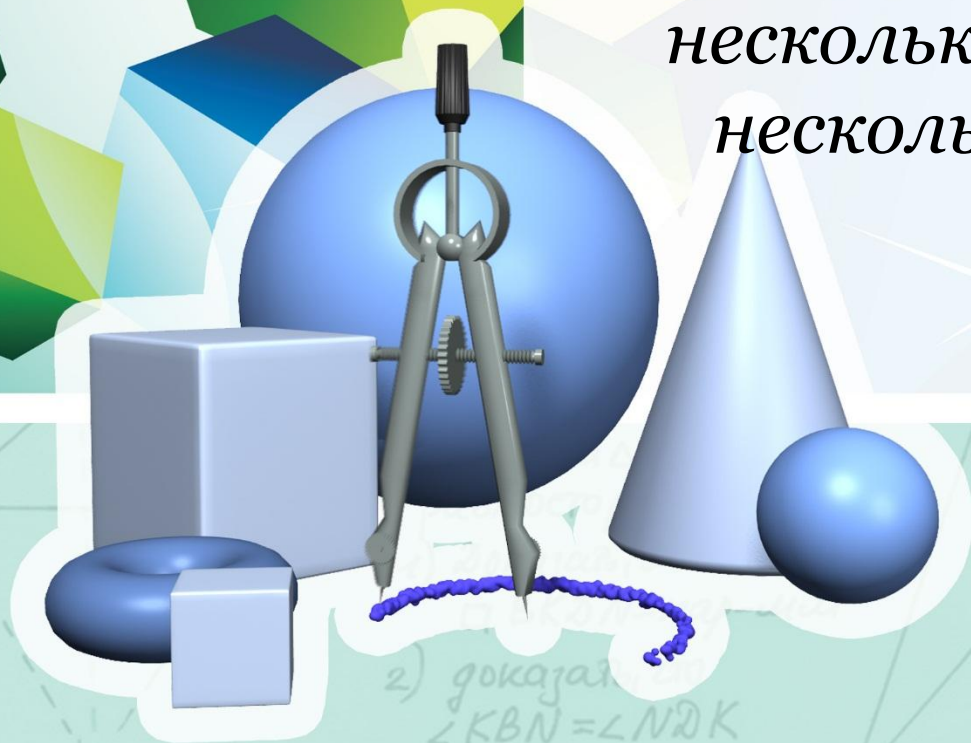


Решение геометрических задач при подготовке к ОГЭ

«Лучше решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач - одним»

ПОЙА



$\triangle ВКС$ и $\triangle АРД$ -
равносторонние
Докажите
1) $\square ВКДР$ - пар-м
2) $\angle РВК = \angle КДР$
3) $\triangle РВК = \triangle КДР$

2) доказать
 $\angle КВН = \angle НДК$

Геометрия – это не просто наука о свойствах геометрических фигур. Геометрия – это целый мир, который окружает нас с самого рождения. Ведь все, что мы видим вокруг, так или иначе относится к геометрии, ничто не ускользает от ее внимательного взгляда. Геометрия помогает человеку идти по миру с широко открытыми глазами, учит внимательно смотреть вокруг и видеть красоту обычных вещей, смотреть и думать, думать и делать выводы.

В качестве эпиграфа своего выступления я взяла слова известного математика Пойа:

«Лучше решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач – одним»

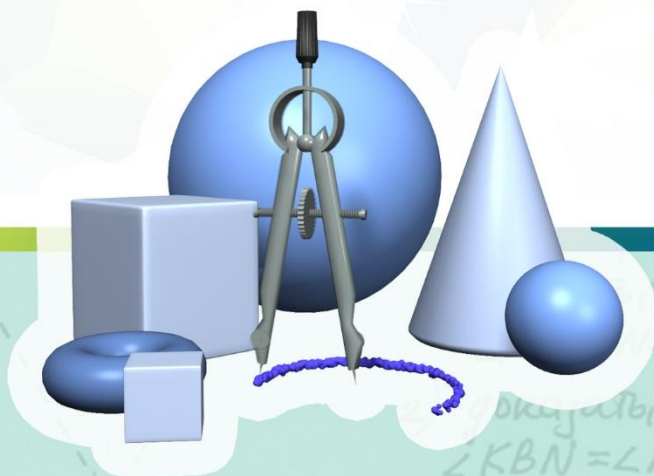


$\angle KBN = \angle NDK$

1) $\square BKNP$ - параллелограмм
2) $\angle PBK = \angle KDP$
3) $\triangle PBK = \triangle KDP$

И это не случайно. Я хочу показать, что при подготовке к экзаменам, необходимо отрабатывать умения решать задачи именно так как сказал великий математик, т.е. решать задачи несколькими способами.

Начну с решения задачи из первой части.



Докажите
1) $\square BKP$ - пар-мн
2) $\angle PBK = \angle KDP$
3) $\triangle PBK = \triangle KDP$

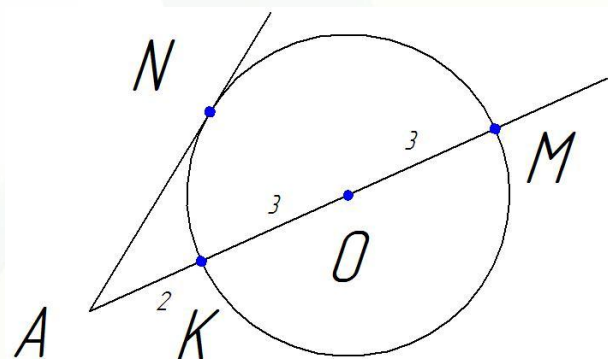
$\angle KBN = \angle NDK$

Задача 1.

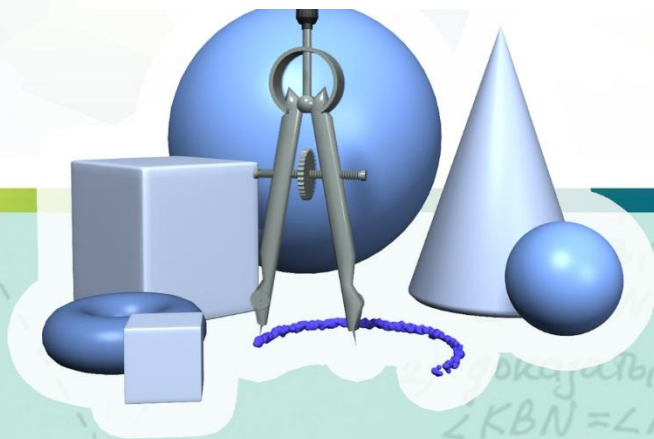
Найдите длину отрезка AN , если радиус изображенной на рисунке окружности $OK = 3$, $AK = 2$.

Решение.

1 способ. AN – касательная к окружности, AM – секущая. Если



из точки A к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки A до точки касания равен произведению отрезков секущей от точки A до точек пересечения секущей с окружностью. $AN^2 = AK \cdot AM = 2 \cdot 8 = 16$
 $AN = 4.$

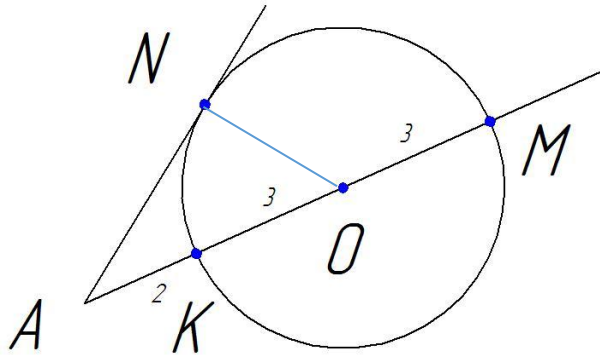


доказать, что
пар-мн
 $\angle KBN = \angle NDK$

докажите
1) $\square BКДР$ - пар-мн
2) $\angle PBK = \angle KDP$
3) $\triangle PBK = \triangle KDP$

2

способ



Проведем радиус ON .
 Касательная к
 окружности перпендикулярна к
 радиусу,
 проведенному в точку касания.
 Значит, $\triangle ANO$ — прямоугольный.
 $AN = \sqrt{AO^2 - NO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$
 $AO = 5, NO = 3$. По теореме Пифагора

$$\sin A = \frac{3}{5}$$

3 способ

По основному тригонометрическому тождеству

$$\frac{AN}{AO} = \cos A \Rightarrow AN = AO \cdot \cos A = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

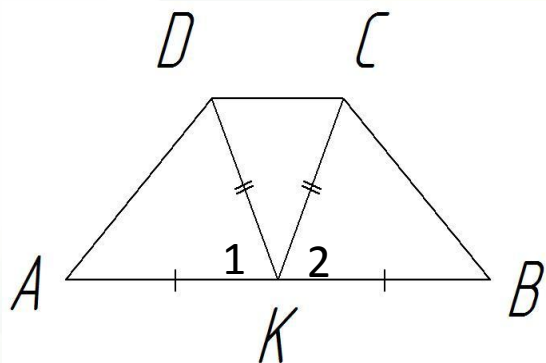
Задачи из второй части экзаменационной

Задача 2. работы

В трапеции $ABCD$ точка K – середина основания AB . Известно, что $CK = KD$. Докажите, что трапеция равнобедренная.

Решение.

1 способ.



Т. к. $CK = KD$, то $\triangle CKD$ – равнобедренный, а в равнобедренном треугольнике углы при основании равны $\Rightarrow \angle KDC = \angle KCD$.

$\angle 1 = \angle KDC$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых DC и AB секущей DK , $\angle 2 = \angle KCD$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых DC и AB секущей CK . $\angle KDC = \angle KCD$

, то

$$\angle 1 = \angle 2$$

– по

. $\angle 1 = \angle 2$ им $\triangle AKD$ и $\triangle BKC$. $AK = KB$, $DK = CK$

$\triangle BKC$

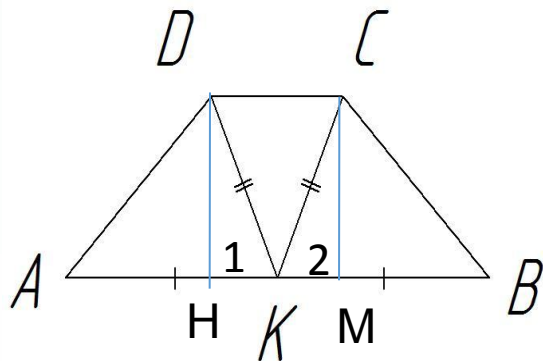
условию, – по доказанному, то $\triangle AKD =$

по первому признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников следует, что $AD =$

CB ,

2 способ



Проведем высоты DH и CM . $\triangle DKN = \triangle CKM$ по гипотенузе и катету ($DH = CM$ как расстояния между параллельными прямыми, $DK = CK$ – по условию) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$
(Дальше как в первом способе).

3 способ

Из равенства $\triangle DKN$ и $\triangle CKM$ следует, что $NK = KM$
$$\left. \begin{array}{l} AK - NK = AN \\ KB - KM = MB \end{array} \right| \Rightarrow AN = MB$$

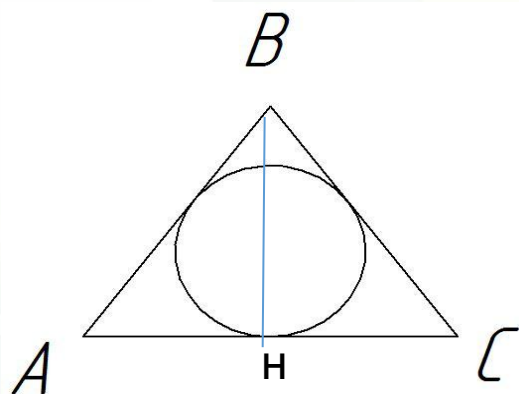
Значит, прямоугольные треугольники ADN и BCM равны по двум катетам ($DH = CM$ как расстояния между параллельными прямыми, $AN = MB$ по доказанному). Из равенства треугольников следует, что $AD = BC$ трапеция $ABCD$ – равнобедренная.

Задача 3

В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 10$, $\cos ABC = \frac{7}{25}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

1 способ.



По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$

$$AC^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{7}{25}$$

$$AC^2 = 144 \quad AC = 12$$

Радиус окружности, вписанной в треугольник, можно найти с помощью формулы $r = \frac{S}{p}$.

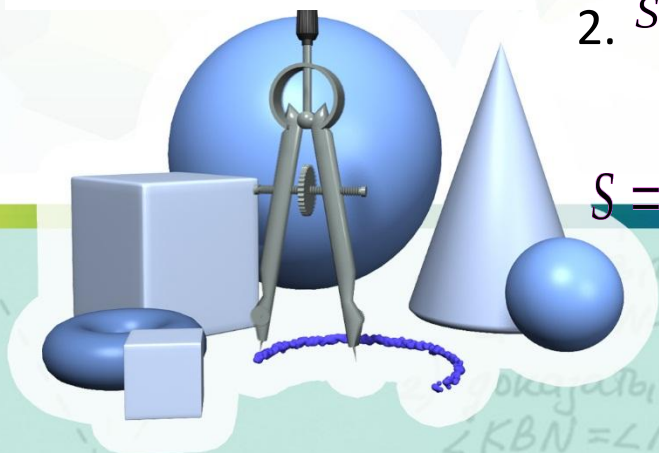
Площадь данного треугольника можно найти следующими способами: 1. $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$

$$2. S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B \quad 3. S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$$

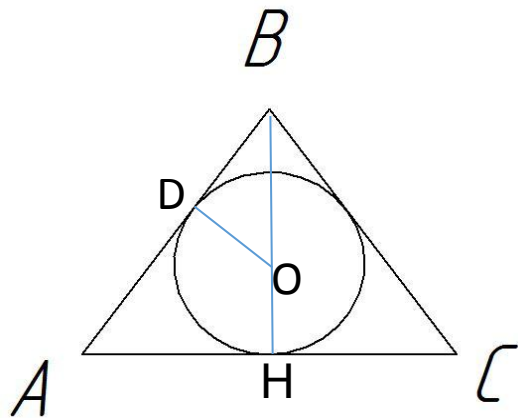
$$p = \frac{1}{2}(10 + 10 + 12) = 16$$

$$S = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$$

$$\text{Значит, } r = \frac{48}{16} = 3$$



2 способ



Мы знаем, что центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения его биссектрис. Проведем биссектрису BH . Т. к. в равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают, то биссектриса BH будет ¹медианой, и ²высотой.

Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

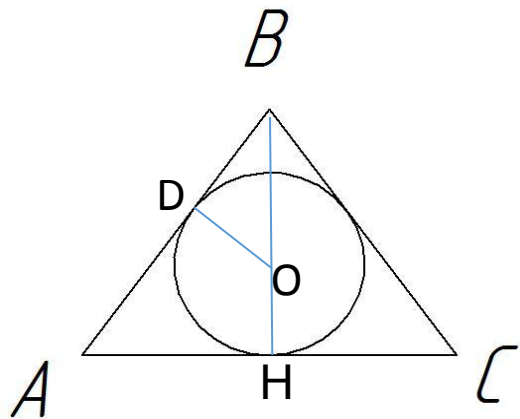
Проведем радиус OD в точку касания. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Прямоугольные треугольники ABH и OBD подобны по двум углам (угол ABH – общий, углы H и D равны как прямые). В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны.

Пусть $OH = x$, тогда $BO = 8 - x$.

$$\frac{BO}{AB} = \frac{OD}{AH} \Rightarrow \frac{8-x}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow 10x = 6(8-x) \Rightarrow x = 3. \text{ Значит, радиус } HO = 3.$$

3 способ



Начало такое же, как во 2-м способе. Только рассмотрим не подобные треугольники, а прямоугольный треугольник OBD .

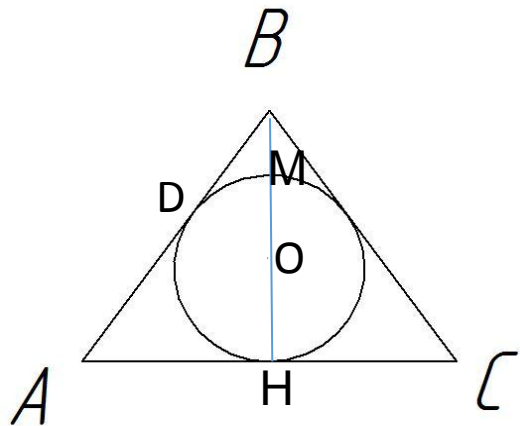
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны. Значит, $AD = AH = 6$. $BD = 10 - 6 = 4$.

Пусть $OH = OD = x$, тогда $BO = 8 - x$. По теореме Пифагора имеем уравнение:

$$64 - 16x + x^2 = 16 + x^2$$
$$16x = 48$$
$$x = 3$$

Значит, радиус $HO = 3$.

4 способ



Проведем BH (не будем проводить OD , но точку касания D обозначим). Из второго способа $AC = 6$

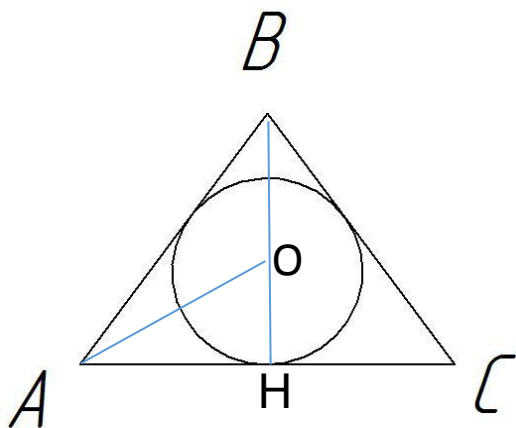
Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны. Значит, $AD = AH = 6$. $BD = 10 - 6 = 4$.

По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BM \cdot BH$
 $16 = BM \cdot 8, BM = 2$

$$MH = 2r = 8 - 2 = 6 \quad r = 3. \text{ Значит, радиус } HO = 3.$$

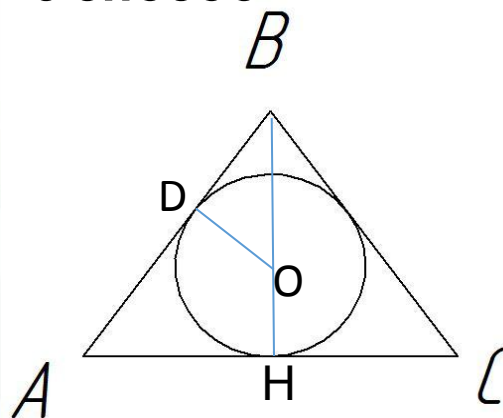
5 способ



Проведем BH и AO . Т.к. центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис, то AO – биссектриса угла A , а значит, и биссектриса треугольника ABH . Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$$\frac{BO}{AB} = \frac{OH}{AH} \quad \text{Пусть } OH = x, \text{ тогда } BO = 8 - x \quad \frac{8 - x}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow$$

6 способ



$$16x = 48, x = 3. \text{ Значит, радиус } HO = 3.$$

Из $\triangle ABH$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AH}{BH} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = 4.$

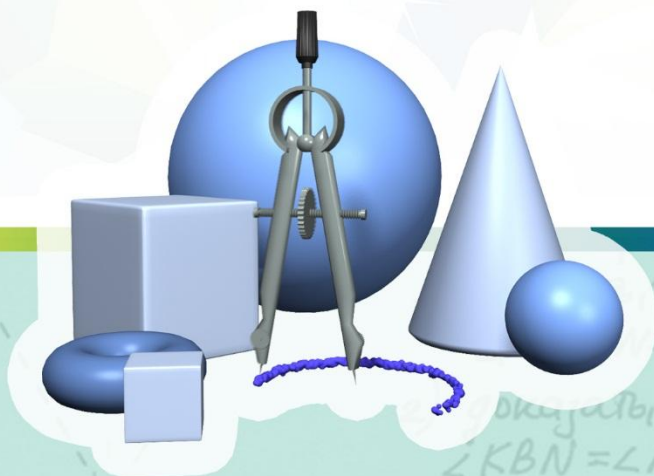
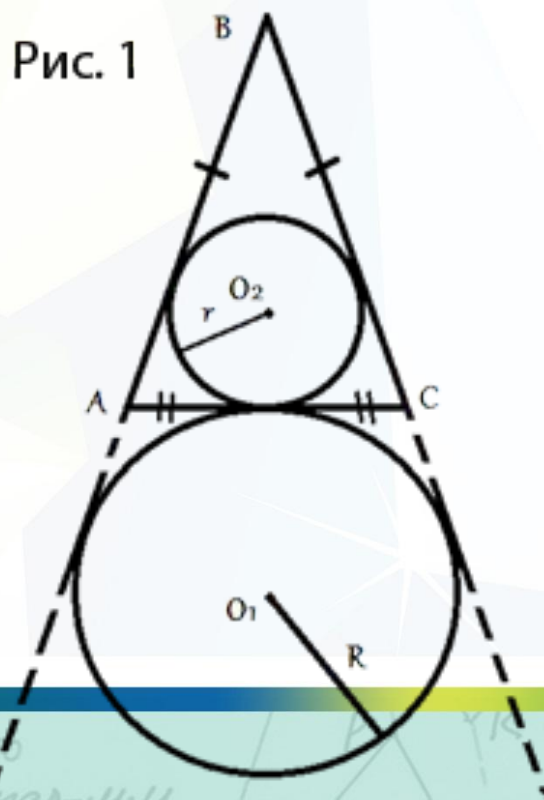
$$\text{Из } \triangle OBD: \operatorname{tg} \alpha = \frac{OD}{BD} \Rightarrow \frac{OD}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow OD = 3.$$

Значит, радиус $HO = 3$

Ответ: радиус вписанной окружности равен 3.

Задача 4.

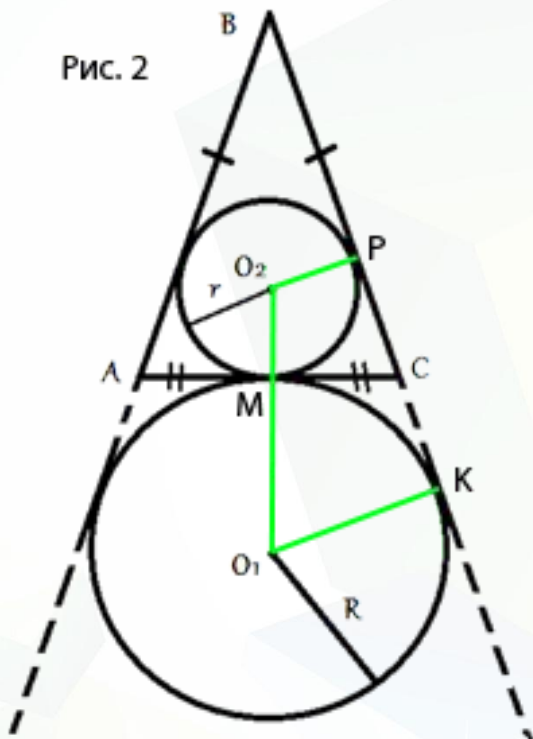
Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .



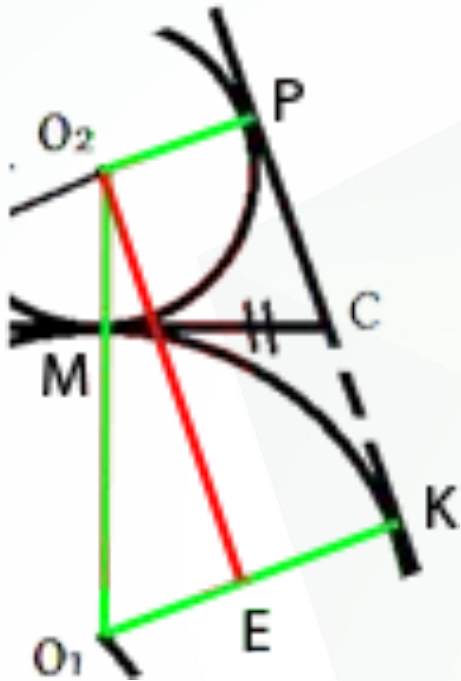
Докажите
1) $\square BКДР$ - пар-мн
2) $\angle PBK = \angle KDP$
3) $\triangle PBK = \triangle KDP$

Решение.
1 способ.

Рис. 2



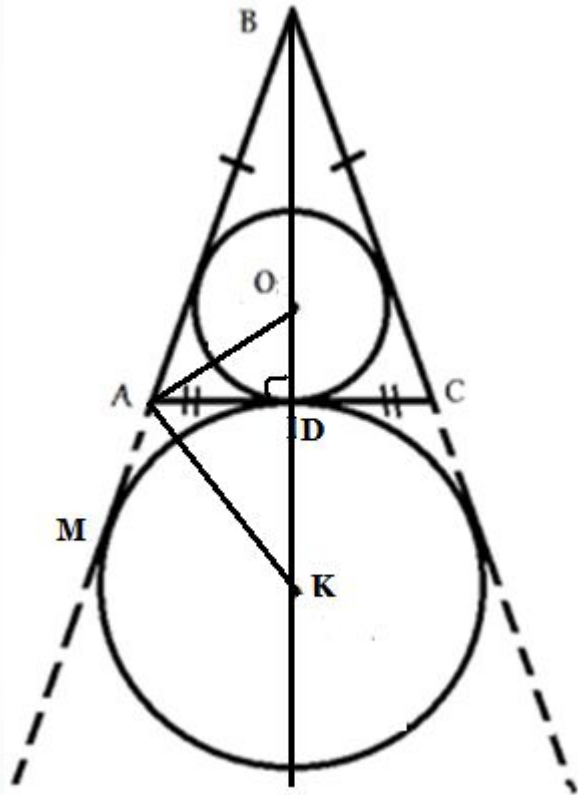
Проведем следующие отрезки (как показано на рисунке 2): 1) Из точки O_2 к точке касания окружности и продолжения стороны BC . (точка P) 2) Из точки O_1 к точке касания окружности и продолжения стороны BC . (Точка K) 3) Из точки O_1 к точке O_2 . Заметим, что: 1) $CM = AC/2$, 2) $CP = CM$, 3) $CM = CK$, 4) $O_1O_2 = R + r$, 5) O_2P перпендикулярна BC , 6) O_1K тоже перпендикулярна BC , 7) Из пунктов 2) и 3) следует, что $CP = CK = CM = AC/2$. Тогда $PK = AC/2 + AC/2 = AC$. Следовательно, $O_2P \parallel O_1K$ (по свойству параллельных прямых). Отсюда следует, что O_1O_2PK - прямоугольная трапеция (по определению трапеции).



Рассмотрим эту трапецию. Проведем отрезок O_2E параллельный PK , а раз он параллелен PK , то в свою очередь перпендикулярен O_1K и равен ему. Следовательно получившийся треугольник O_1O_2E - прямоугольный. Тогда, по теореме Пифагора, мы можем записать: $(O_1O_2)^2 = (O_2E)^2 + (O_1E)^2$. Подставим известные нам данные, полученные ранее: $(R+r)^2 = AC^2 + (R-r)^2$. Раскрываем скобки, получаем: $R^2 + 2Rr + r^2 = AC^2 + R^2 - 2Rr + r^2$
 $2Rr = AC^2 - 2Rr$, $4Rr = AC^2$, $r = AC^2 / 4R$, $r = 12^2 / 4 \cdot 8$
 $r = 144 / 4 \cdot 8$, $r = 4,5$

Ответ: радиус вписанной окружности равен 4,5.

2 способ



- 1) O – центр вписанной окружности, AO и BD – биссектрисы углов A и B
- 2) Т.к. $\triangle ABC$ по условию равнобедренный, то биссектриса BD – медиана и высота
- 3) AK – биссектриса $\angle MAC$ (по свойству отрезков касательных, проведенных из т.А)
- 4) $\angle KAO = \angle KAD + \angle OAD = \frac{1}{2} \angle MAD + \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle MAD + \angle BAD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$
- 5) $\triangle OAK$ – прямоугольный, AD – высота

$$AD^2 = OD \cdot DK, OD = \frac{AD^2}{DK} = \frac{6^2}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4,5$$

Ответ: радиус вписанной окружности равен 4,5.

Задания на экзамене предлагаются каждый год разные. Мы не можем знать заранее, какие задачи будут на экзамене. Поэтому, чтобы ученики могли уверенно решать предложенные задачи, им надо хорошо знать теорию, т.е. определения и формулировки теорем. А решая задачу разными способами, они повторяют весь изученный теоретический материал.

Материал подготовила учитель математики МКОУ «Каменская ОШ» Астапенко Татьяна Васильевна

РМО учителей математики, май 2017

