"Решение алгебраических задач геометрическими методами"

Учитель:

Александрова С.В.

Актуальность

- Математика – предмет, изучающийся с первого по выпускной класс. Объем материала, терминов, которыми должен оперировать старшеклассник по математике, чрезвычайно велик. Необходимо знать и уметь применят такие методы для решения задач, которые позволят сэкономить время и будут наглядны, т.е. решение задачи будет выглядеть очевидным. Многие задачи алгебры очень трудно решить аналитическим путем. Поэтому любое представление условия задачи в виде рисунка или чертежа облегчает решение задачи. Многие задачи ЕГЭ из части 2 можно решить геометрическим методом.
- Геометрический метод состоит в том, что само доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением.

В своей работе мы ставим следующую цель:

- Показать, что преимущество геометрического решения алгебраических задач в его наглядности, так как геометрический подход допускает изящное решение;

Задачи:

- Найти и изучить литературу по данной теме.
- Рассмотреть алгебраические задачи, которые можно решить и алгебраически и геометрически. Сравнить способы решения задач различными методами.
- Определить задачи, которые удобнее решать геометрическим методом.
- Рассмотреть ряд приемов решения нестандартных и конкурсных задач.
- Развивающая задача: повысить свое интеллектуальное развитие.

- Предмет исследования: Геометрические методы решения задач.
- Объект исследования: Алгебраические задачи.
- Методы исследования: Аналогия, обобщение, анализ научной литературы.

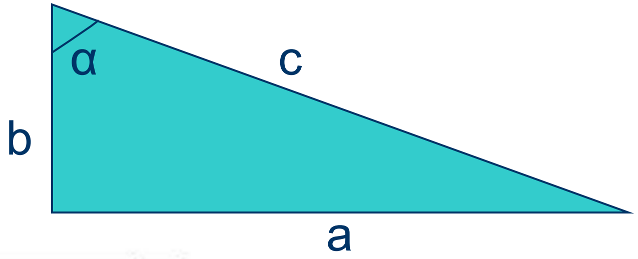
Основная часть

- **1. Решение тригонометрических задач.**
- Многие тригонометрические задачи не решаются привычными для них методами или решаются очень сложно, а использование какого-нибудь геометрического приема дает короткое решение. *«Тригонометрические функции — это испытанный аппарат геометрии и их тоже нужно излагать, отправляясь от простых наглядных задач, как они практически и возникли — из решения треугольников»?*

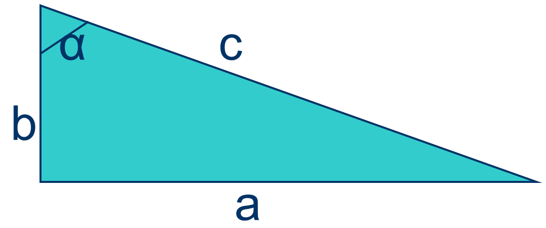
Пример 1: выразить $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$ через все остальные аркфункции

- РЕШЕНИЕ: Так как $0 < \arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} < \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$

можно рассматривать как радианную меру острого угла прямоугольного треугольника, в котором противолежащий ему катет ***a***=7, гипотенуза ***c***=√50



По теореме Пифагора другой катет равен: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{50-49} = 1.$



- Угол *α* можно рассматривать как арккосинус или арктангенс, или арккотангенс соответствующих чисел (рис. 4).

Тогда $\alpha = \arccos\frac{b}{c} = \arccos\frac{1}{\sqrt{50}}, \alpha = arctg\frac{a}{b} = arctg\,7$ и

$$\alpha = arcctg\frac{b}{a} = arcctg\frac{1}{7}.$$

Пример 2. Вычислить arctg2+arctg3+arctg1

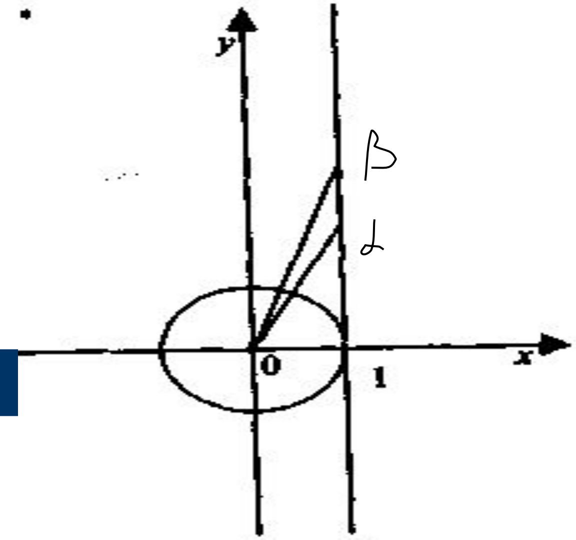


Рис. 6

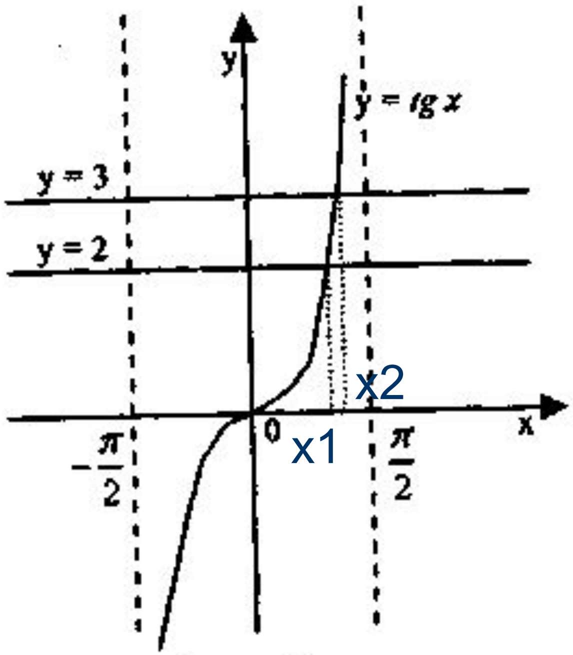


Рис. 5

- **Определение:** *arctg a* (арктангенс а) — это такое число из интервала тангенс которого равен *а.*
- **Решение:** На основании этого определения *arctg1*= π/4 Что же такое *arctg2* ?
- Это число из интервала (-π/2:π/2) тангенс которого равен 2. Аналогично и *arctg*3.
- Воспользуемся графической интерпретацией (рис.5). Из рисунка видно, что *arctg2 = x1* , *arctg3 = x2 .*
- Ясно, что числа x1 и *x2* иррациональные и указать их значения можно только приближенно. По рис. 6 видно, что *arctg2*= α, а *arctg3* = β. Однозначно определить ответ невозможно.

Использование геометрического подхода делает данную задачу практически устной.

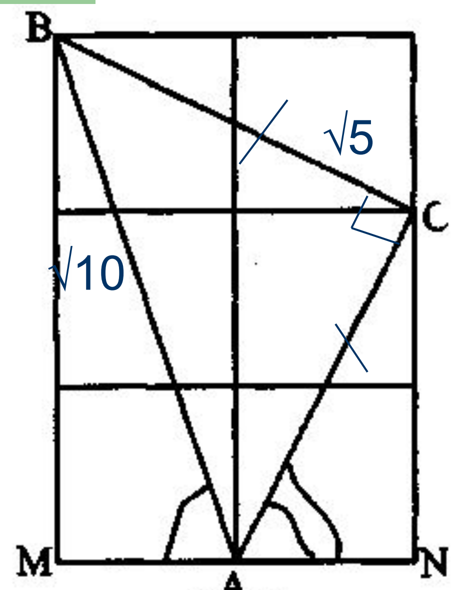


Рис. 7

- Выполним следующие построения: *arctg3 = <BAM, arctg2 =<CAN* (рис. 7). Тогда *arctg1=<BAC,* где <*BAC* - острый угол прямоугольного равнобедренного ∆*ABC(BC=AC=*√5,

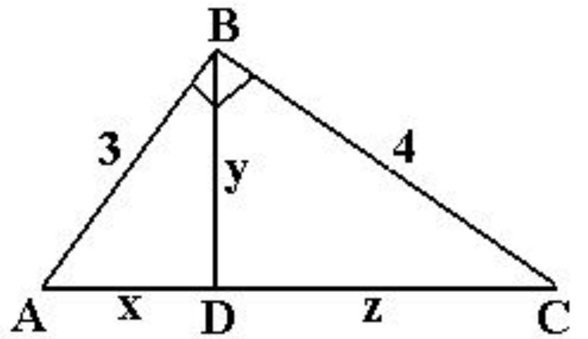
AB=√10)

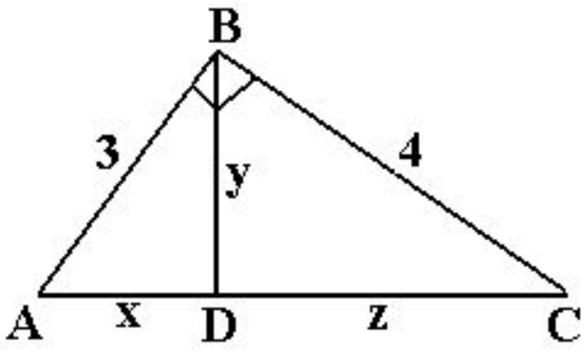
- Таким образом, *arctg2+arctg3+ +arctg1=<BAM+<BAC+<CAN= <MAN=180°=π.* Ответ: *π*

2. Решение систем уравнений

- Решить систему уравнений:
- Решение: По теореме обратной теореме Пифагора, из уравнения $x^2+y^2=3^2$, числа x и y являются катетами ΔABD (<D – прямой) с гипотенузой AB = 3. Рассматривая второе уравнение $y^2+z^2=4^2$, построим ΔBDC, где y и z – катеты, а BC = 4 – гипотенуза. Третье уравнение $y^2= xz$ подсказывает, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z.

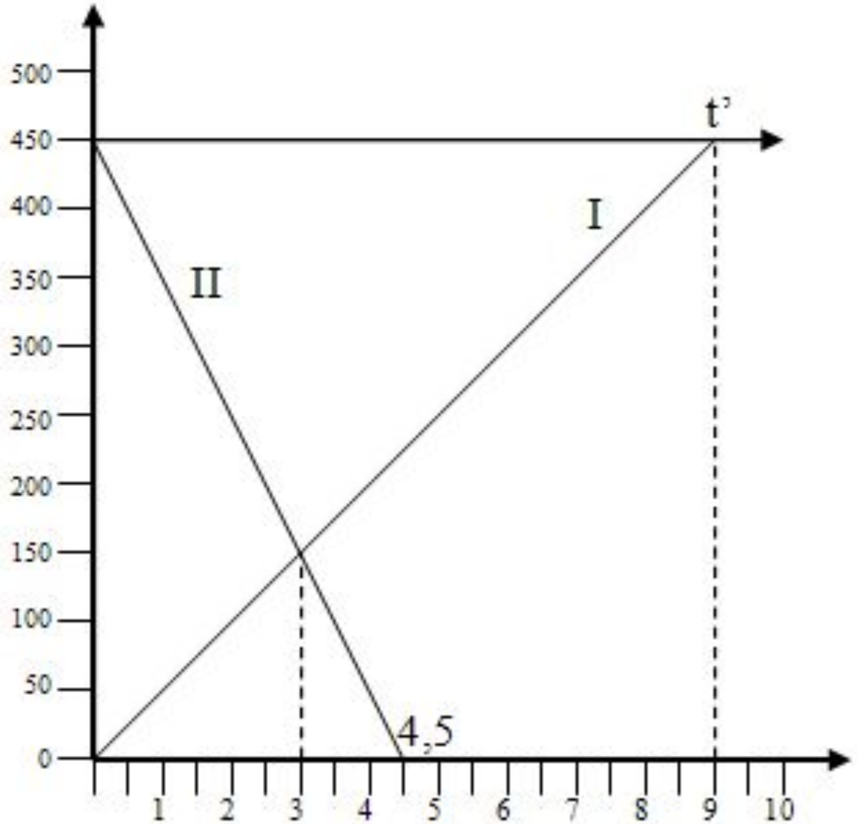
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{cases}$$





- По теореме обратной теореме о пропорциональных отрезках $<ABC = 90°$ $AC = (x + z) = \sqrt{9+16} = 5$, тогда
- $AB^2=AD \cdot AC$, $9=x \cdot 5$, $x =9/5$
- $BC^2=DC \cdot AC$, $16=z \cdot 5$, $z =16/5$
- $BD^2=y^2=x \cdot z =9/5 \cdot 16/5$ и $BD=12/5=y$.
- Однако, такой прием дает потерю корней, легко убедиться, что $x=\pm 9/5$; $y=\pm 12/5$; $z=\pm 16/5$.

3. Решение текстовых задач на движение



Задачи на движение и на совместную работу можно решать графически. Решение задачи основывается на точных геометрических соотношениях.

Решить задачу: Расстояние между двумя городами равно 450 км. Два автомобиля выходят одновременно навстречу друг другу. Один автомобиль мог бы пройти все расстояние за 9 часов, другой – вдвое быстрее. Через сколько часов они встретятся?

- Читаем с чертежа ответ: 3 часа.

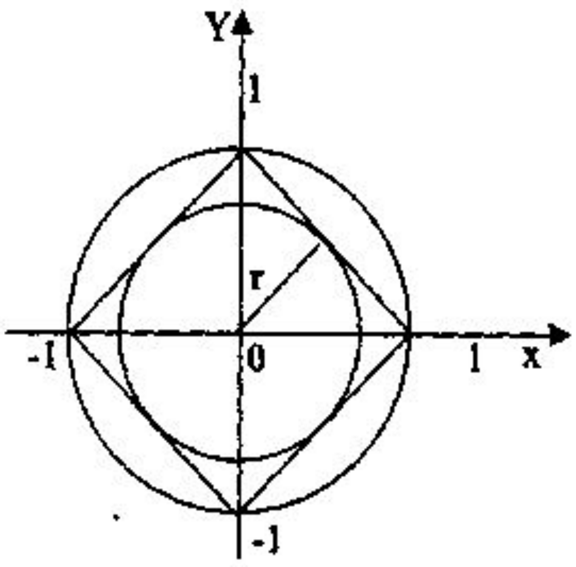
4. Решение конкурсных задач и задач ЕГЭ

- Геометрическим методом хорошо решаются уравнения и неравенства с параметрами, а также их системы
- **Пример1**: При каком *a* система уравнений $\begin{cases} |x|+|y| = 1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ имеет ровно четыре решения?

- **Решение:** Построим линии, определяемые уравнениями системы.

$r=\sqrt{2}/2$. Четыре решения могут быть только в двух случаях,
когда $a=R^2=1$, или $a=r^2=1/2$.

Ответ:1;1/2.



Пример 2.

- При каких значениях *a* система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=z; \\ x+y+z=a \end{cases}$ имеет единственное решение?
- Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $x^2+y^2+x+y=a$, полученное из системы
- $\begin{cases} x^2+y^2= z \\ x+y+z=a \end{cases}$

- Преобразуем полученное уравнение:
- $x^2+y^2+x+y=(x^2+x+0,25)+(y^2+y+0,25)-0,25-0,25=a$
- $(x+0,5)^2+(y+0,5)^2=0,5+a$ (*)
- Итак, уравнение(*) задает на плоскости окружность с центром(-0,5;0,5)и радиусом $R=\sqrt{0,5+a}$.
- 1)Если $0,5+a<0$, т.е. при $a<-0,5$, множество точек, задаваемых на плоскости уравнением(*), пусто, а следовательно, исходная система решений не имеет

- 2)Если 0,5+*a*=0, т.е. при *a*=-0,5, уравнение(*) имеет единственное решение, т.к. и окружность вырождается в точку(-0,5;0,5);
- 3)Если 0,5+*a*>0,т.е. при *a*>-0,5, множество точек, задаваемых на плоскости уравнением (*), является окружностью с центром(-0,5;0,5) и R√0,5+*a*. В этом случае уравнение (*), а следовательно, и исходная система, имеет бесконечно много решений.

Ответ: *a* = - 0,5.

Пример 3: **Вычислить (без калькулятора и таблиц) sin18.**

- Приведём геометрический способ решения (рис 14).
- Рассмотрим сектор OAB окружности с центром в точке

 O и радиуса 1,

- Проведём хорду AB,

на отрезке OB построим точку C т
 чтобы AC = AB, при этом <*ACB* = <ABC= 72°, а <CAB = 36°.

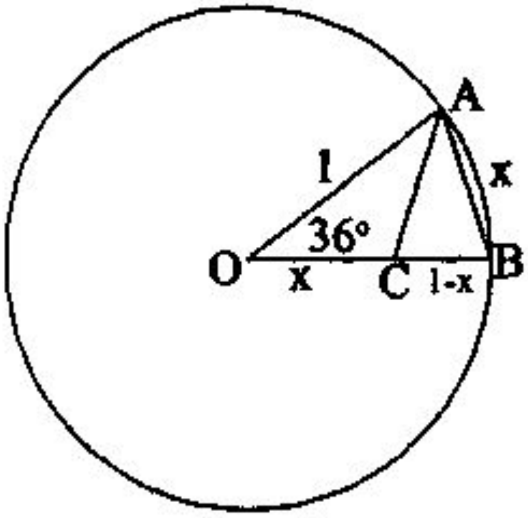


Рис. 14

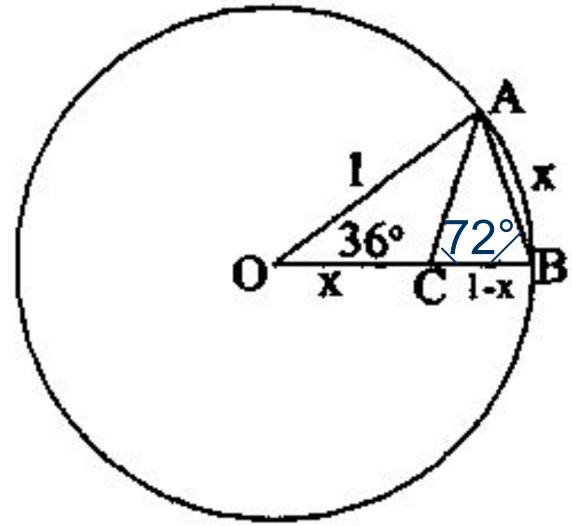


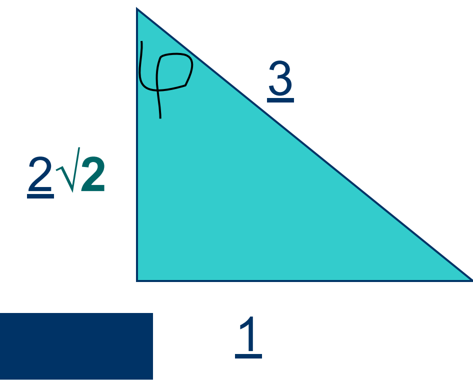
Рис. 14

- Таким образом OC = AC.
- Пусть AB = x, CB = 1-x.
- Поскольку AC – биссектриса треугольника OAB, справедлива пропорция $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ откуда
- $x^2+x-1=0$, $(x>0)$, $x=(\sqrt{5}-1)/2$
- По теореме косинусов: $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot \cos\angle AOB$, $x^2=1+1-2\cos 36°$,

$x=\sqrt{2(1-\cos 36°)}=\sqrt{2(1-\cos^2 18°+\sin^2 18°)}=2\sin 18°$

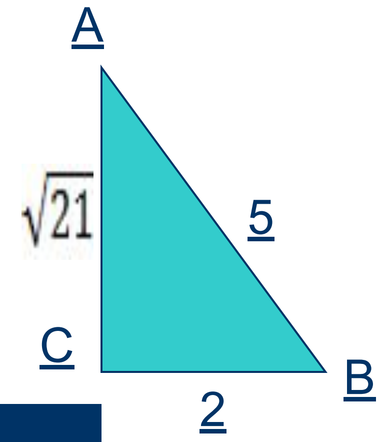
- Тогда $\sin 18°=(\sqrt{5}-1)/4$
- *Ответ:* $(\sqrt{5}-1)/4$

Пример 4: Решить уравнение $\sin 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x = 2$



- **Решение:** Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами
- BC = 1 и AC = $2\sqrt{2}$. Тогда AB= $\sqrt{1+8}$ = 3. Пусть <A= φ, где φ – острый угол.
- Тогда cos φ=$2\sqrt{2}/3$ и sin φ=1/3.
- Имеем $\sin 3x + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos 3x = \frac{2}{3}$, $\cos 3x \cos\varphi + \sin 3x \sin\varphi = \frac{2}{3}$, $\cos(3x-\varphi) = \frac{2}{3}$
- Решая уравнение получим: x=1/3arcsin1/3±1/3arccos2/3+2πn/3, nєZ
- *Ответ:* x=1/3arcsin1/3±1/3arccos2/3+2πn/3, nєZ

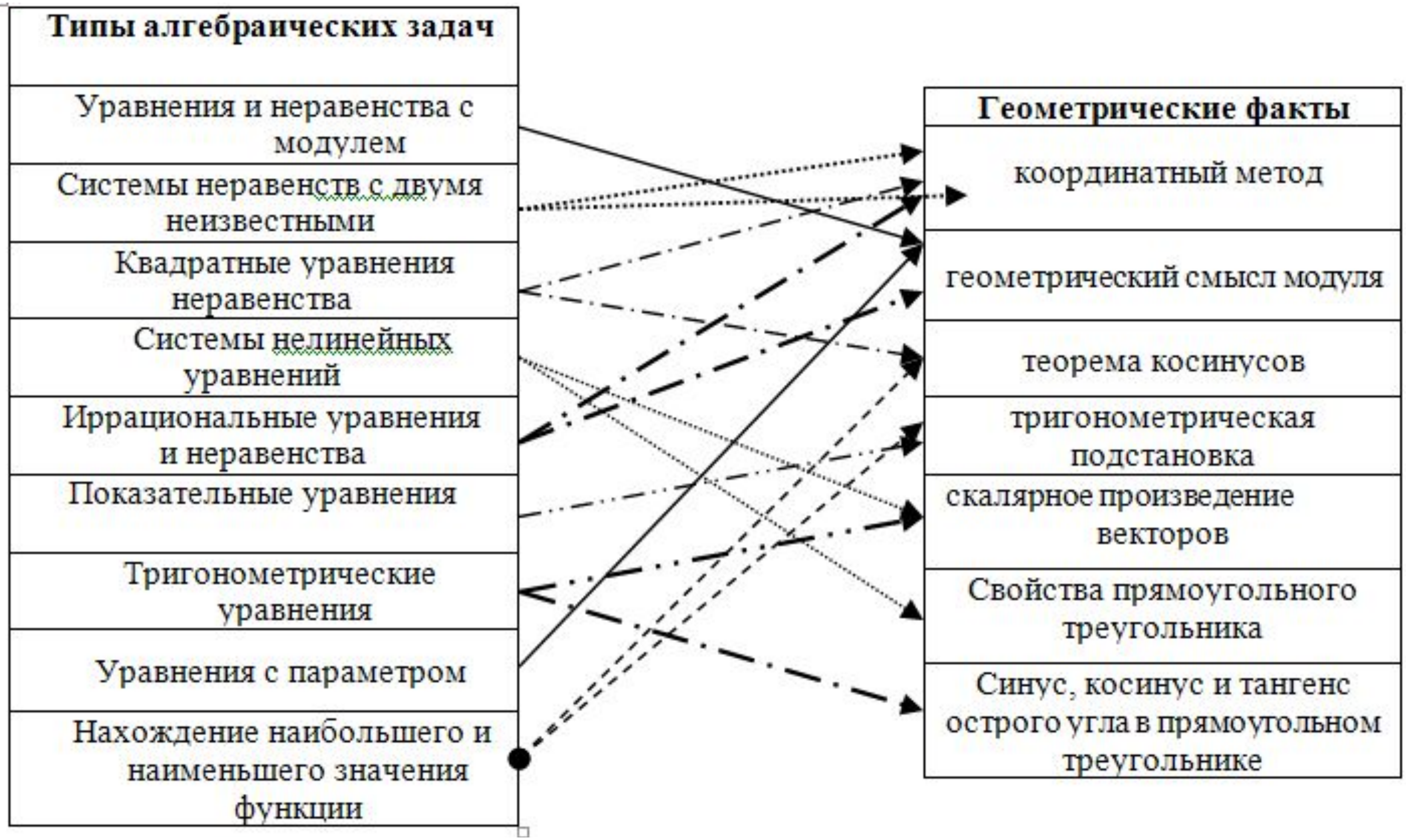
Пример 5: Найдите значение выражения $\sqrt{21}$ tg(arcsin $\frac{2}{5}$).



- **Решение:** По определению арксинуса имеем:
- $\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Построим прямоугольный
- треугольник ABC с углом A, который равен arcsin $\frac{2}{5}$. При этом, по теореме Пифагора, прилежащий катет будет равен $\sqrt{21}$. Поэтому tg(arcsin $\frac{2}{5}$) = $\frac{CB}{AC}$ = $\frac{2}{\sqrt{21}}$ и $\sqrt{21}$ tg(arcsin $\frac{2}{5}$)= $\sqrt{21} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}}$ =2.
- Ответ: 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Геометрический метод характеризуют как метод, идущий от наглядных представлений. Существенными признаками этого понятия являются геометрические (наглядные) представления и законы геометрии, в которых отражены свойства геометрических фигур.
- Мы попытались сопоставить задачи и способы их решения, вот какая картина у нас получилась:


Типы алгебраических задач
Уравнения и неравенства с модулем
Системы неравенств с двумя неизвестными
Квадратные уравнения неравенства
Системы нелинейных уравнений
Иррациональные уравнения и неравенства
Показательные уравнения
Тригонометрические уравнения
Уравнения с параметром
Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции
Геометрические факты
координатный метод
геометрический смысл модуля
теорема косинусов
тригонометрическая подстановка
скалярное произведение векторов
Свойства прямоугольного треугольника
Синус, косинус и тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике

Мы предлагаем свой алгоритм решения алгебраических задач геометрическим способом:

- Построение геометрической модели задачи, т.е. перевод её на язык геометрии;
- Решение получившейся геометрической задачи;
- Перевод полученного ответа с геометрического языка на естественный.

Преимущества решения задач геометрическим способом:

- При решении задачи этим методом четко определяется начало действия;
- Графическая иллюстрация облегчает проведение анализа, составления уравнений, помогает найти несколько способов решения;
- Расширяется область использования графиков, повышается графическая культура учеников;
- Совершенствуется техника решения уравнений (разделений переменных);
- Реализуются внутрипредметные (алгебра и геометрия) и межпредметные (математика и физика) связи.

Выводы

- Мы рассмотрели различные задачи, подобрали для них геометрические способы решения, сравнили алгебраический и геометрический методы решения.
- Удобнее и нагляднее всего решать геометрическим методом тригонометрические задачи. Этот метод можно использовать в качестве проверки при решении задач.
- Рассмотренные геометрические методы подходят для решения конкурсных нестандартных и олимпиадных задач. Позволяют существенно упростить их решение, сделать его более понятным и наглядным.
- Применение геометрических методов позволяет развивать пространственное воображение, которое является основным для освоения материала в старших классах. Позволяет сократить время решения задач (применимо к тестам).

Литература:

- Куликова Л. В. , Литвинова С. А., За страницами учебника математики, М. - Глобус, 2008.
- Киселева Ю. С., Методическое пособие по теме: Использование геометрических методов при решении алгебраических задач.
- В.А. Филимонов, Геометрия помогает решить задачу – Математика в школе № 2-3, 1992
- Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др., Алгебра и начало анализа: Учеб. Для 10-11 кл. образоват. учреждений ,– 10-е изд., дораб. – М.: Просвящение, 2002. – 384с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!