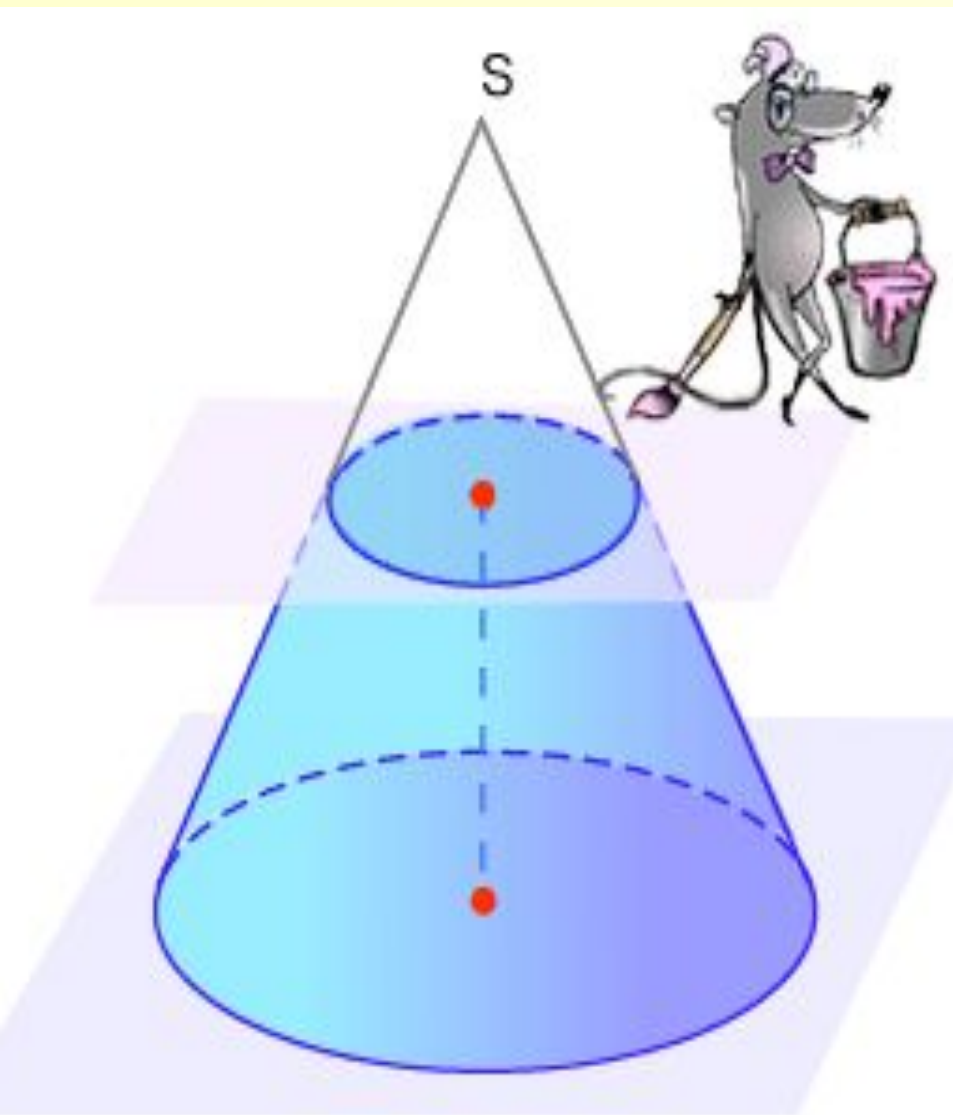
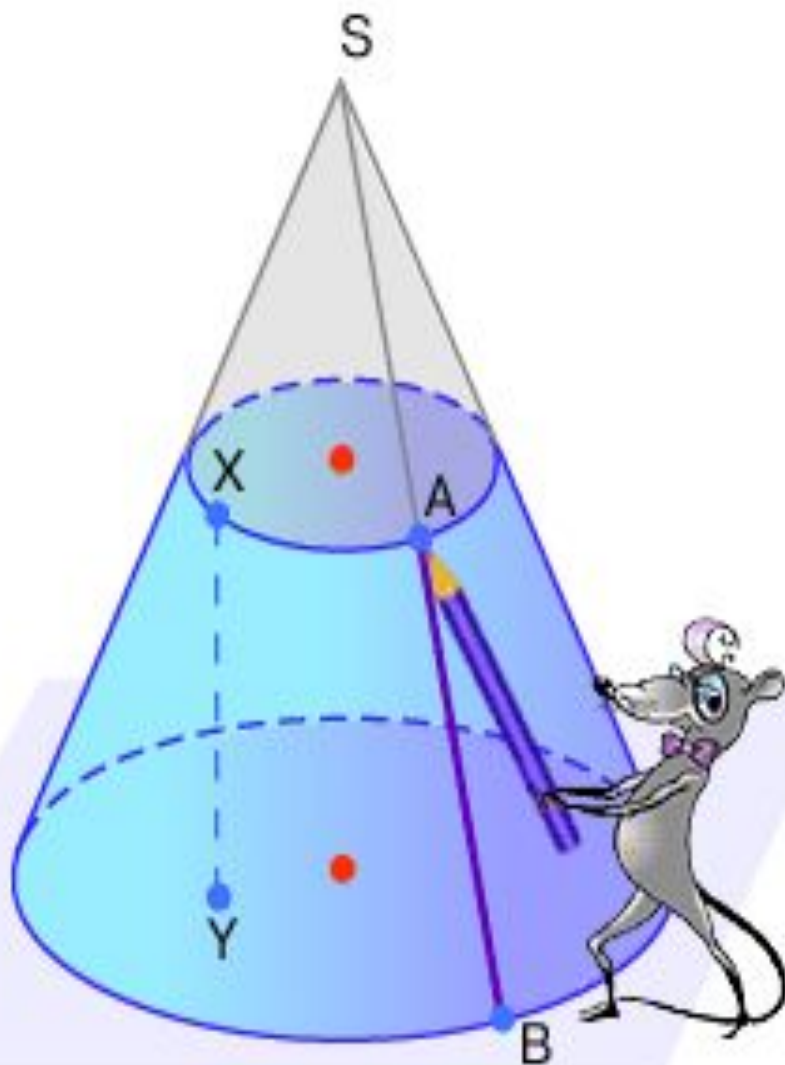


# Усеченный конус.





**Усеченным конусом** называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.

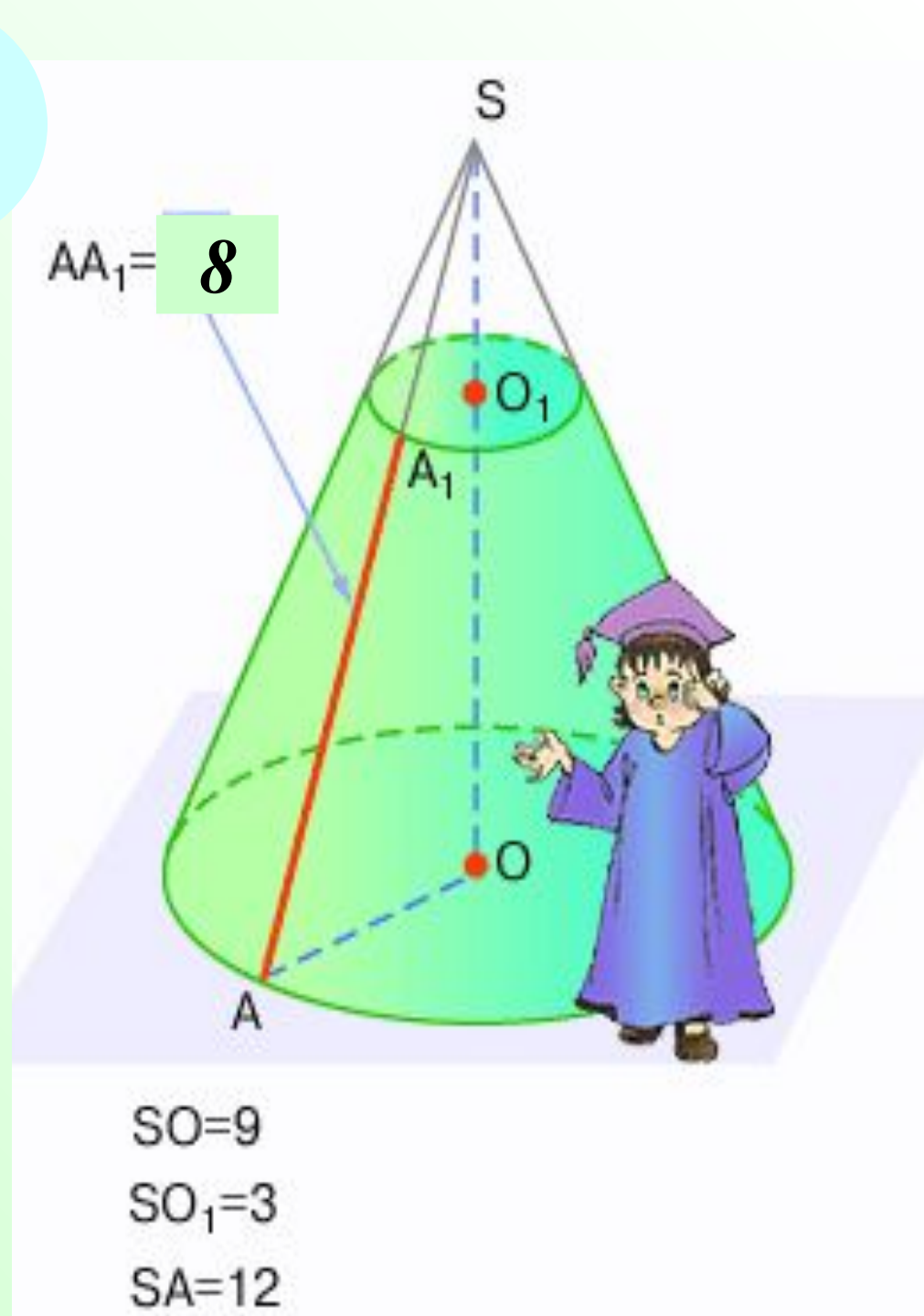


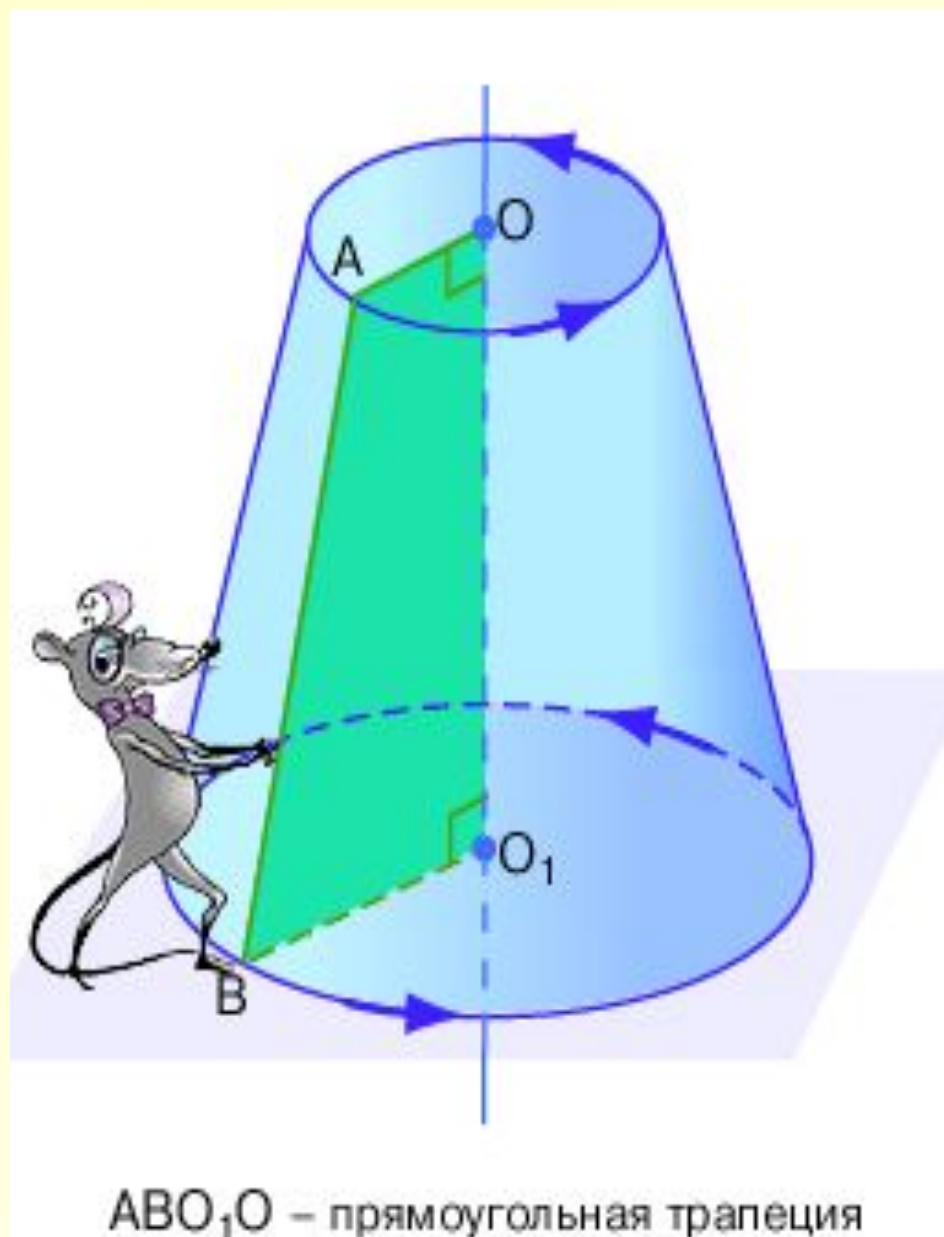
**Образующей** усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

**Высотой** усеченного конуса называется расстояние между основаниями.

?

Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?

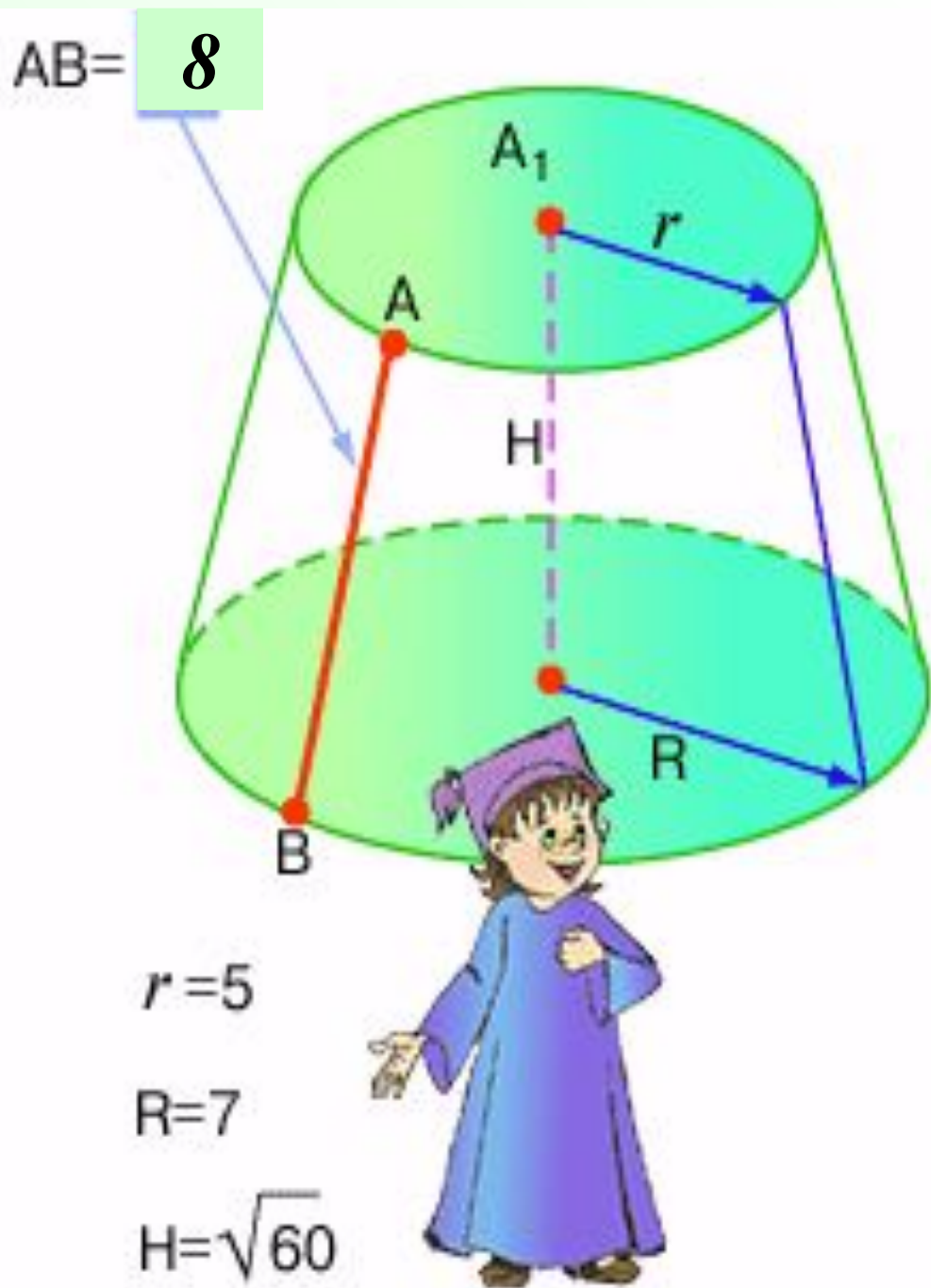


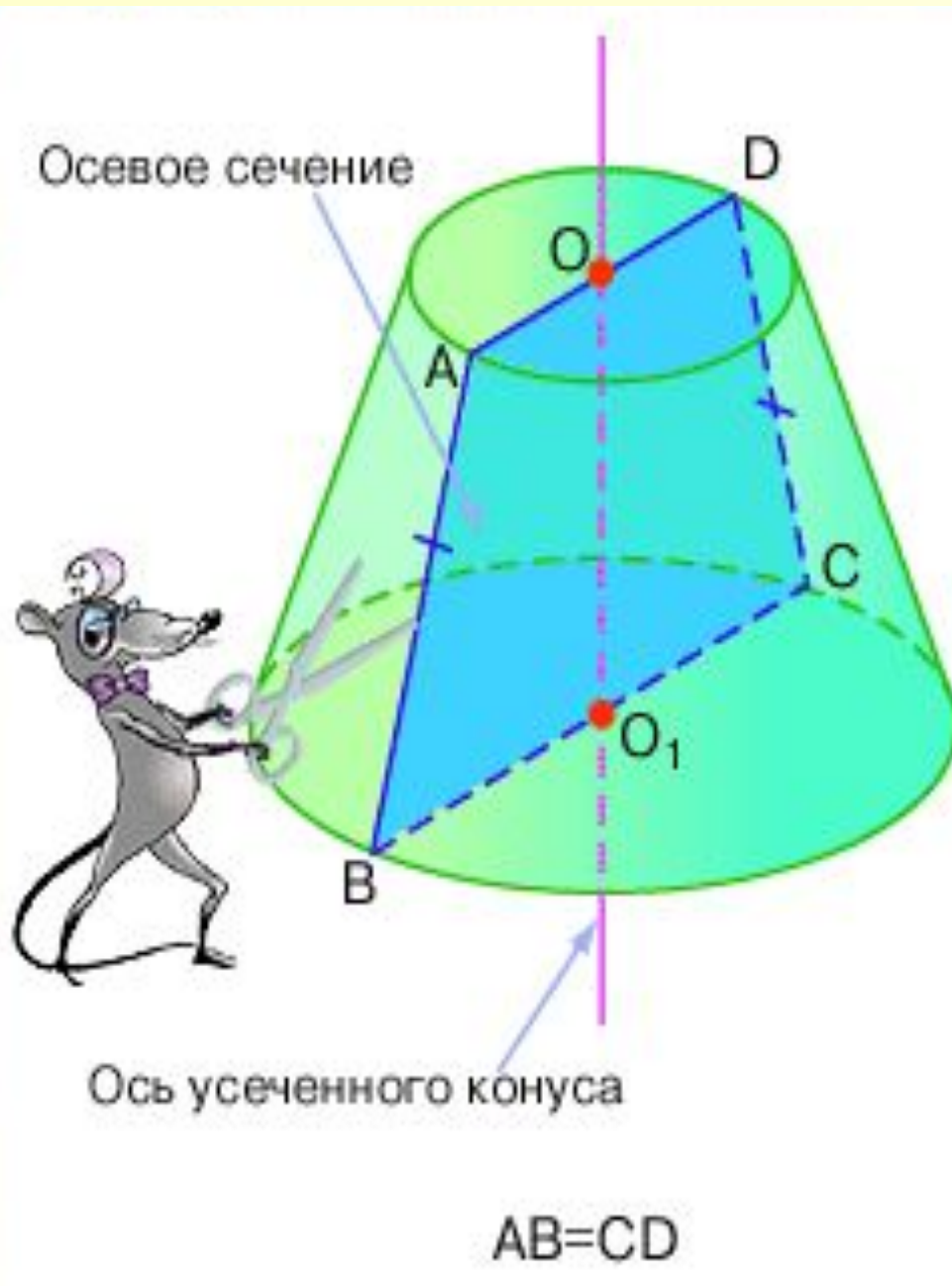


**Усеченный конус  
можно  
рассматривать как  
тело, полученное при  
вращении  
прямоугольной  
трапеции вокруг  
боковой стороны,  
перпендикулярной  
основанию.**

?

Пусть дан  
усеченный конус,  
радиусы оснований  
и высота которого  
известны. Найдите  
образующую  
усеченного конуса.

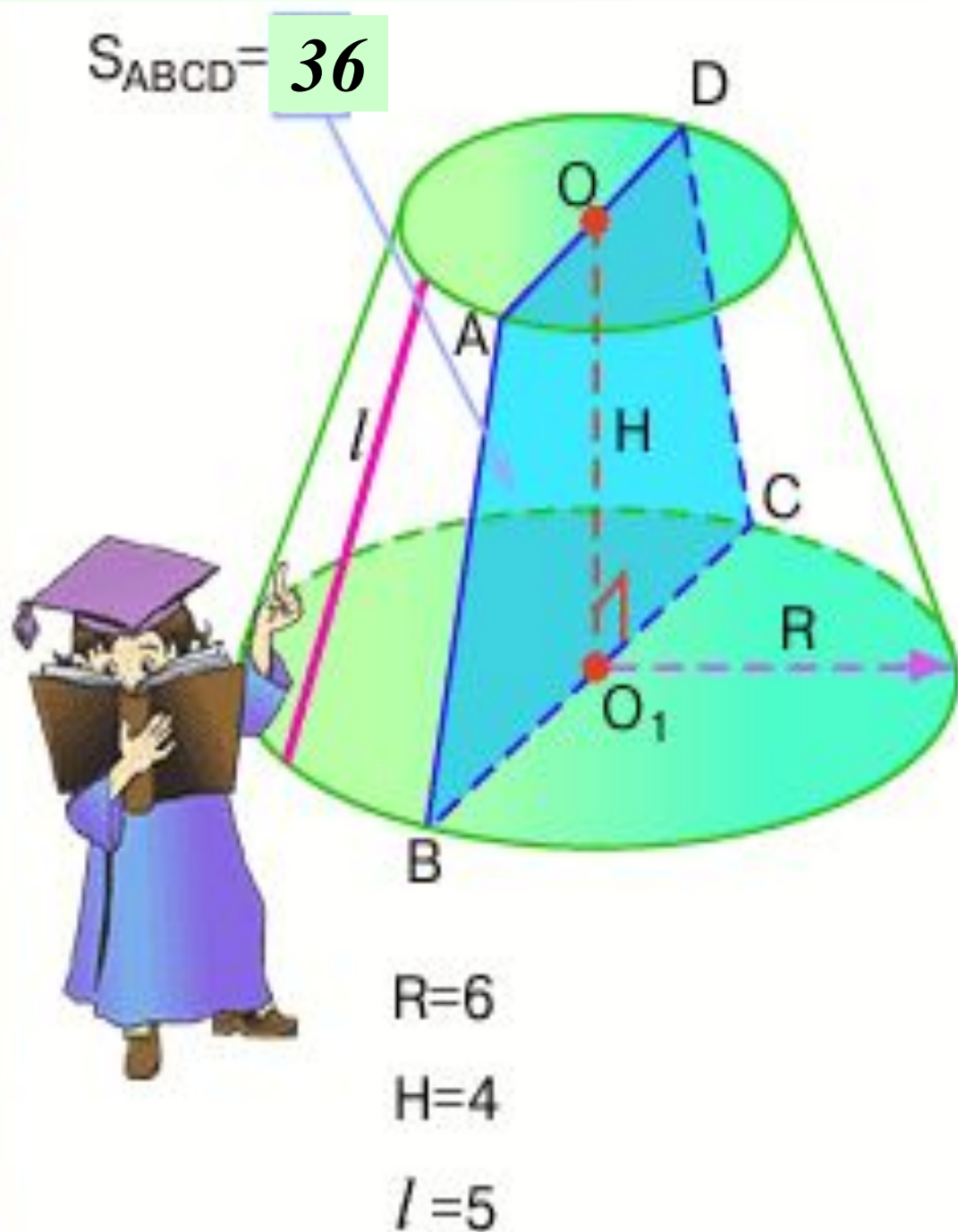




Прямая,  
соединяющая  
центры оснований,  
называется **осью**  
усеченного конуса.  
Сечение, проходящее  
через ось,  
называется **осевым**.  
Осевое сечение  
является  
равнобедренной  
трапецией.

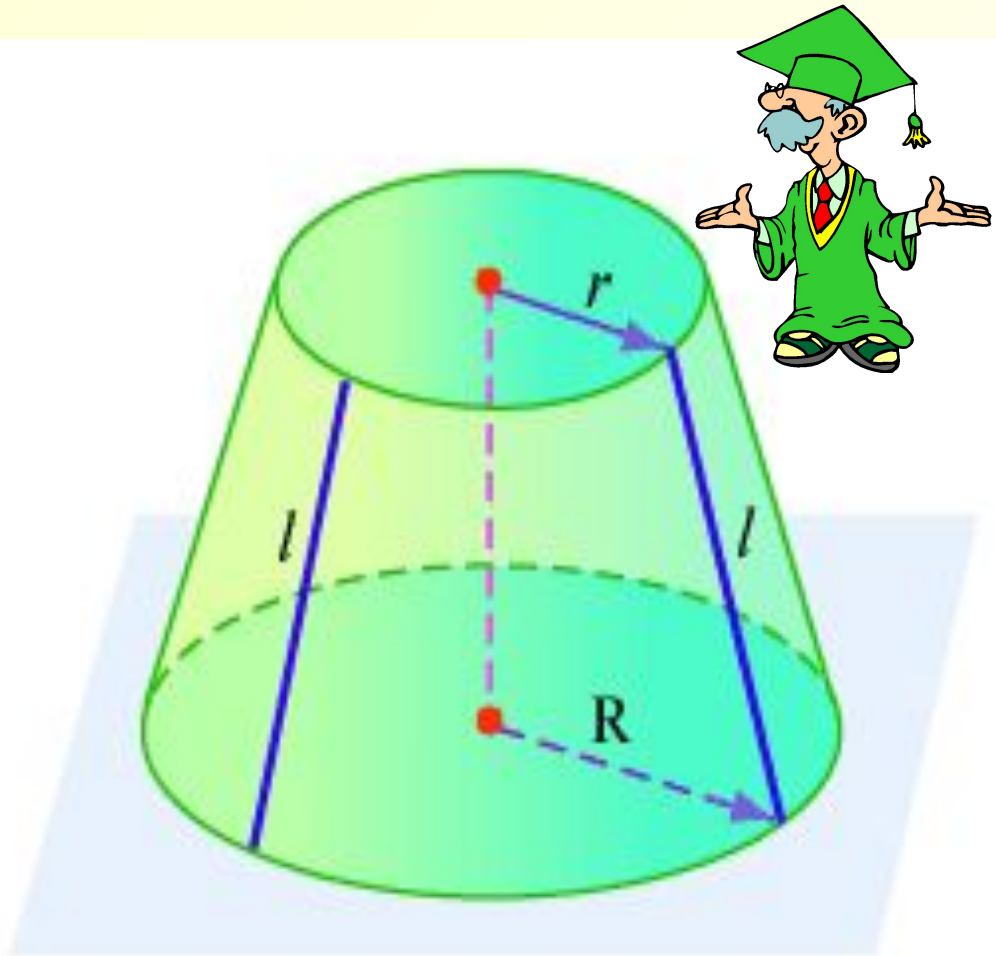
?

Найдите площадь  
осевого сечения,  
если известны  
радиус нижнего  
основания, высота  
и образующая.



# Боковая поверхность усеченного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.

Площадь боковой  
поверхности усеченного  
конуса равна  
произведению  
полусуммы длин  
окружностей оснований  
на образующую.



Дано:

$r$  – радиус меньшего основания

$R$  – радиус большего основания

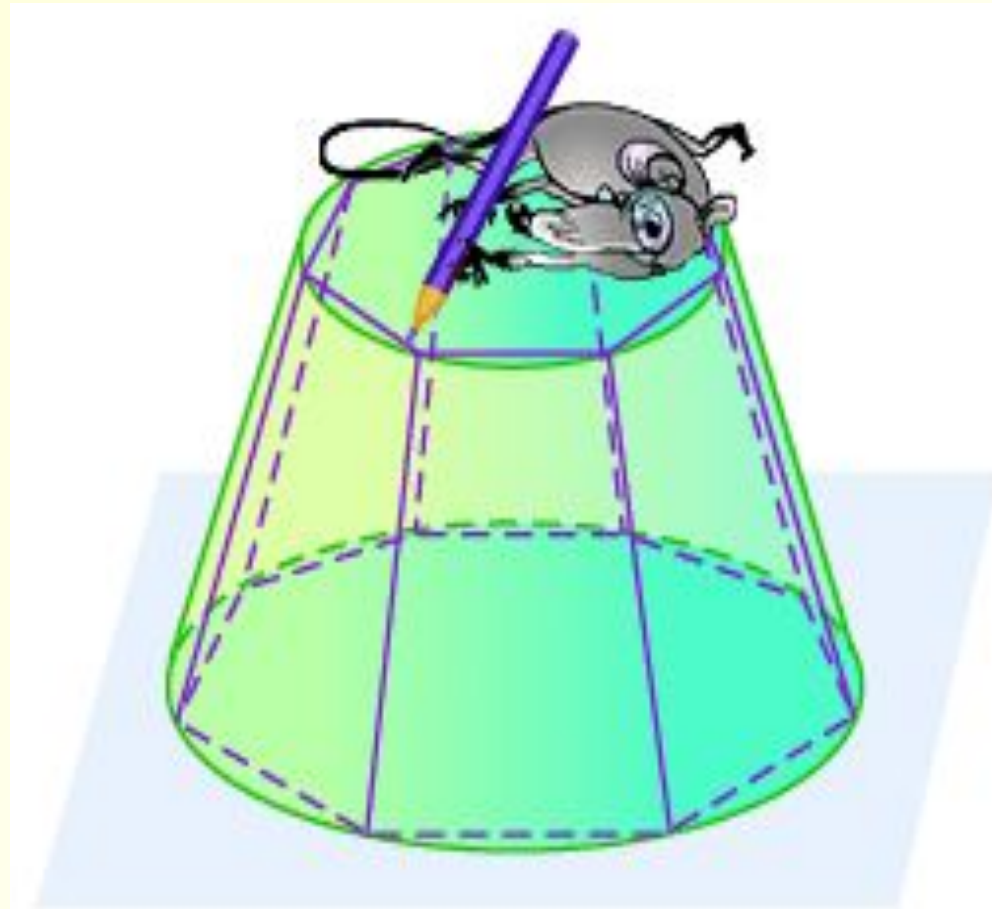
$l$  – образующая

Докажем:

$$S_{\text{бок}} = \pi(R + r) \cdot l$$

## *Доказательство:*

**Боковую поверхность усеченного конуса будем понимать как предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.**



$S_{\text{бок. пирамиды}}$



$S_{\text{бок. конуса}}$

## Доказательство:

Впишем в конус  
правильную пирамиду.  
Ее боковая  
поверхность состоит из  
трапеций.

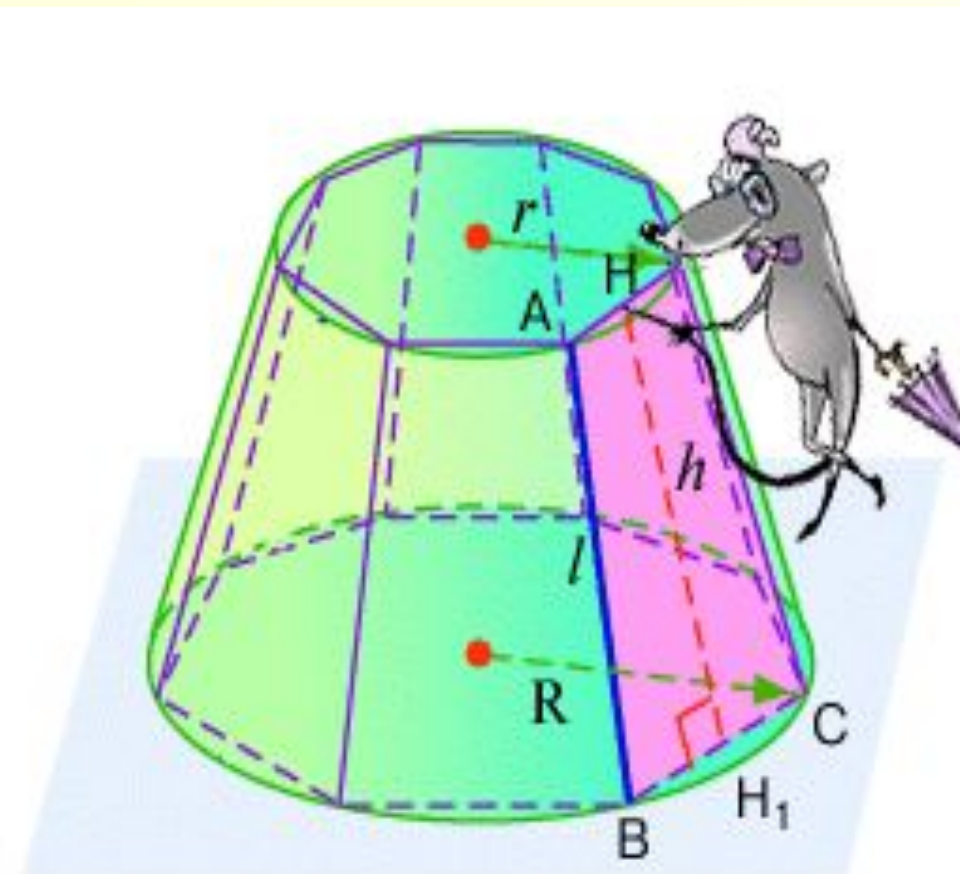
$$S_{\text{бок.пир}} = \frac{(p + P)}{2} h$$

$$S_{\text{бок.пир}} \rightarrow S_{\text{бок.кон}}$$

$$p \rightarrow c \quad P \rightarrow C \quad h \rightarrow l$$

$$c = 2\pi r \quad C = 2\pi R$$

$$\frac{2\pi(R + r)}{2} l = \underline{\pi(R + r)l}$$

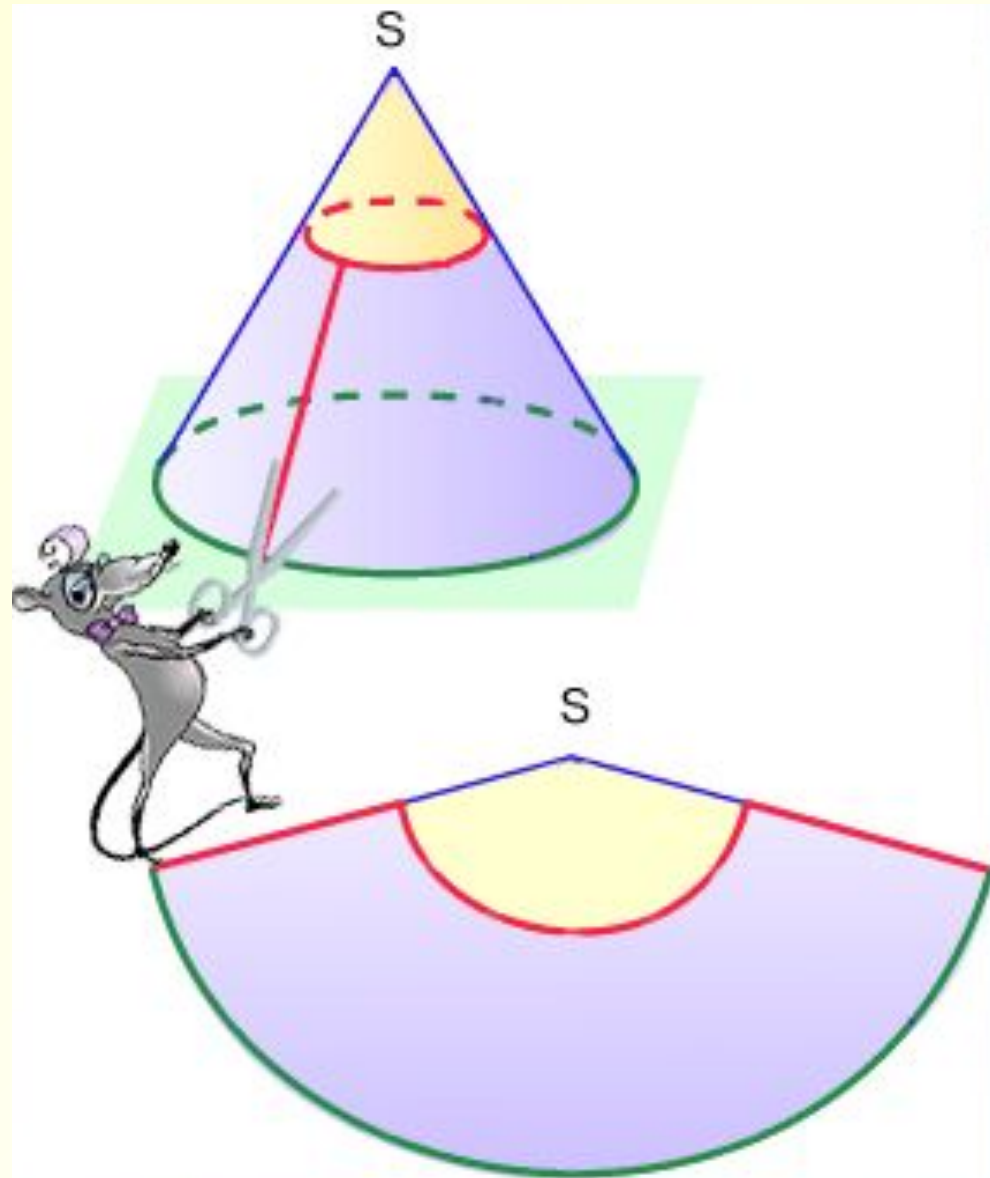


$p$  – периметр меньшего основания

$P$  – периметр большего основания

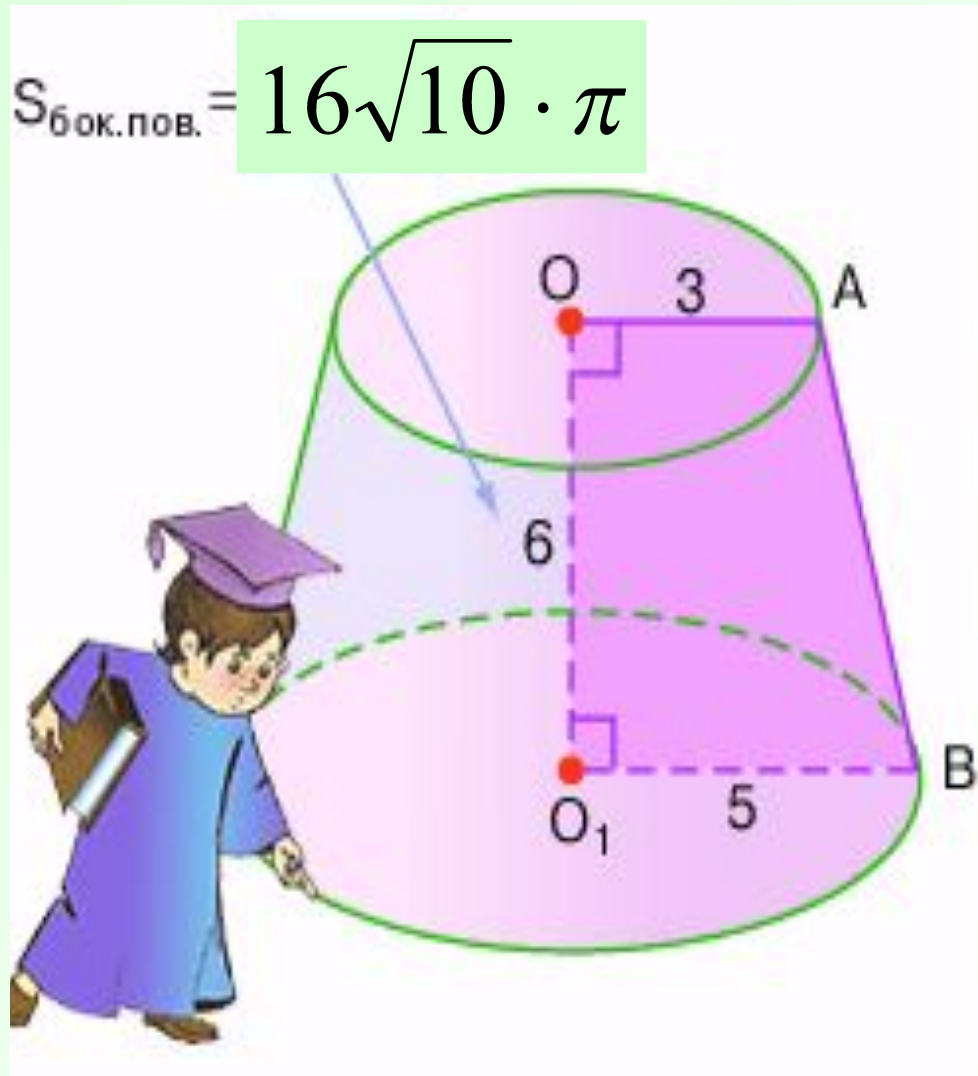
## *Замечание:*

**Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно рассматривать как разность между площадями боковых поверхностей двух конусов. Поэтому развертка усеченного конуса – это часть круглого кольца.**



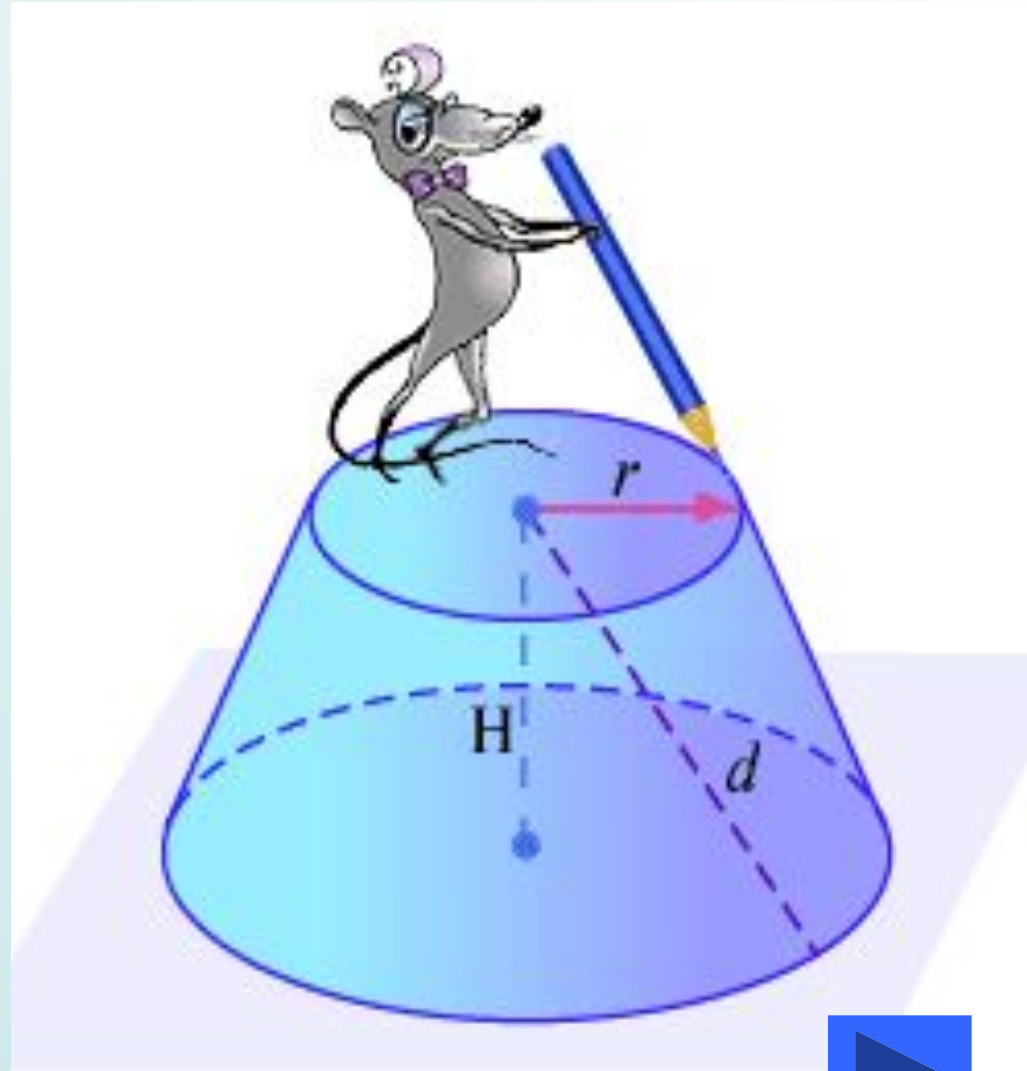
?

**Усеченный конус  
получен от вращения  
прямоугольной  
трапеции вокруг  
боковой стороны,  
перпендикулярной  
основаниям, Найдите  
площадь боковой  
поверхности усеченного  
конуса, если известны  
основания и боковая  
сторона трапеции.**



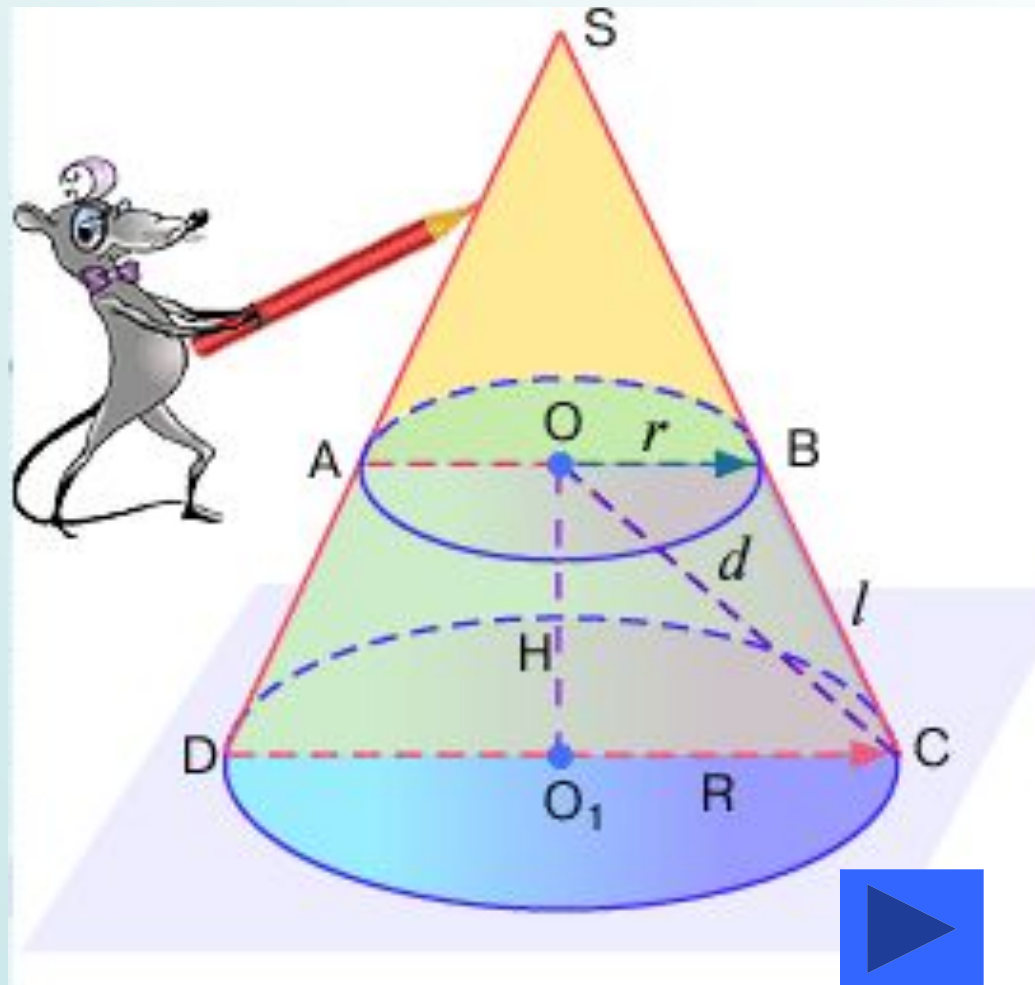
# Задача.

- Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 5, высота равна 6, а расстояние от центра меньшего основания до окружности большего основания равно 10. Найдите площадь боковых поверхностей усеченного и полного конусов.



# Решение:

Достроим  
усеченный конус до  
полного и проведем  
осевое сечение.

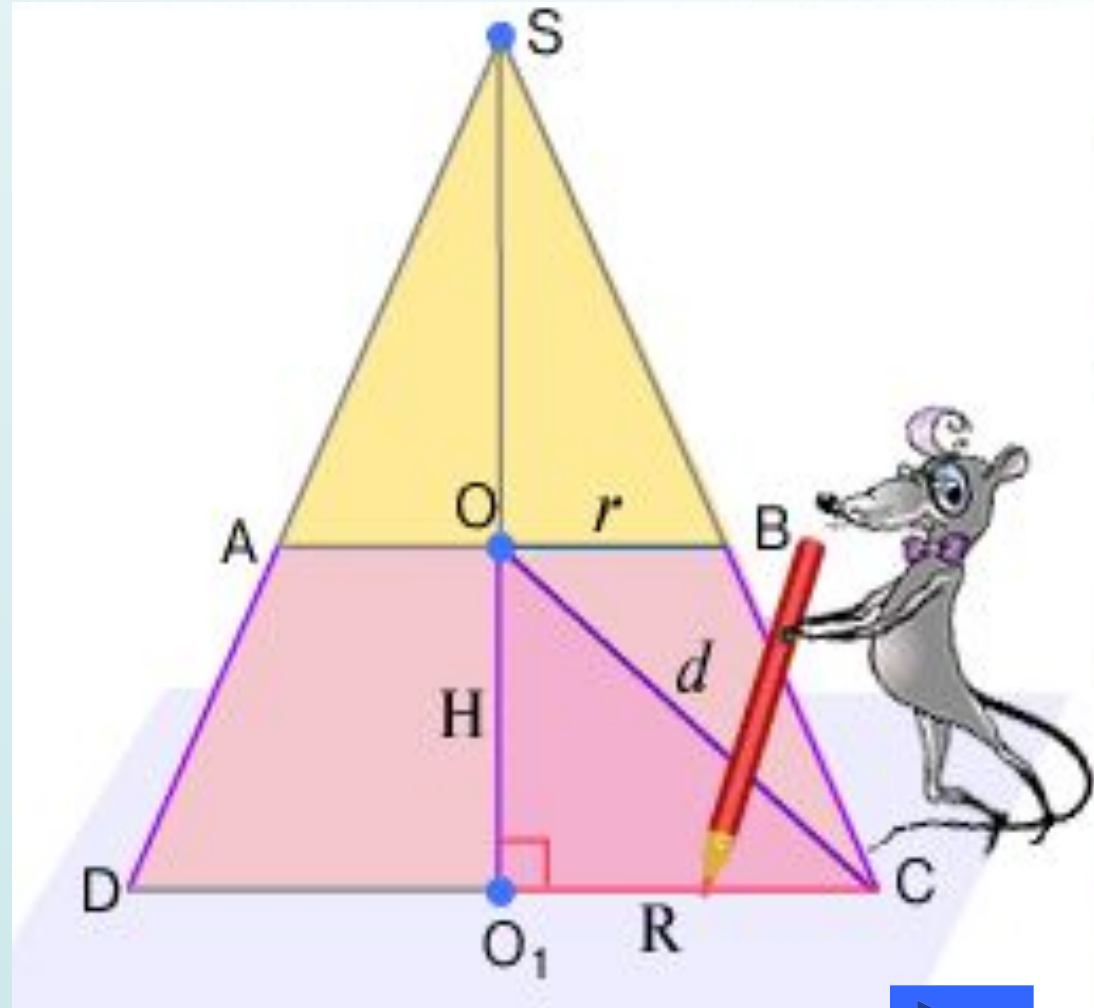


## Решение:

*1) Вычислим радиус большего основания.*

$\triangle OO_1C$ :

$$d^2 = H^2 + R^2$$



$$R = \sqrt{d^2 - H^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$



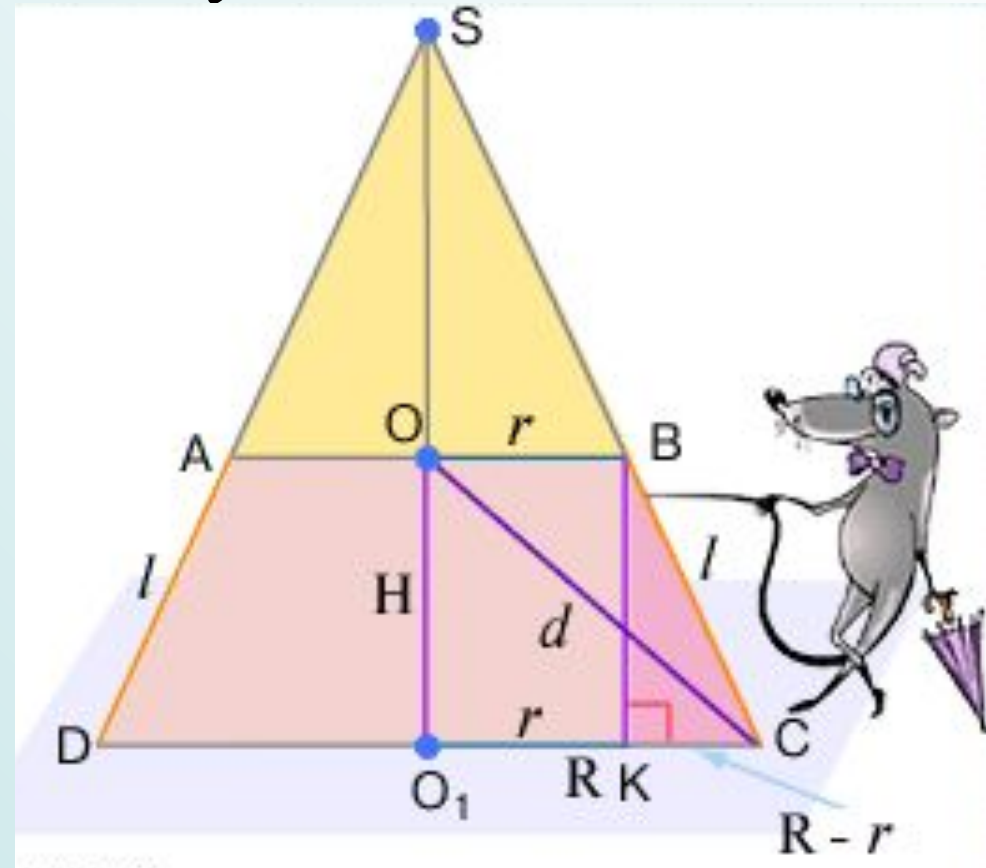
## Решение:

2) Найдем боковую сторону трапеции – образующую усеченного конуса.

$\triangle BKC$  :

$$CK = R - r = 3$$

$$BC^2 = BK^2 + CK^2$$



$$l = \sqrt{H^2 + CK^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$



## Решение:

**3) Используя подобие треугольников, найдем образующую полного конуса.**

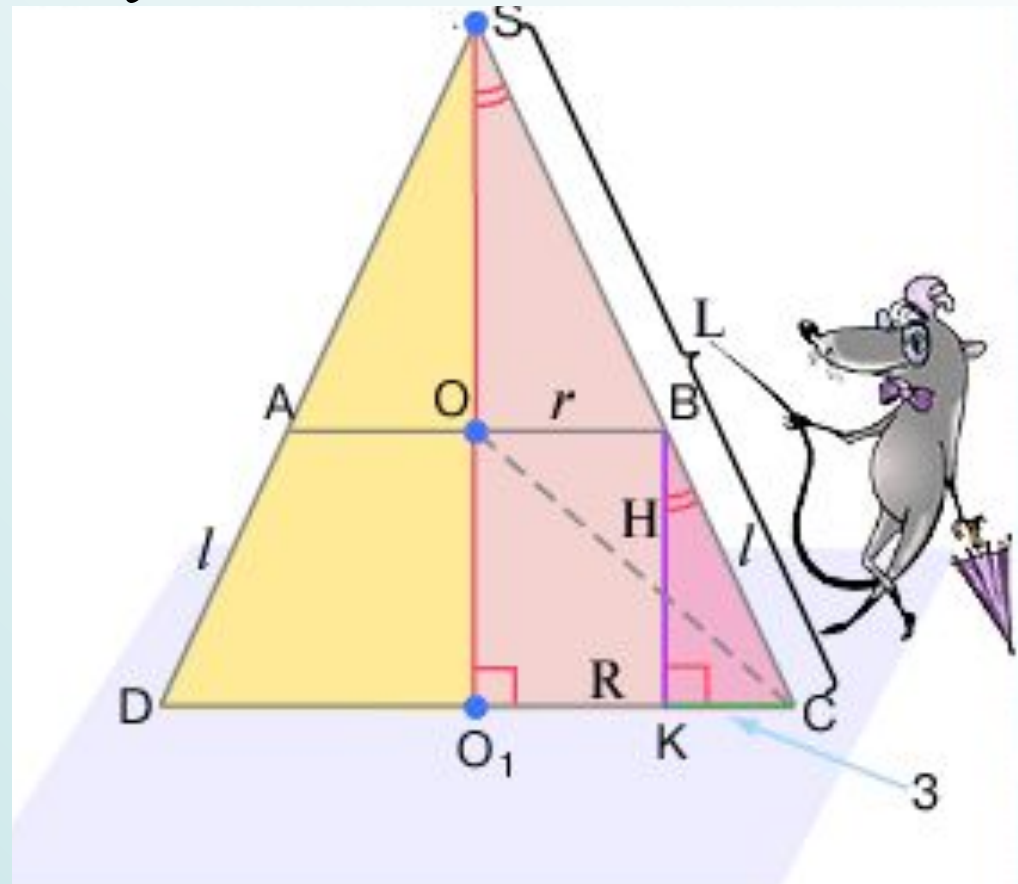
$$SC = L$$

$$\Delta SO_1 C \sim \Delta BKC$$

$$\frac{SC}{BC} = \frac{O_1C}{KC}$$

$$\frac{L}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{3}$$

$$L = 8\sqrt{5}$$



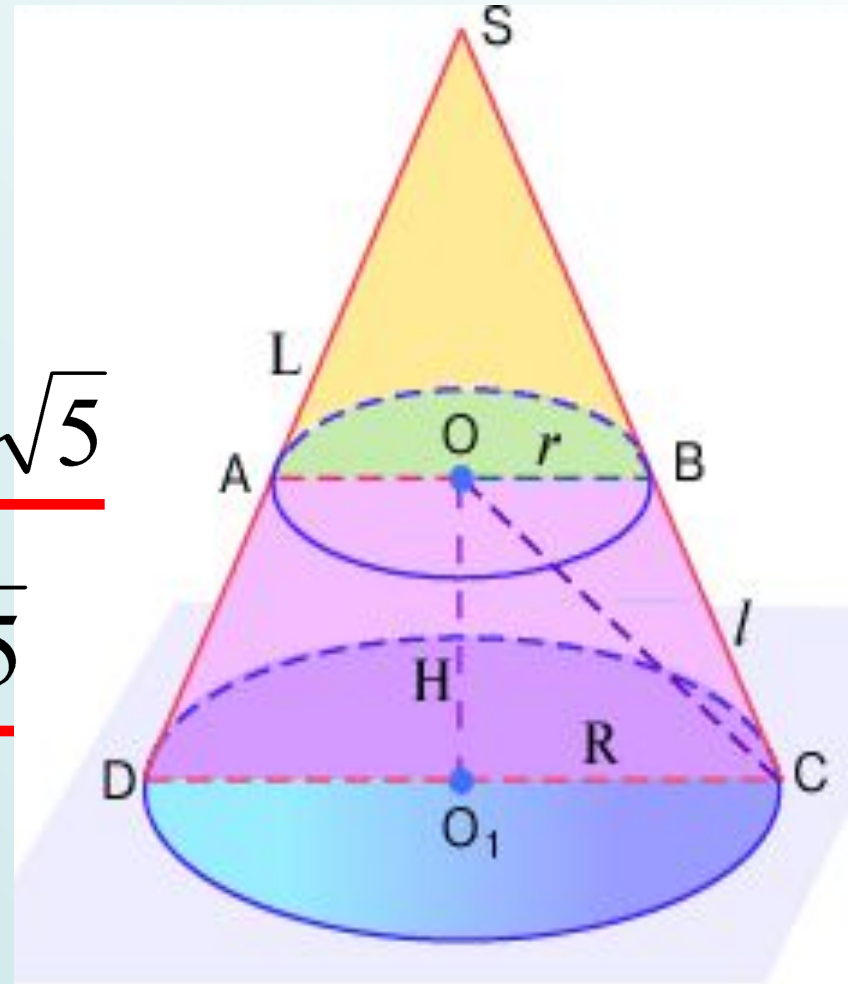
## Решение:

*4) Подставим найденные значения в формулы для площадей боковой поверхности полного и усеченного конусов.*

$$L = 8\sqrt{5} \quad l = 3\sqrt{5}$$

$$S_{\text{усеч}} = \pi(R + r) \cdot l = \underline{\pi \cdot 39\sqrt{5}}$$

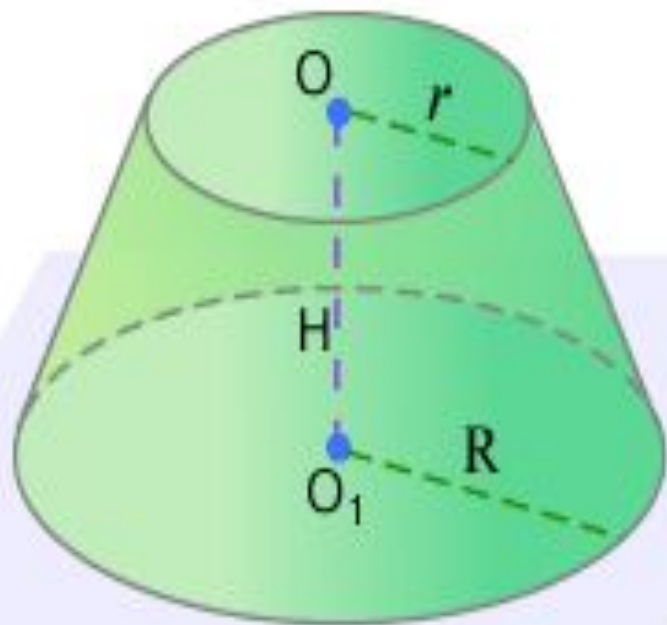
$$S_{\text{полн}} = \pi(RL) = \underline{\pi \cdot 64\sqrt{5}}$$



# Формула объема усеченного конуса.

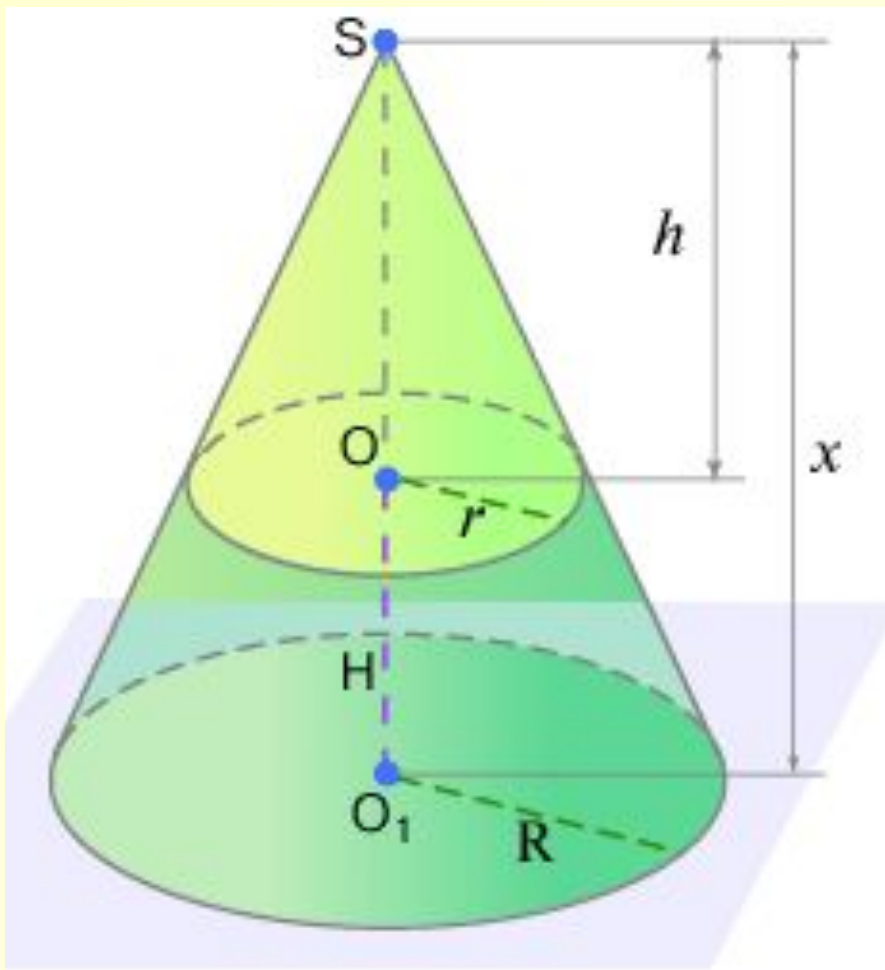


- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.



$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

## Доказательство:

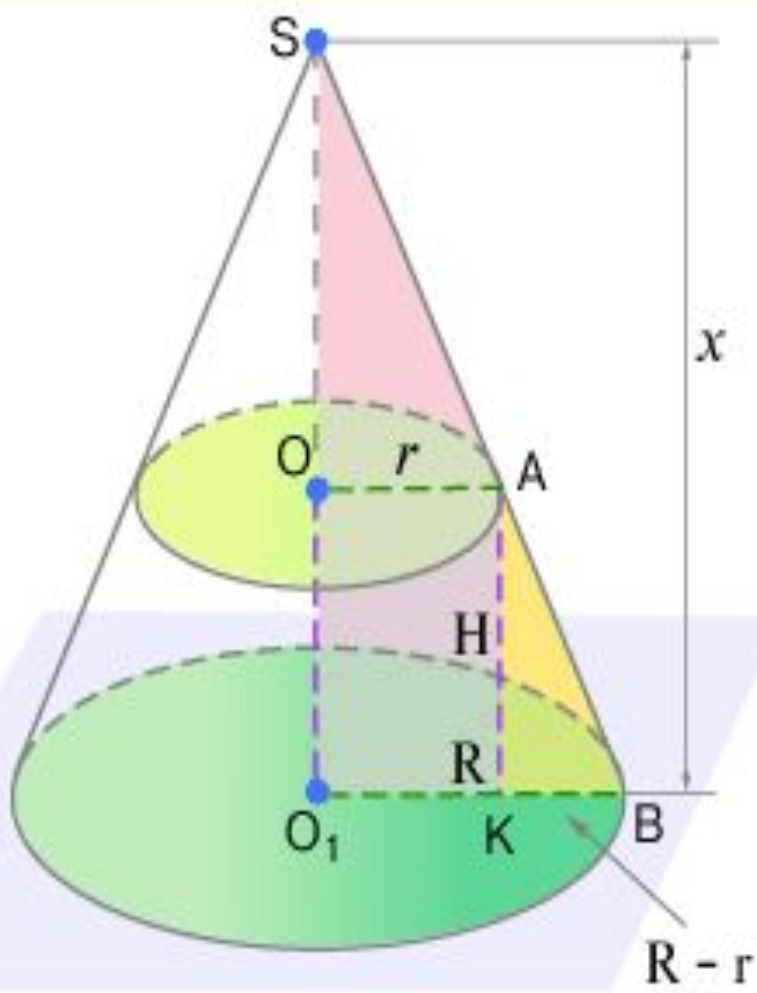


*Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.*

$$V_{\text{усеч.кон}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 x - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

## Доказательство:

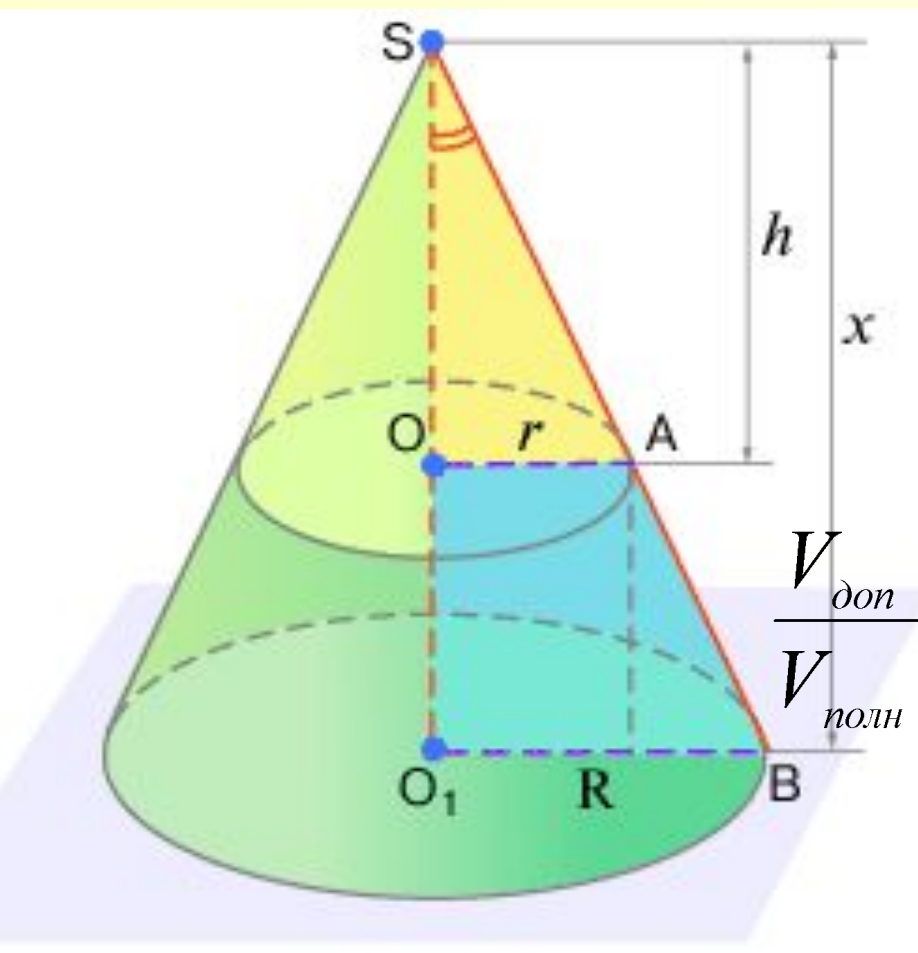
*Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.*



$$\triangle SO_1B \sim \triangle AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R - r}$$
$$x = H \frac{R}{R - r}$$

## Доказательство:



$$\triangle SOA \sim \triangle SO_1B$$

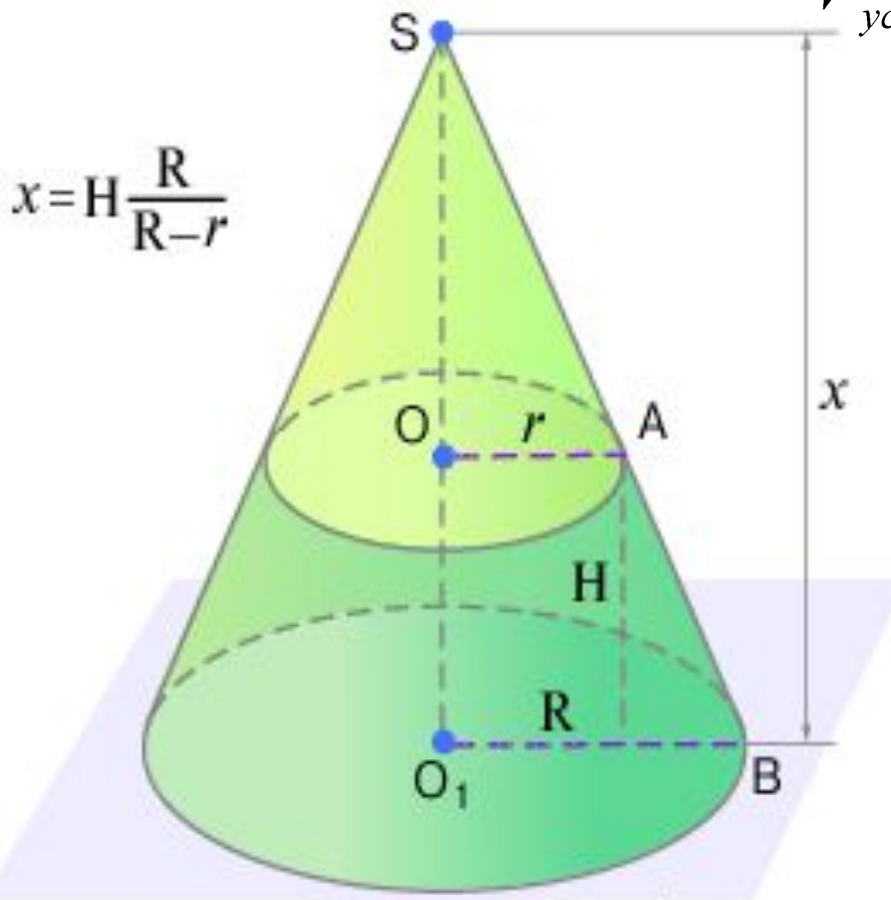
$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_{\text{дон}}}{V_{\text{полн}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

**Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.**

## Доказательство:

*Вычтем из объема большого конуса объем  
малого конуса.*



$$V_{\text{усеч}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = V_{\text{полн}} - \frac{r^3}{R^3} V_{\text{полн}} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 x \left( 1 - \frac{r^3}{R^3} \right) =$$

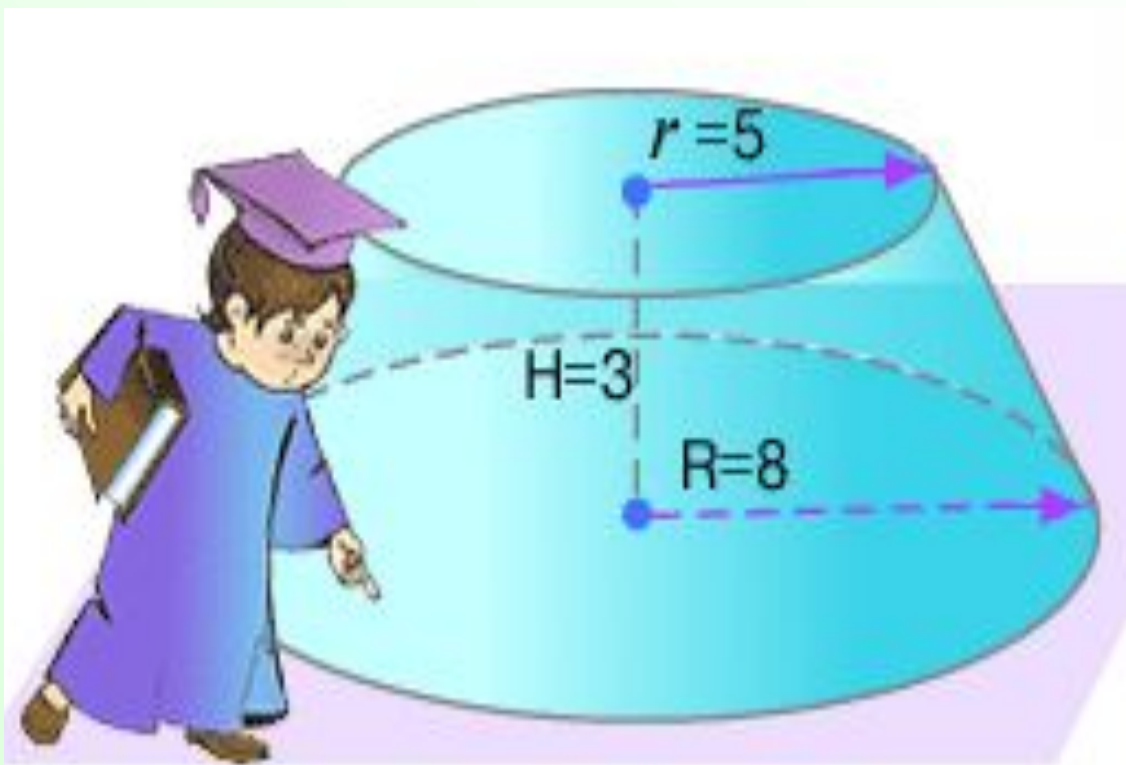
$$= \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 H R}{R-r} \left( \frac{R^3 - r^3}{R^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi H \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{R-r} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$$

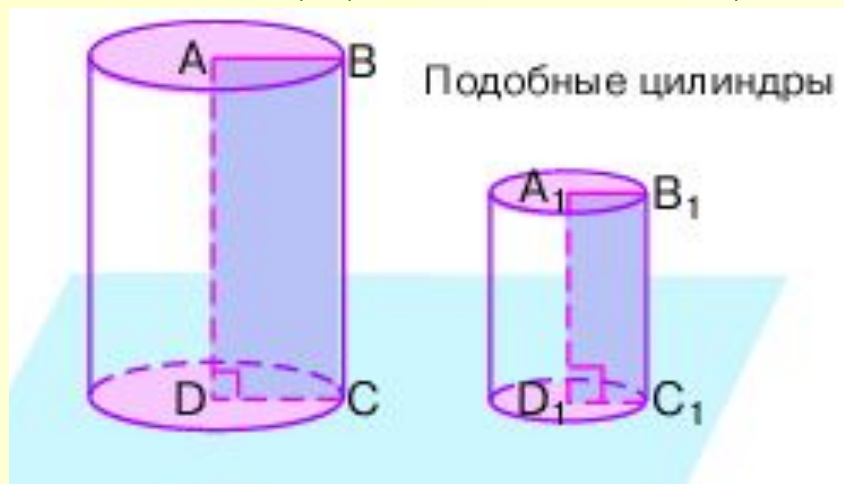
?

**Найдите объем  
усеченного  
конуса, если  
известны его  
высота и радиусы  
оснований.**

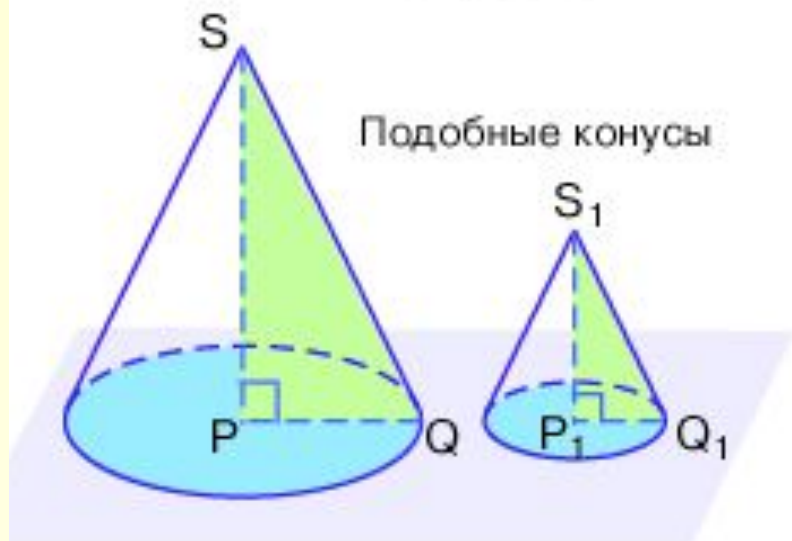


$$V_{\text{усеч.}} = 149\pi$$

# Подобные цилиндры и конусы.



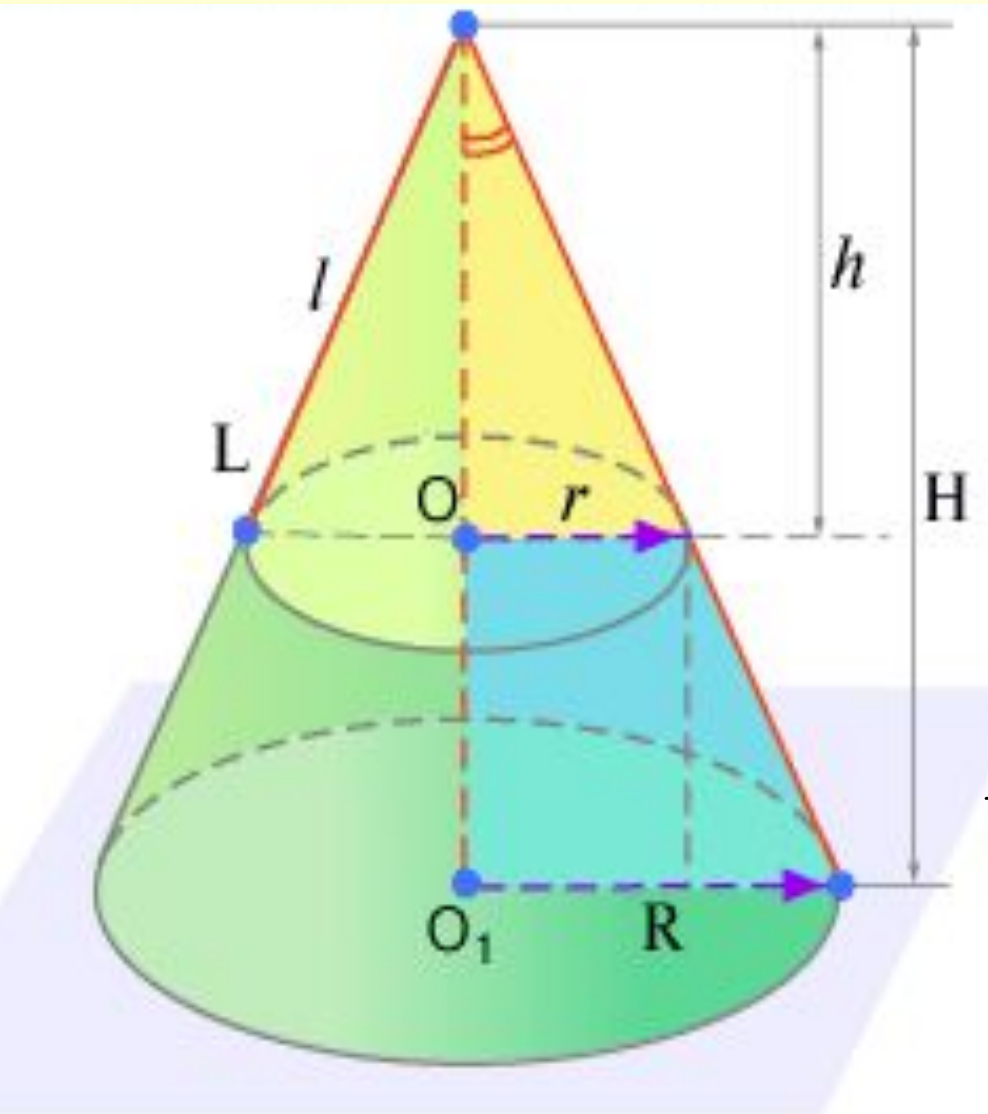
$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$$



$$\triangle SPQ \sim \triangle S_1P_1Q_1$$

- Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.

**Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.**



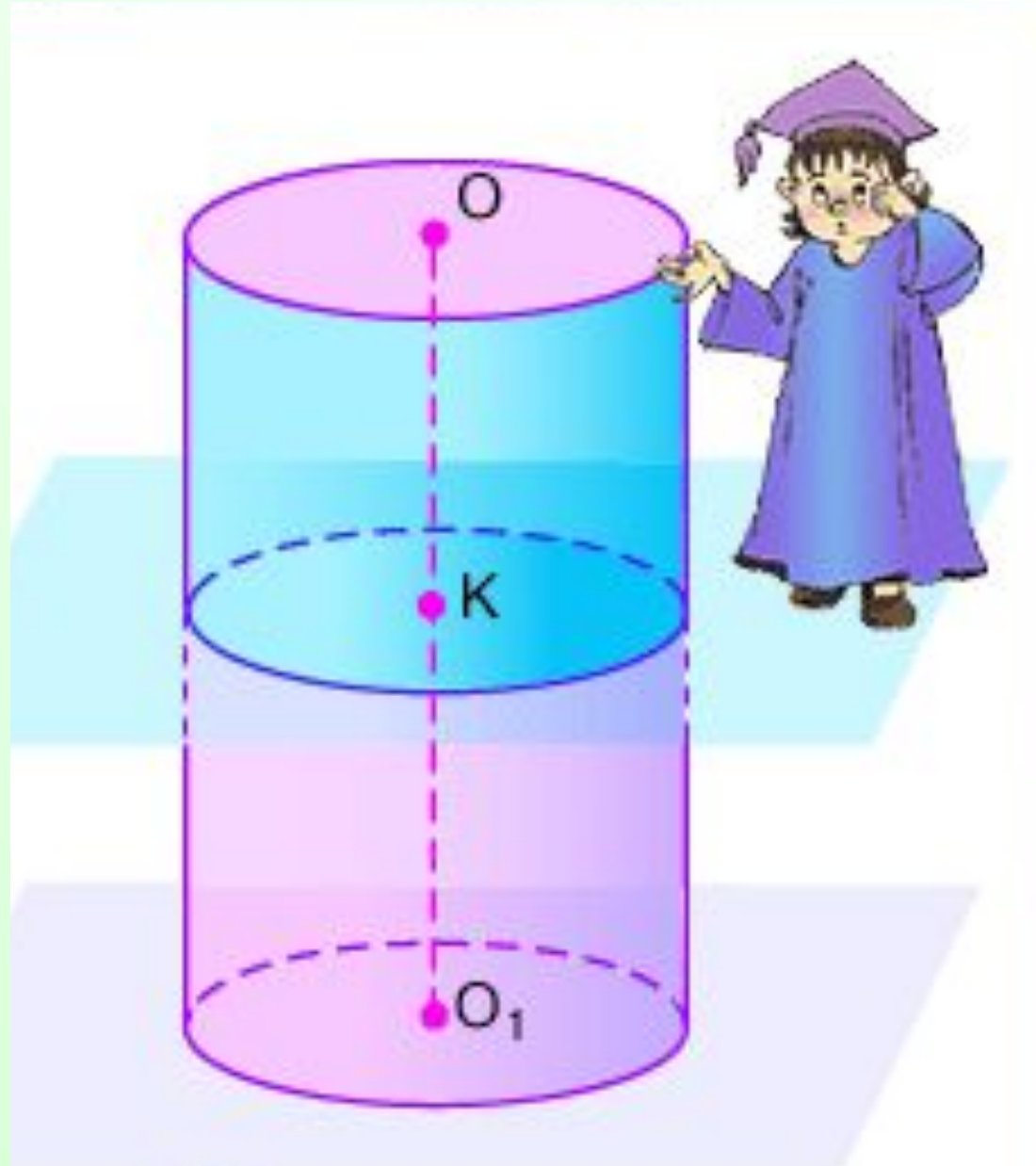
$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$

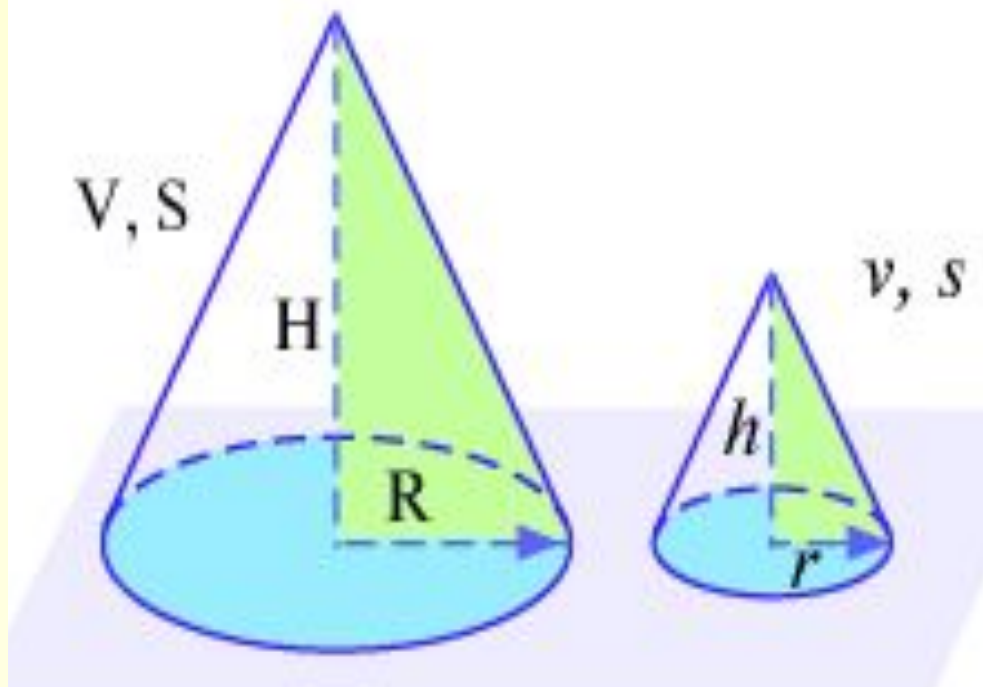
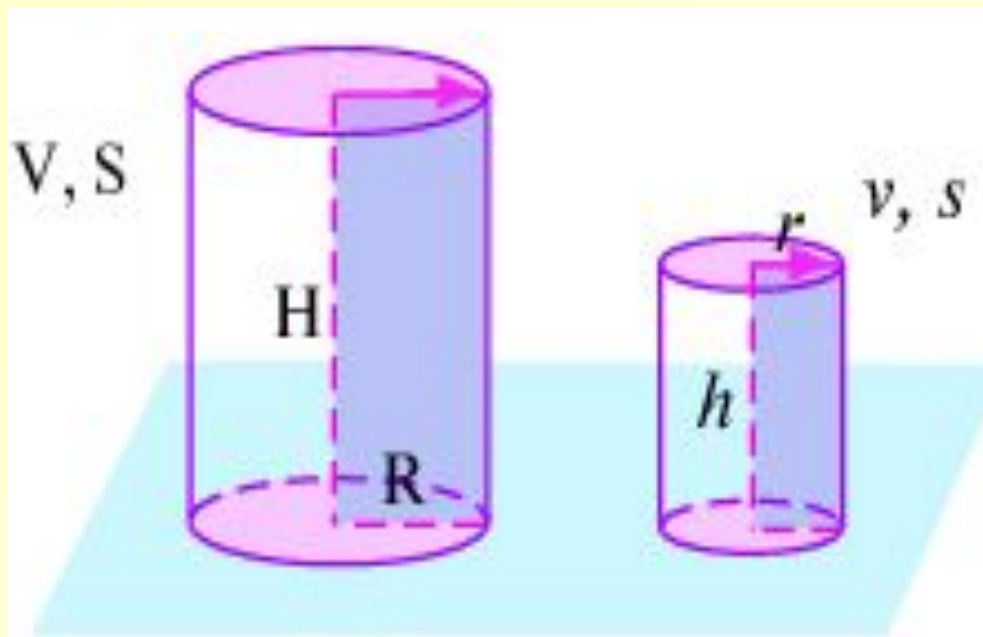
$$\frac{V_{\text{дон.}}}{V_{\text{полн.}}} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{\text{бок.дон}}}{S_{\text{бок.полн}}} = \frac{2\pi r l}{2\pi R L} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$



**В цилиндре  
проведено сечение,  
параллельное  
основанию. Будет ли  
малый цилиндр,  
который отсекается  
этим сечением,  
подобен большому?**





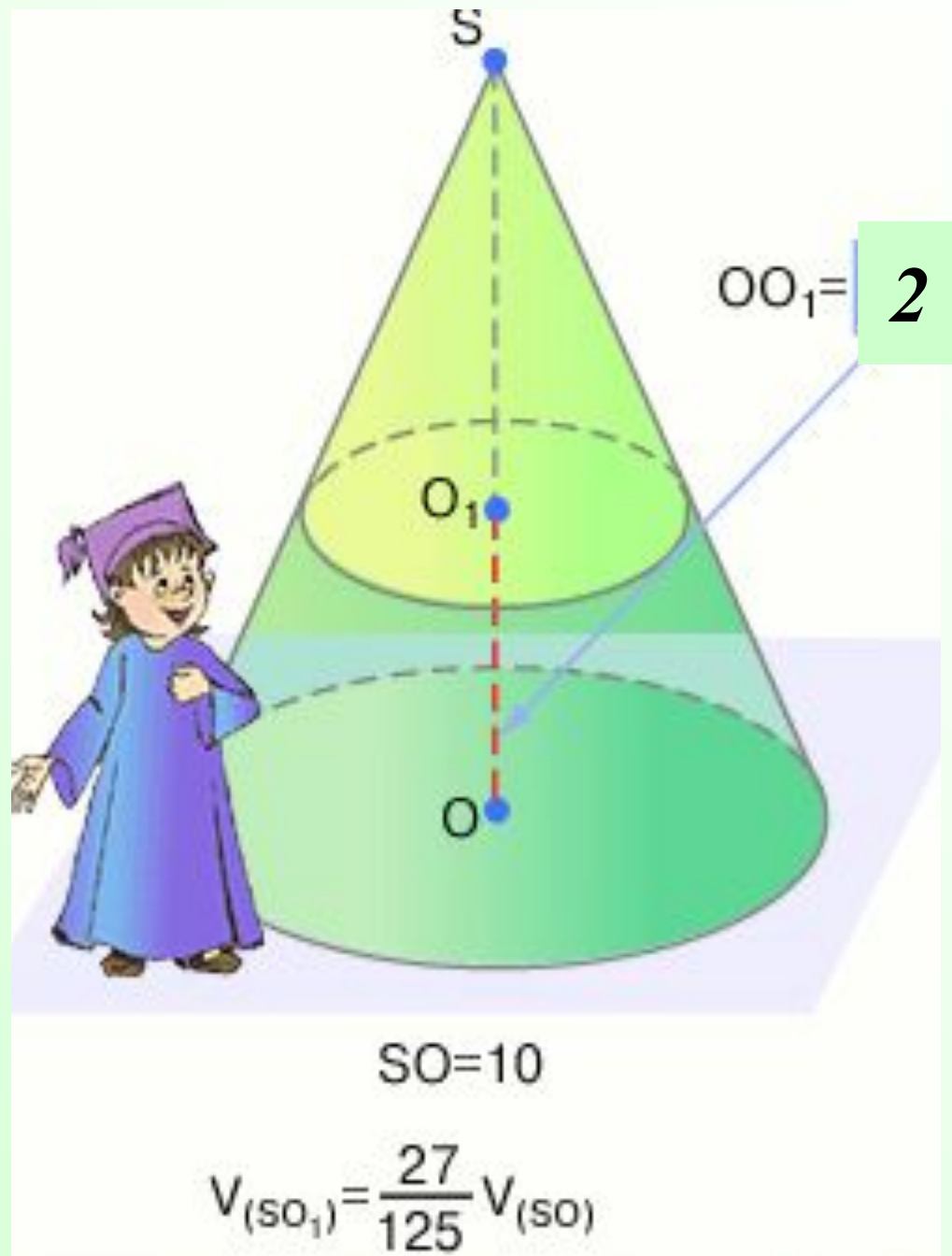
**Площади боковых  
поверхностей  
подобных цилиндров  
и конусов относятся  
как квадраты  
радиусов или высот,  
а объемы – как кубы  
радиусов или высот.**

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

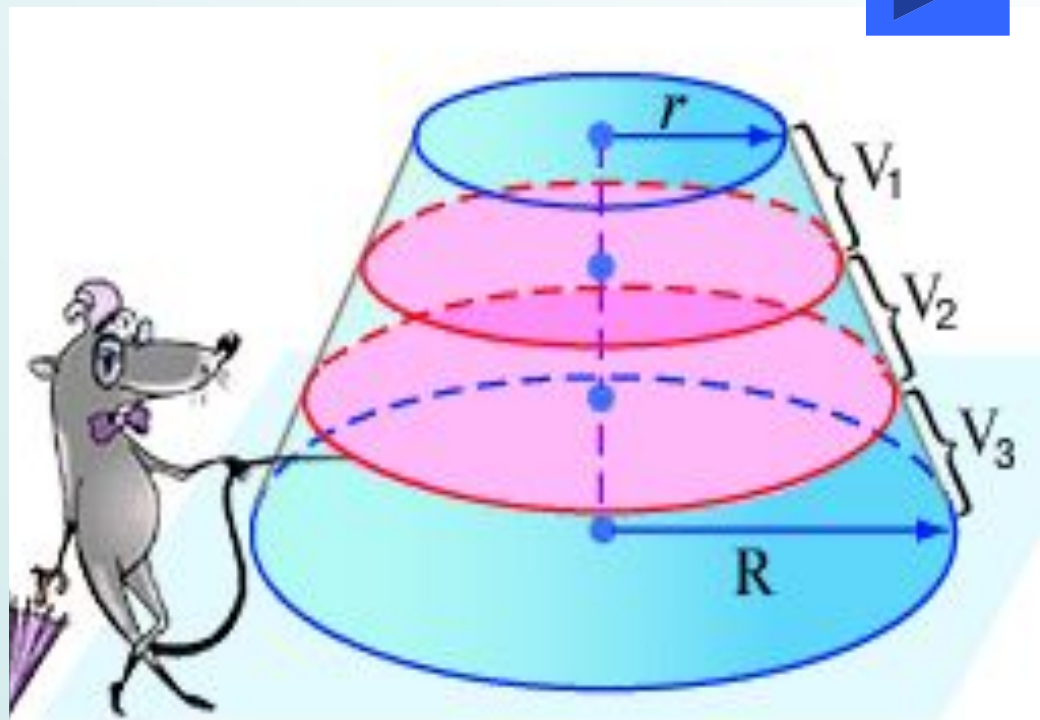
?

**В конусе, высота которого известна, проведено сечение, параллельное основанию. Известно также соотношение объемов малого и большого конусов. На каком расстоянии от основания находится сечение?**



Радиусы оснований  
усеченного конуса  
относятся как 2:3.  
Высота конуса  
разделена на три  
равные части, и  
через точки  
деления проведены  
плоскости,  
параллельные  
основаниям.  
Найти, в каком  
отношении  
разделился объем  
усеченного конуса.

Задача.



Дано:  $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

Н разделена на 3 части

$V_1, V_2, V_3$  – объемы слоев

Найти:  $V_1 : V_2 : V_3$

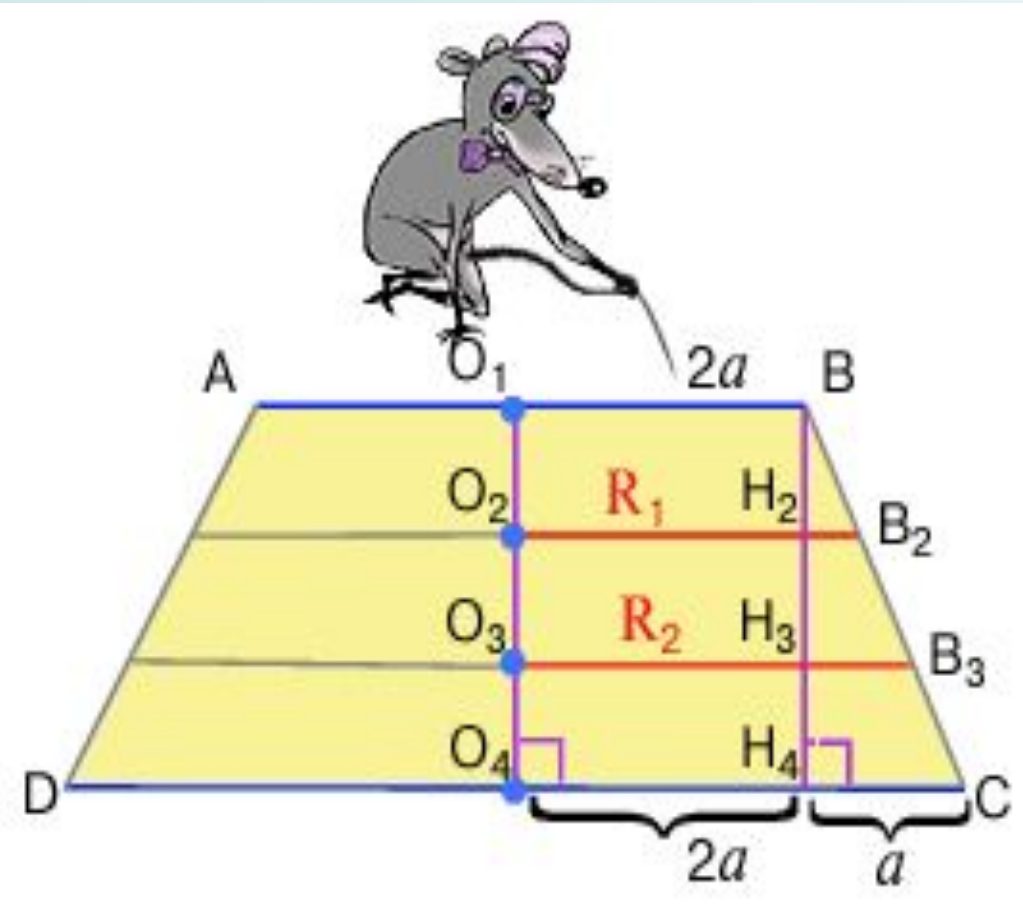
## Решение:

Зная, что радиусы оснований конуса относятся как два к трем, обозначим радиусы как  $2a$  и  $3a$  и рассмотрим осевое сечение конуса.



## Решение:

1) Используя подобие, найдем радиусы проведенных сечений.



$$CH_4 = 3a - 2a = a$$

$$H_2B_2 = \frac{1}{3}CH_4 = \frac{a}{3}$$

$$H_3B_3 = \frac{2}{3}CH_4 = \frac{2a}{3}$$

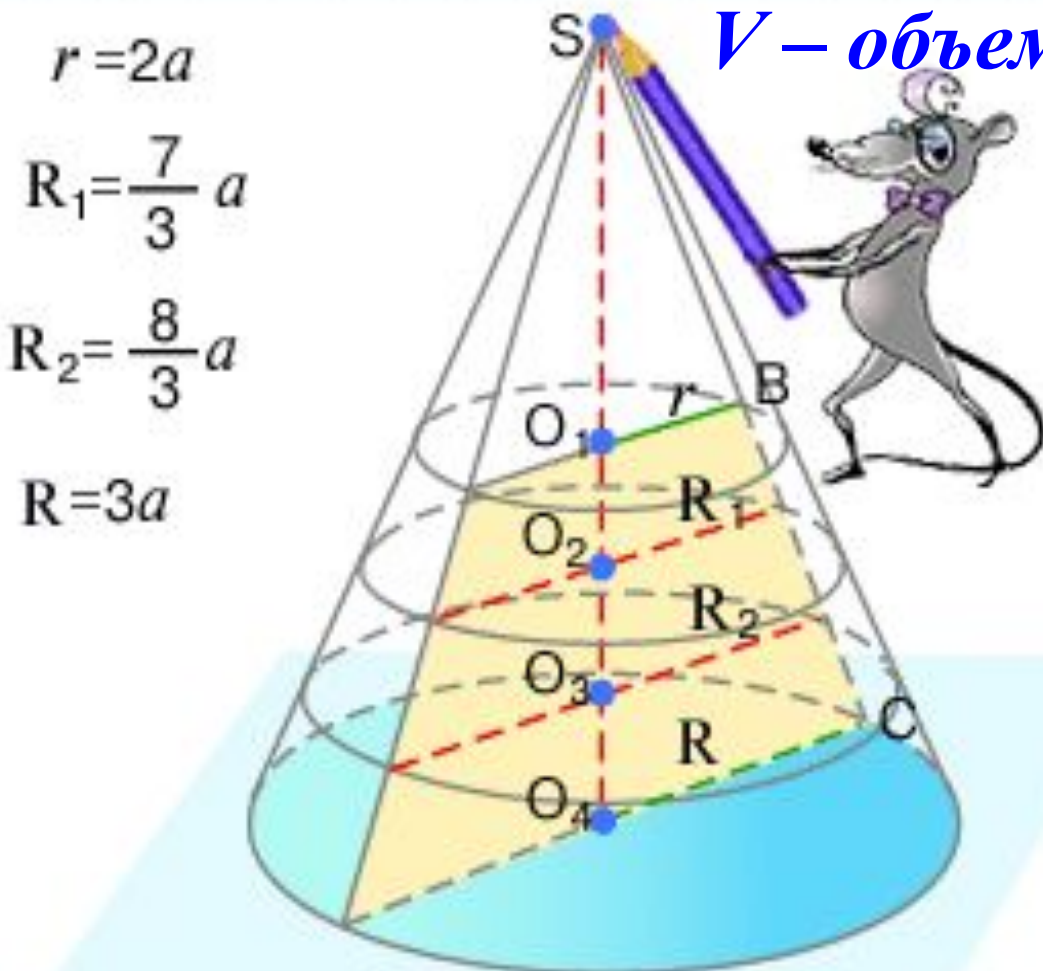
$$R_1 = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = 2a + \frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a$$



## Решение:

2) Достроив усеченный конус до полного, найдем, какую часть от полного конуса составляют меньшие конусы.



$V$  – объем наибольшего конуса

$$\frac{V_{(SO_1)}}{V} = \frac{(2a)^3}{(3a)^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{6^3}{9^3}$$

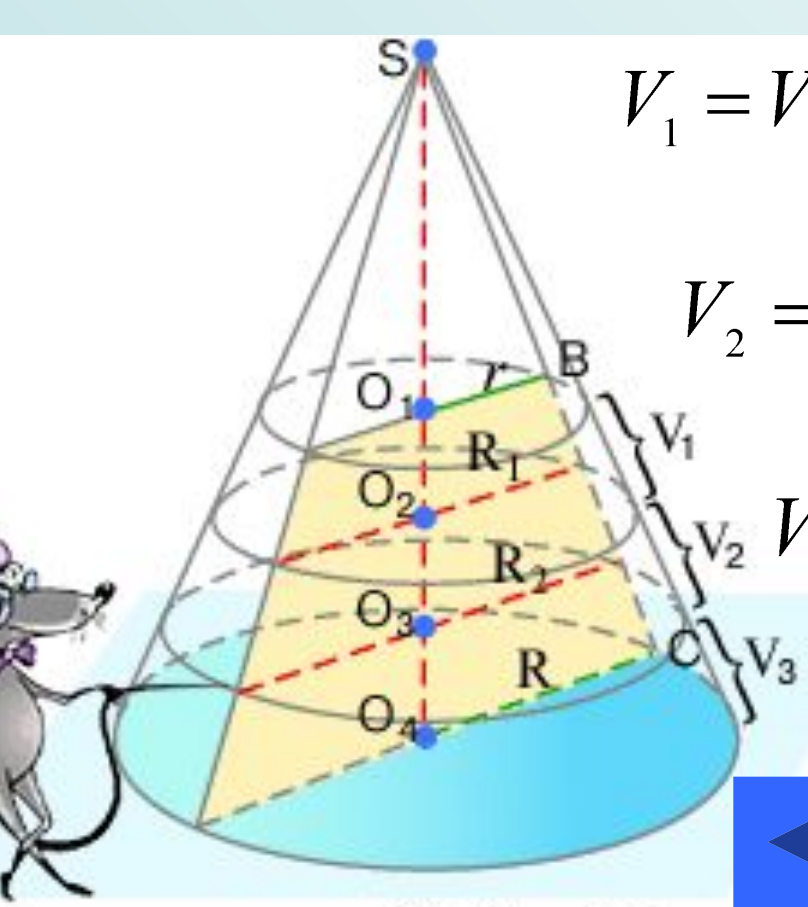
$$\frac{V_{(SO_2)}}{V} = \frac{\left(\frac{7}{3}a\right)^3}{(3a)^3} = \frac{7^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_3)}}{V} = \frac{\left(\frac{8}{3}a\right)^3}{(3a)^3} = \frac{8^3}{9^3}$$



## Решение:

3) Определим, какую часть от объема полного конуса составляют усеченные конусы, расположенные между соседними сечениями и найдем отношение объемов этих конусов.



$$V_1 = V_{(SO_2)} - V_{(SO_1)} = \frac{7^3 - 6^3}{9^3} V = \frac{127}{9^3} V$$

$$V_2 = V_{(SO_3)} - V_{(SO_2)} = \frac{8^3 - 7^3}{9^3} V = \frac{169}{9^3} V$$

$$V_3 = V - V_{(SO_3)} = \frac{9^3 - 8^3}{9^3} V = \frac{217}{9^3} V$$

**Ответ:**

$$V_1 : V_2 : V_3 = 127 : 168 : 217$$