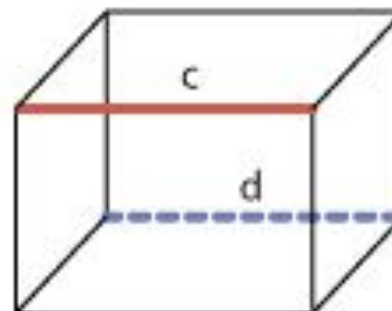


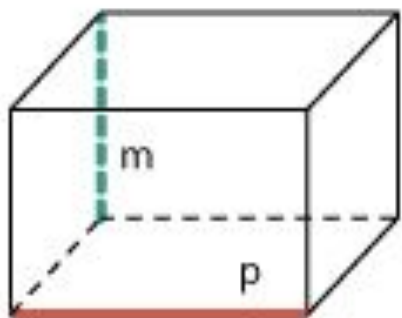
***Прямые в
пространстве. Угол
между прямыми.***

***гимназия 64
учитель математики
Котельникова Н. В.***

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

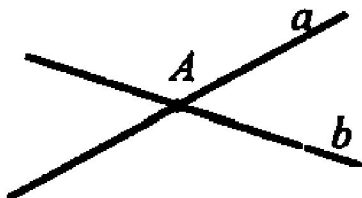


Одна дорога проходит по эстакаде, а другая под эстакадой

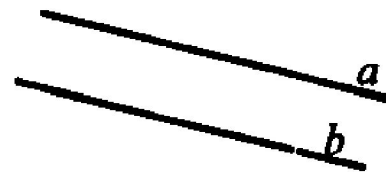
Прямые на плоскости



а) $a = b$

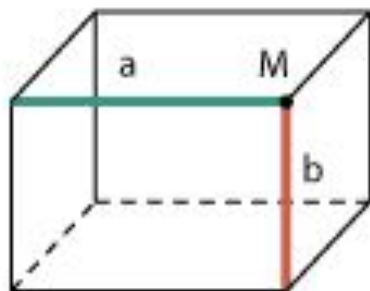


б) $a \cap b = A$



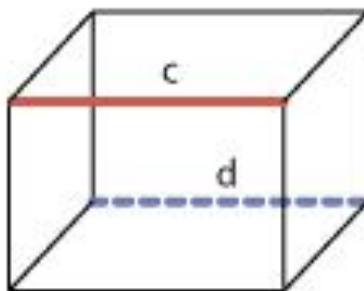
в) $a \parallel b$

Прямые в пространстве



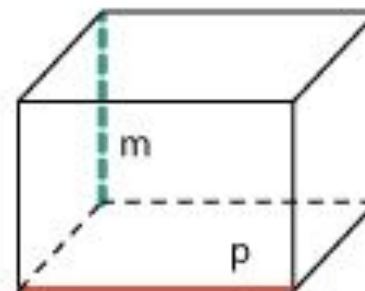
пересекаются

$a \cap b = M$



параллельны

$c \parallel d$



скрещиваются

$m \not\parallel p$

Теорема (признак скрещивающихся прямых)

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Дано:

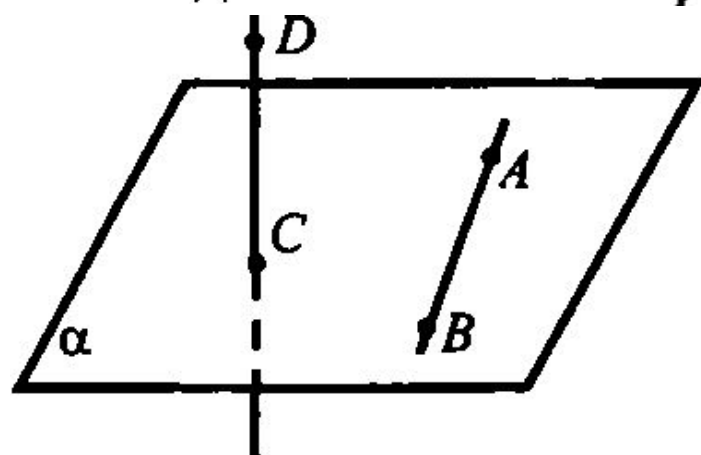
$AB \subset \alpha, CD \cap \alpha = C, C \notin AB$

Доказать,

AB скрещивается с CD .

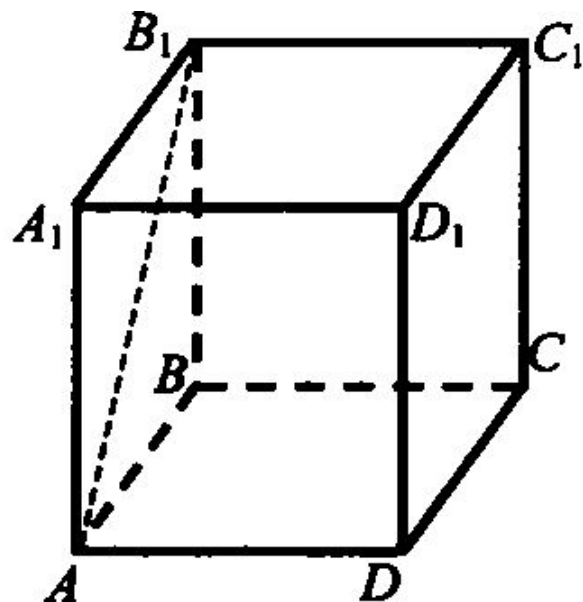
Доказательство:

Допустим, что CD и AB лежат в одной плоскости β .



$$\left. \begin{array}{l} C \in \alpha \text{ и } C \in \beta \\ AB \subset \alpha \text{ и } AB \subset \beta \end{array} \right| \Rightarrow \alpha \equiv \beta.$$

Плоскости совпадают, чего быть не может, так как прямая CD пересекает α . Плоскости, которой принадлежат AB и CD не существует и следовательно по определению скрещивающихся прямых AB скрещивается с CD .



1. Определить взаимное расположение прямых AB_1 и DC .
2. Указать взаимное расположение прямой DC и плоскости AA_1BB_1 .
3. Является ли прямая AB_1 параллельной плоскости DD_1CC_1 ?

Теорема:

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой плоскости, и притом только одна.

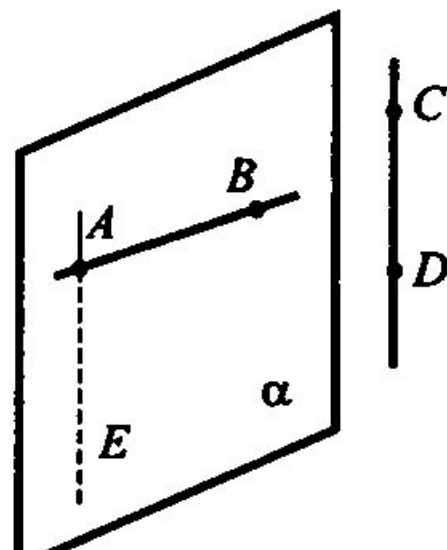
Дано: AB скрещивается CD

Построить α : $AB \subset \alpha$, $CD \parallel \alpha$.

Доказать, что α – единственная.

Доказательство:

1. Через точку A проведем прямую AE , $AE \parallel CD$.
2. Прямые AE и AB пересекаются и образуют плоскость α . $AB \subset \alpha$ (по построению), $CD \parallel \alpha$ (по признаку параллельности прямой и плоскости). α – искомая плоскость.
3. Докажем, что α – единственная плоскость. α – единственная по следствию из аксиом. Любая другая плоскость, которой принадлежит AB , пересекает AE и, следовательно, прямую CD .



Теорема.

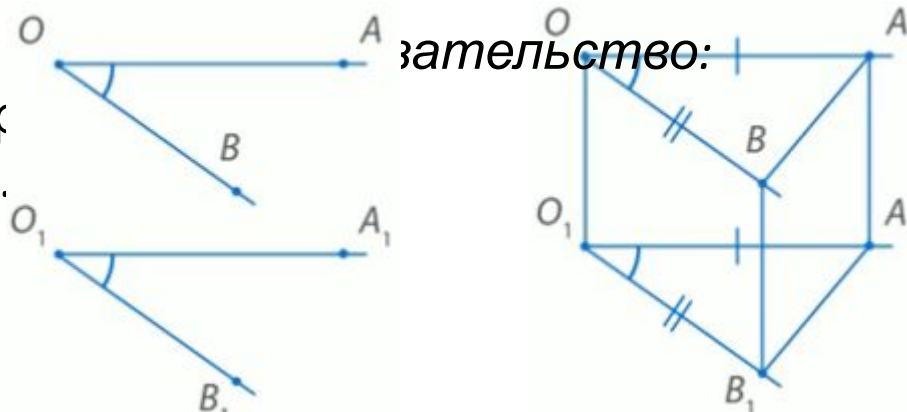
Если стороны двух углов сонаправлены, то такие углы равны.

Дано:

углы AOB и $A_1O_1B_1$, стороны которых лежат на сонаправленных лучах.

Доказать:

углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны.



отметим точки A_1 и B_1 такие, что $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$.

1. Рассмотрим OAA_1O_1 . $\left. \begin{array}{l} OA \parallel O_1A_1 \\ OA = O_1A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$ OAA_1O_1 – параллелограмм (по признаку). Значит, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.

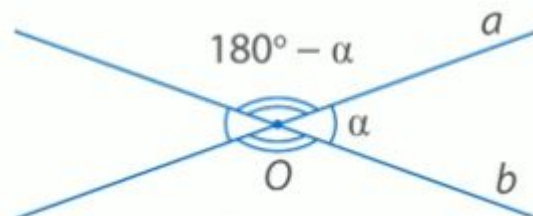
2. Рассмотрим OBV_1O_1 . $\left. \begin{array}{l} OB \parallel O_1B_1 \\ OB = O_1B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow OBV_1O_1$ – параллелограмм (по признаку). Значит, $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$.

Вывод: $AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1 \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = OO_1$ и $BB_1 = OO_1 \Rightarrow AA_1 = BB_1$.
Следовательно, четырехугольник AA_1BB_1 – параллелограмм (по признаку).
Следовательно, $AB = A_1B_1$.

3. Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle A_1B_1O_1$. $\triangle ABO = \triangle A_1B_1O_1$ (по трем сторонам).

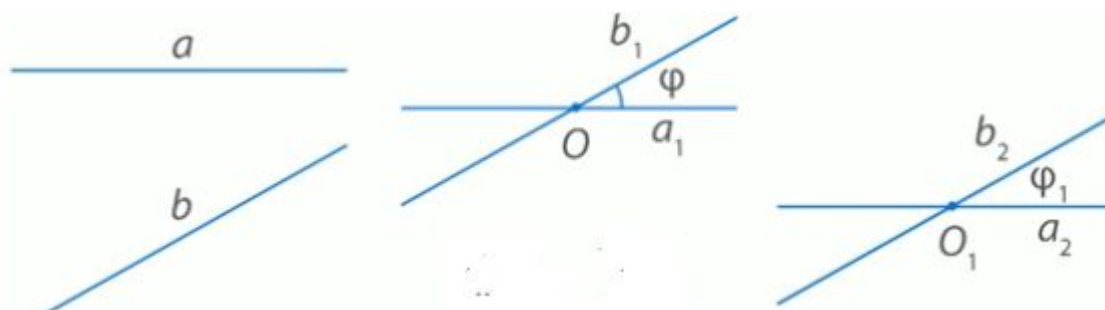
Вывод: $\angle O = \angle O_1$.

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180° . Угловая мера меньшего из них называется **углом между прямыми**.



Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.



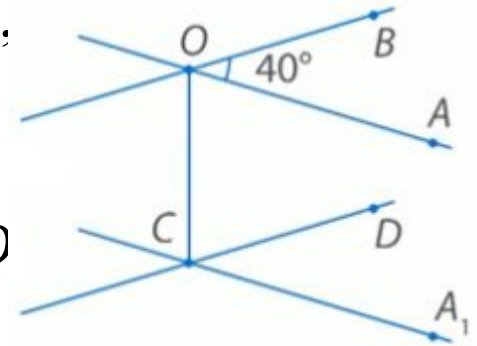
Прямые OB и CD параллельны, OA и CD скрещиваются. Найдите угол между прямыми OA и CD , если:

1) $\angle AOB = 40^\circ$.

Выберем точку C . Через нее проходит прямая CD

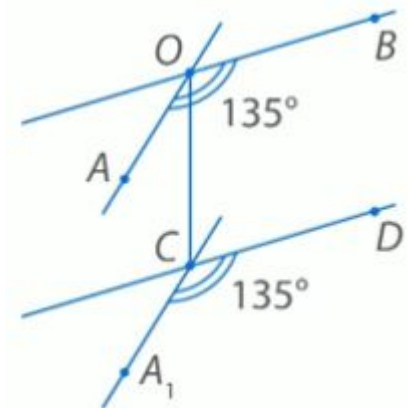
Проведем CA_1 параллельно OA . Тогда

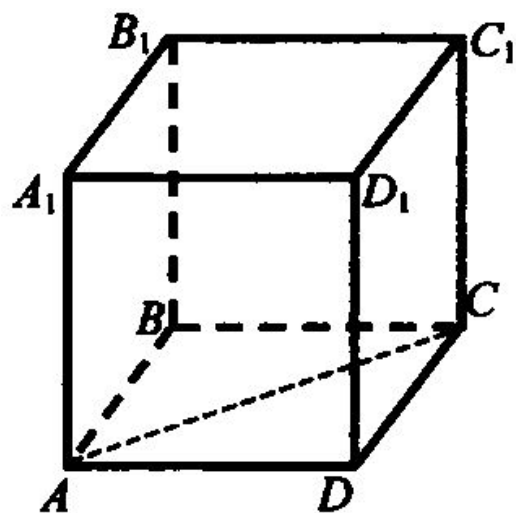
угол A_1CD – угол между скрещивающимися прямыми OA и CD . По теореме об углах с сонаправленными сторонами, угол A_1CD равен углу AOB , то есть 40° .



2) $\angle AOB = 135^\circ$.

Сделаем то же самое построение. Тогда угол между скрещивающимися прямыми OA и CD равен 45° , так как он наименьший из углов, которые получаются при пересечении прямых CD и CA_1 .



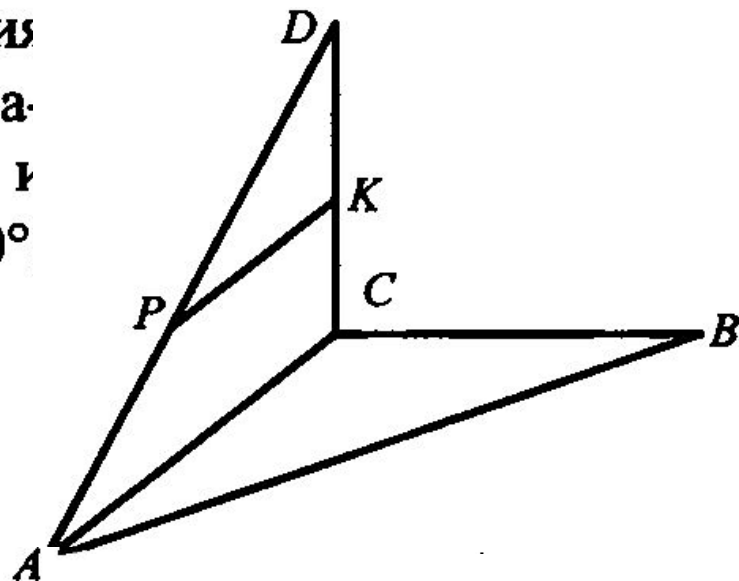


1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Найдите угол между прямыми. 1) BC и CC_1

2) AC и BC 3) $D_1 C_1$ и BC 4) $A_1 B_1$ и AC

2. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия $\triangle ADC$ с основанием AC . Определить взаимное расположение прямых PK и AB и найти угол между ними, если $\angle C = 80^\circ$ $\angle B = 40^\circ$.



Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

Доказательство

Пусть нам дан пространственный четырехугольник $ABCD$. M , N , K , L – середины ребер BD , AD , AC , BC соответственно. Нужно доказать, что $MNKL$ – параллелограмм.

Рассмотрим треугольник ABD . MN – средняя линия. По свойству средней линии, MN параллельна AB и равняется ее половине.

Рассмотрим треугольник ABC . LK – средняя линия. По свойству средней линии, LK параллельна AB и равняется ее половине. И MN , и LK параллельны AB . Значит, MN параллельна LK по теореме о трех параллельных прямых.

Получаем, что в четырехугольнике $MNKL$ – стороны MN и LK параллельны и равны, так как MN и LK равны половине AB . Значит, по признаку параллелограмма, четырехугольник $MNKL$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

