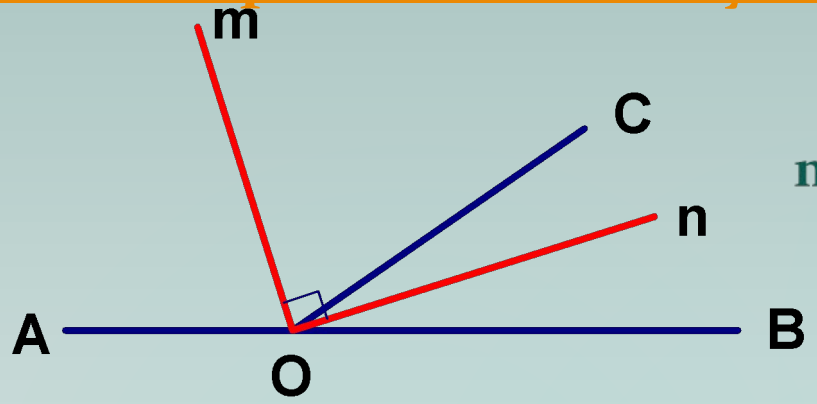
Полезные факты из планиметрии

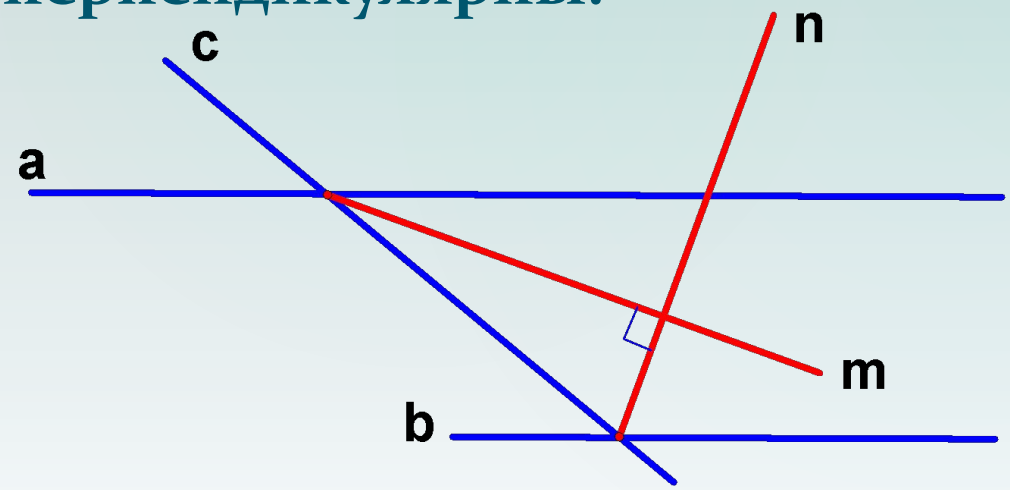
{ **Лучше это знать…**

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.



∠AOC и ∠COB – смежные углы
m и n – биссектрисы смежных углов
$m \perp n$

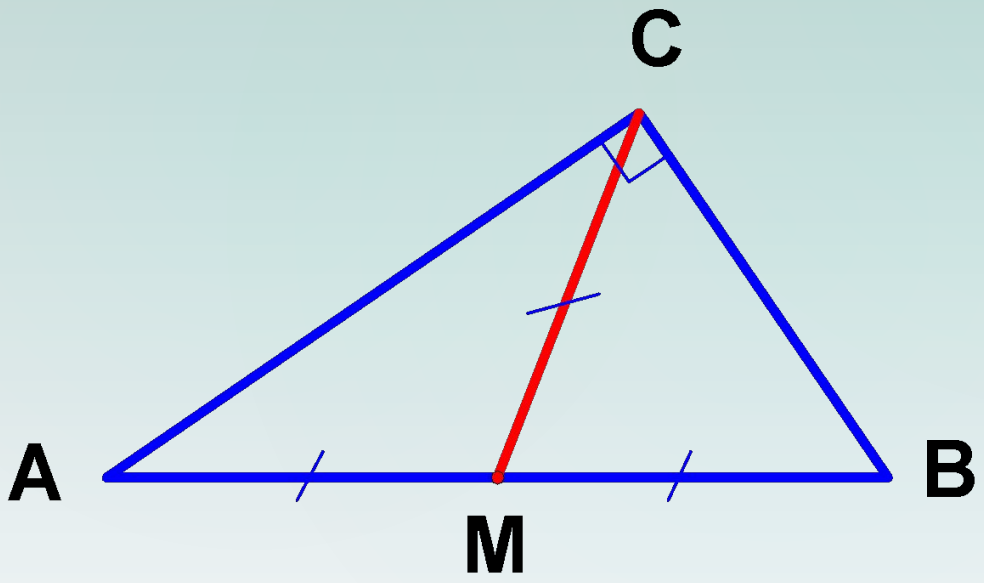
Биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

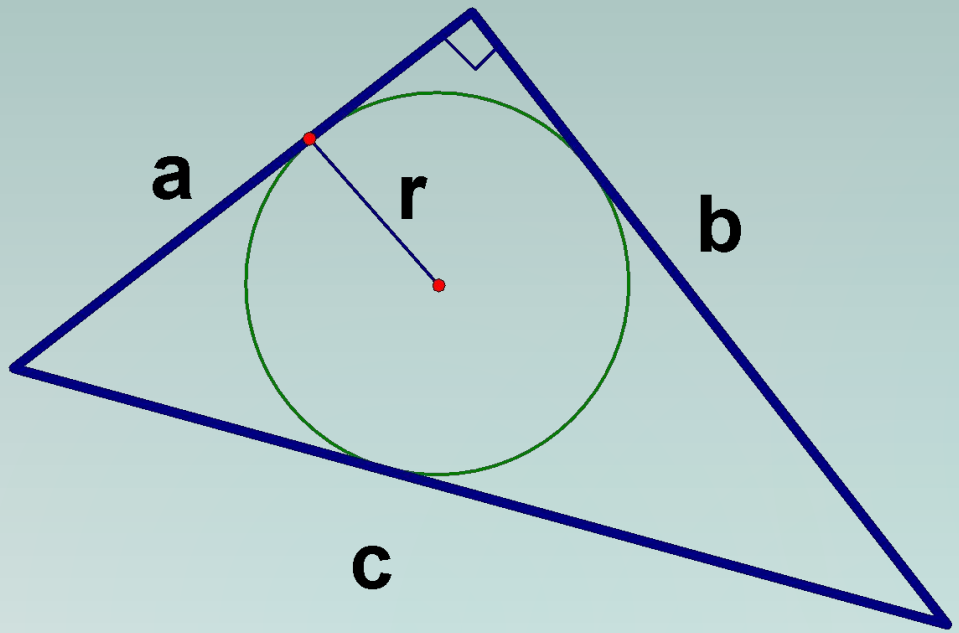


a ∥ b и c - секущая
m и n – биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных a и b и секущей c.
$m \perp n$

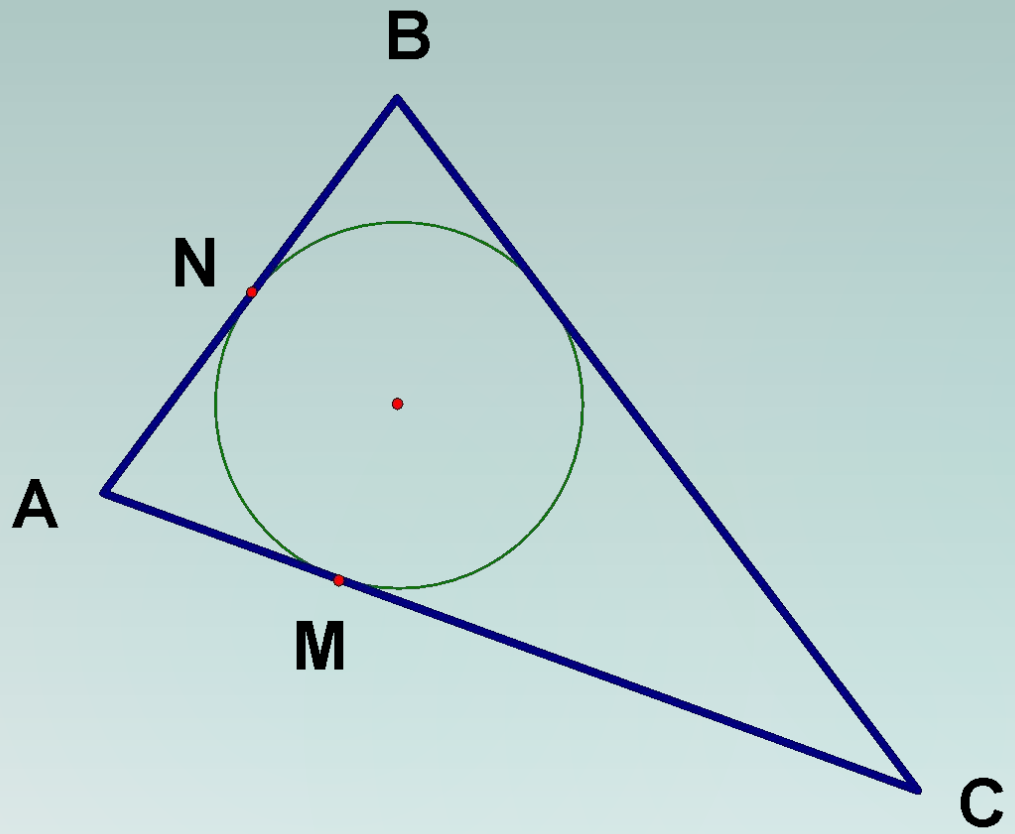
а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

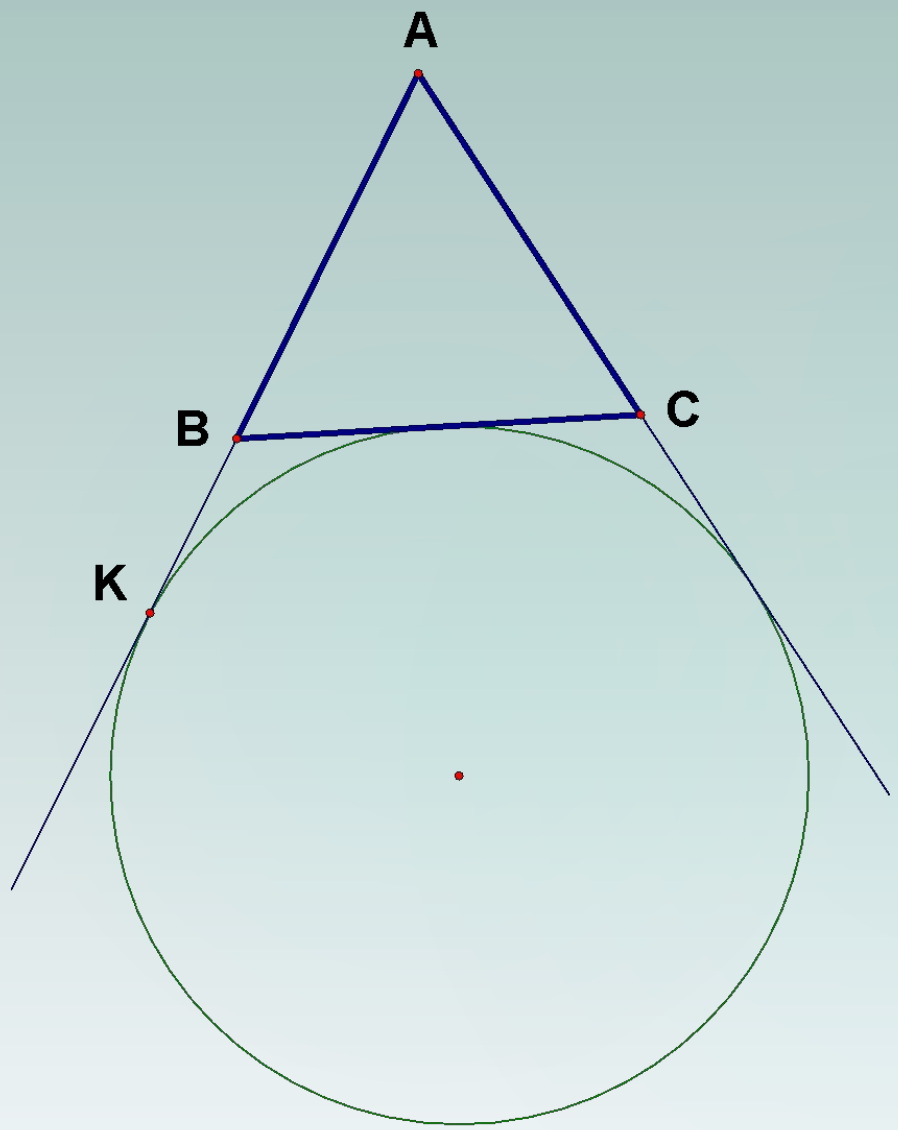




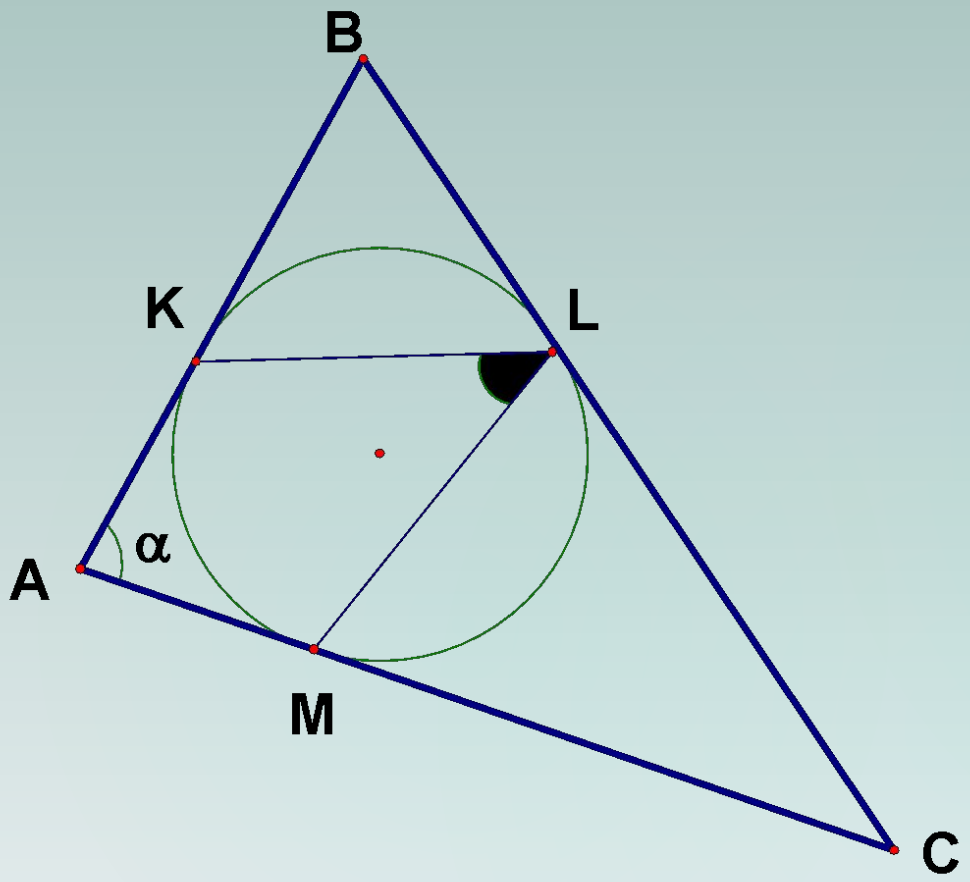
Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, равен $r = \frac{a+b-c}{2}$.



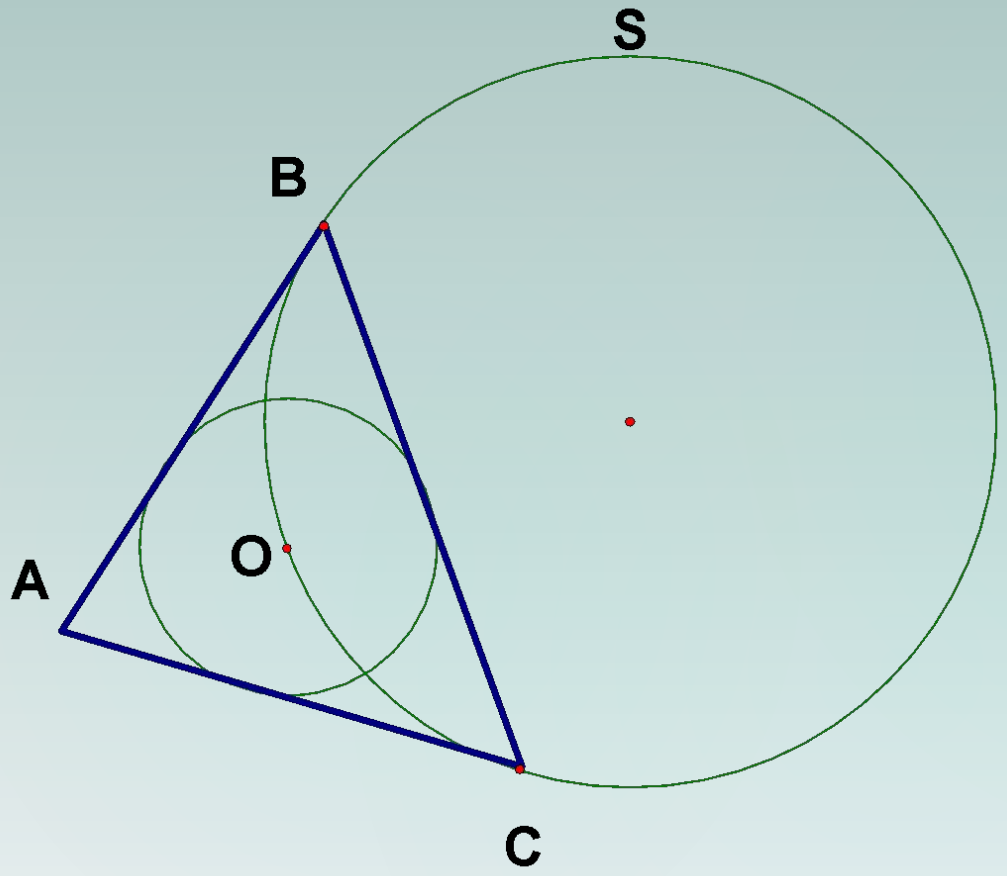
Если M — точка касания со стороной AC и N-точка касания со стороной AB окружности, вписанной в треугольник ABC, то AM = AN = p — BC,
где p — полупериметр треугольника.



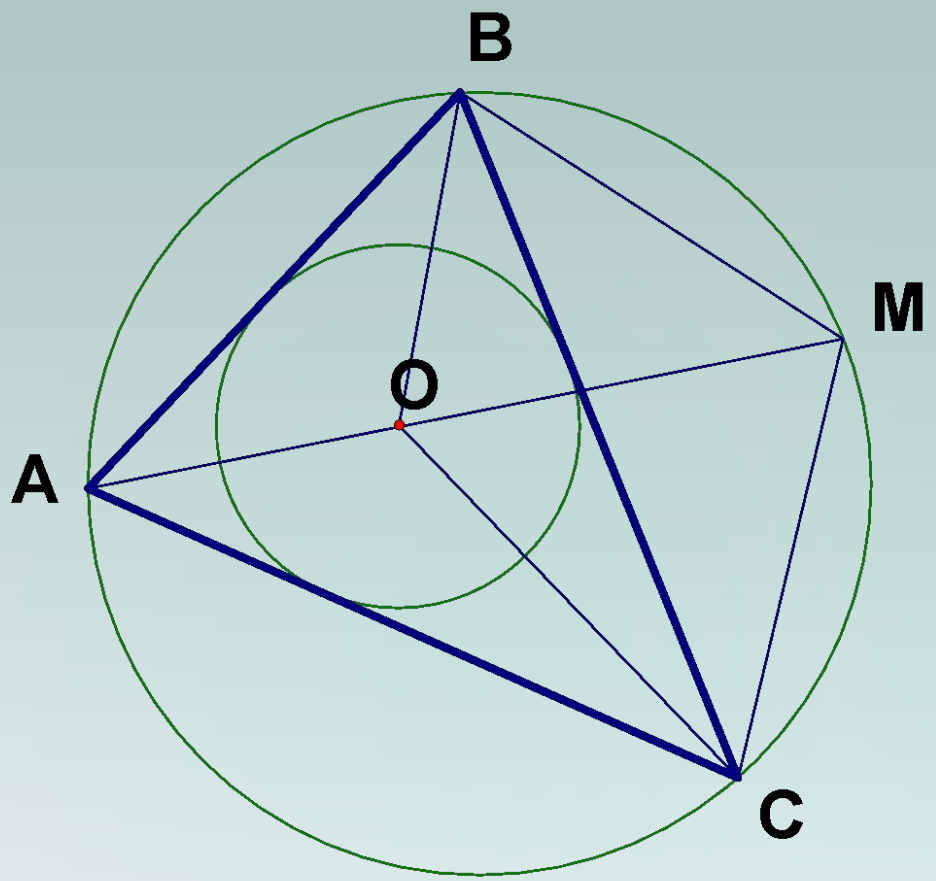
Если окружность касается основания BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.



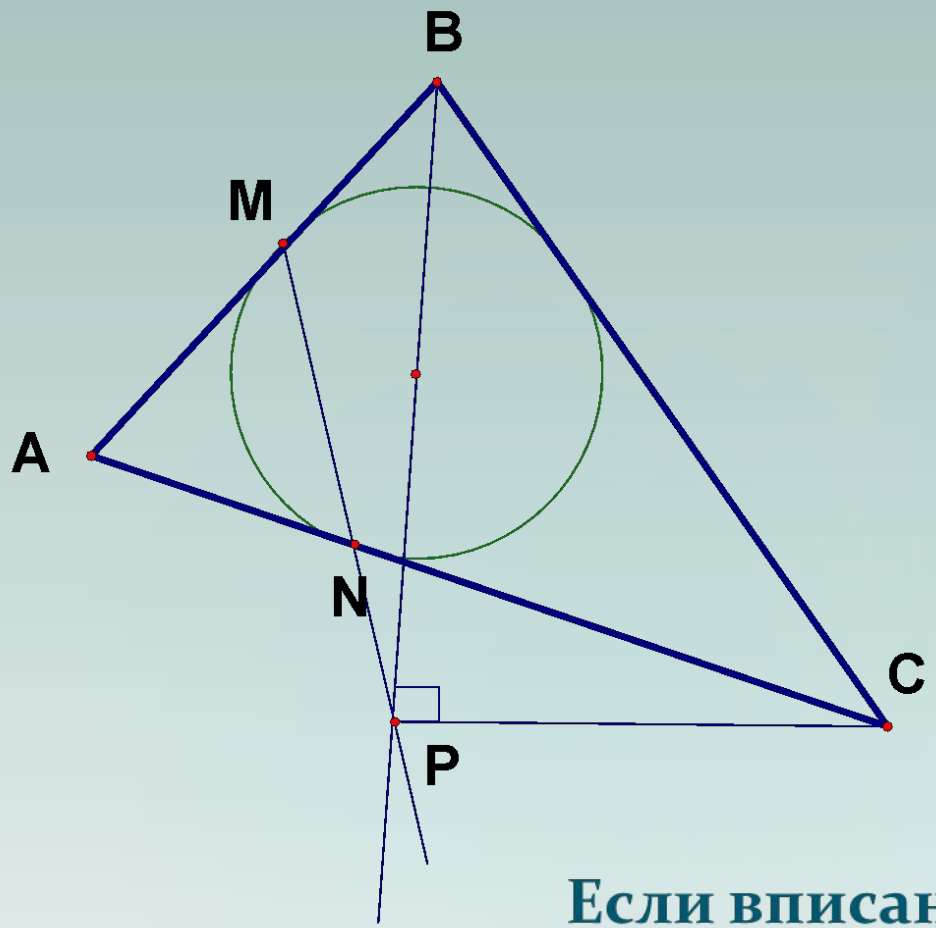
Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L и M, а $\angle BAC = \alpha$, то $\angle KLM = 90° - \frac{\alpha}{2}$.



Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.



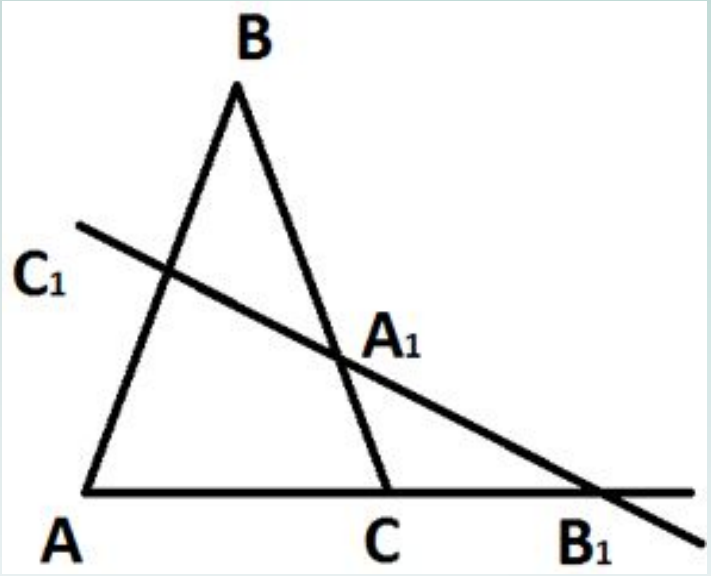
Если прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке M, то треугольники BOM и COM равнобедренные.



Если вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N, а P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B, то $\angle BPC = 90°$.

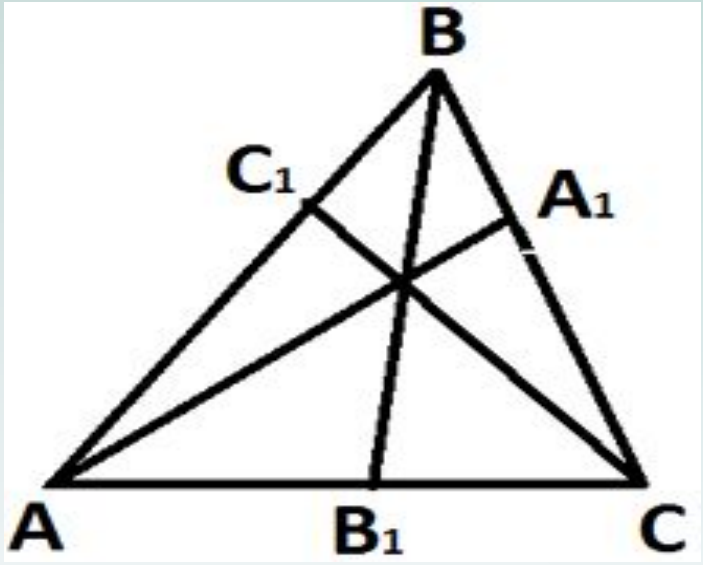
Теорема Минелая: Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка C_1 – на стороне AB, точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C. Точки A_1, B_1и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$



Теорема Чевы: Пусть в треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 – на стороне AC, точка C_1 – на стороне AB. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство

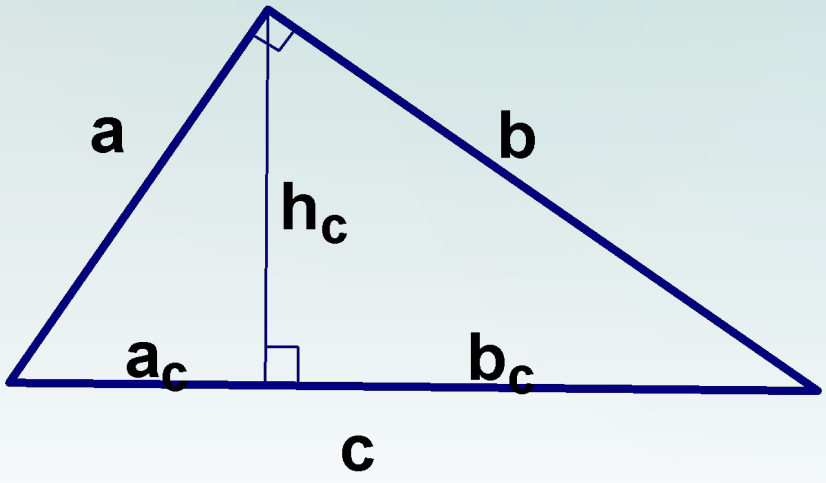
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$



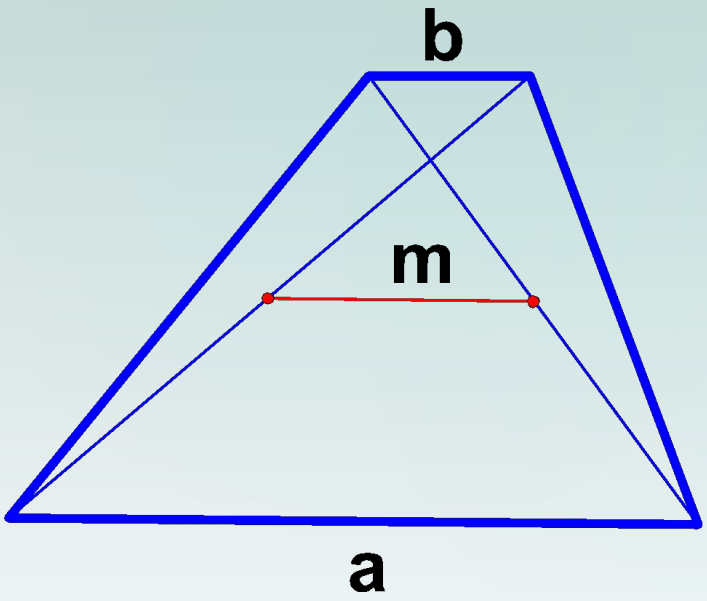
Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$

$$a = \sqrt{a_c \cdot c}; \quad b = \sqrt{b_c \cdot c}$$

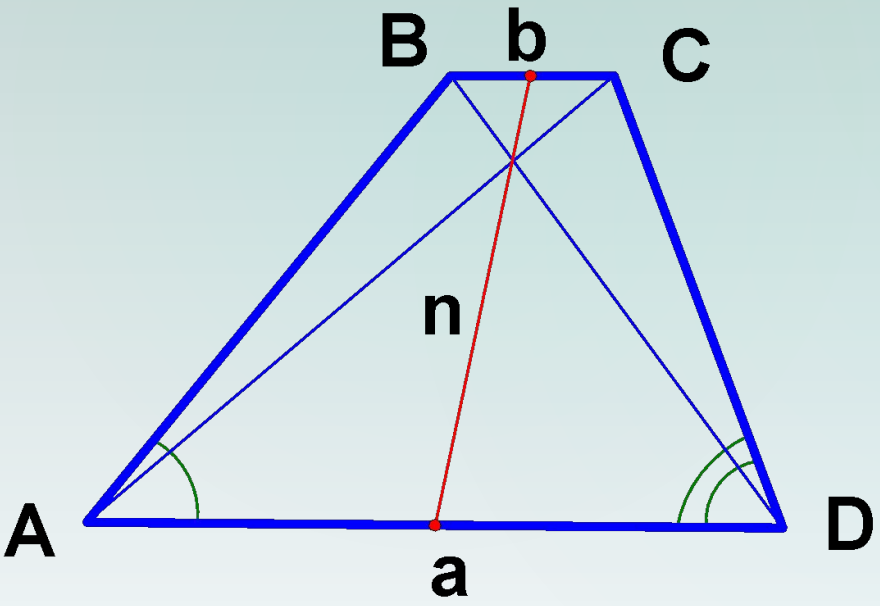


Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.



$$m = \frac{1}{2}(a - b)$$

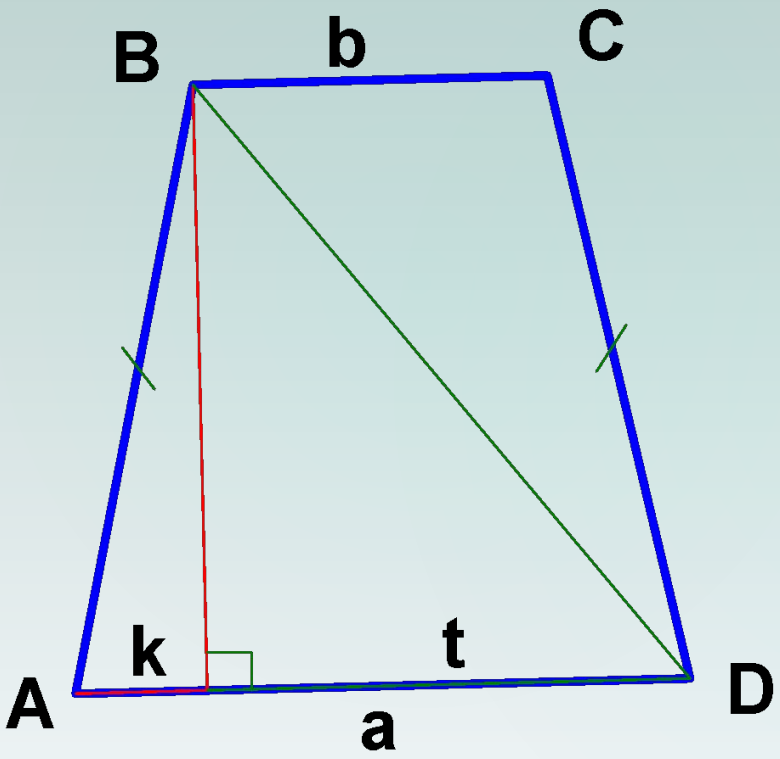
Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.



Если $\angle A + \angle D = 90°$, то

$$n = \frac{1}{2}(a - b)$$

Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

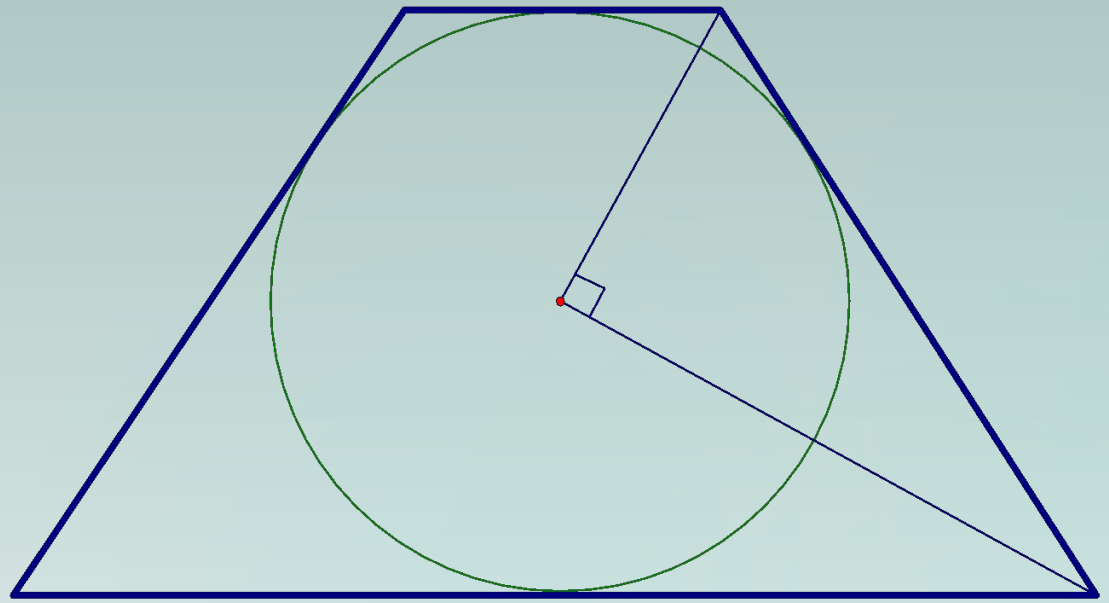


k – проекция боковой стороны AB на основание AD, тогда

$$k = \frac{1}{2}(a - b)$$

t – проекция диагонали BD на основание AD, тогда

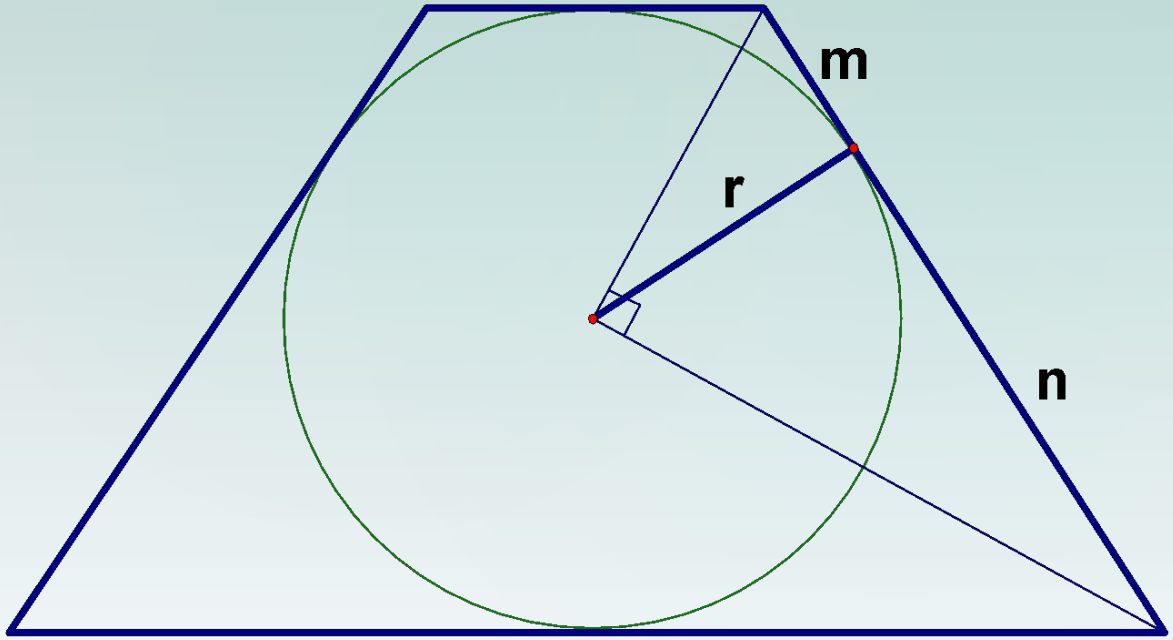
$$t = \frac{1}{2}(a + b)$$

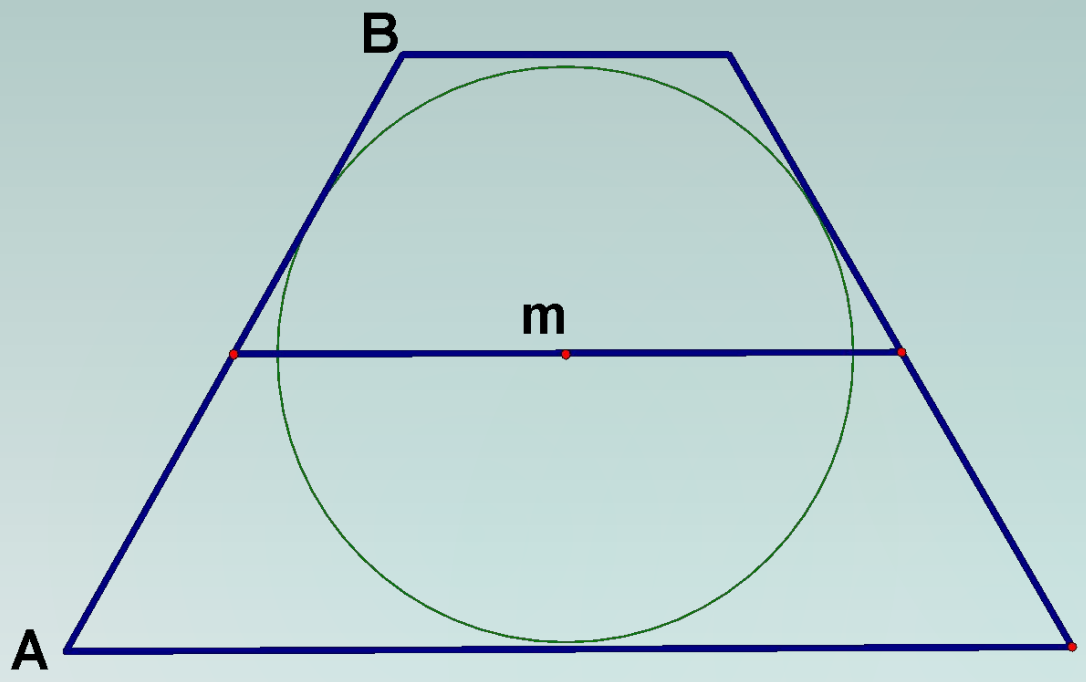


Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

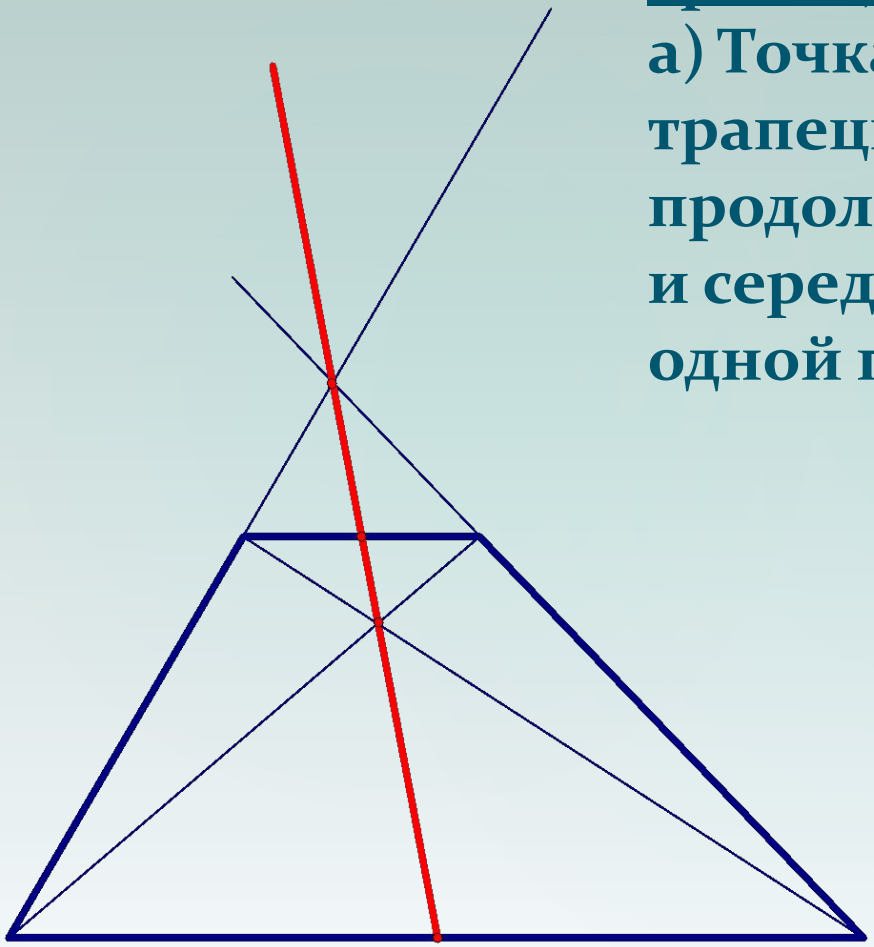
Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

$$r = \sqrt{m \cdot n}$$



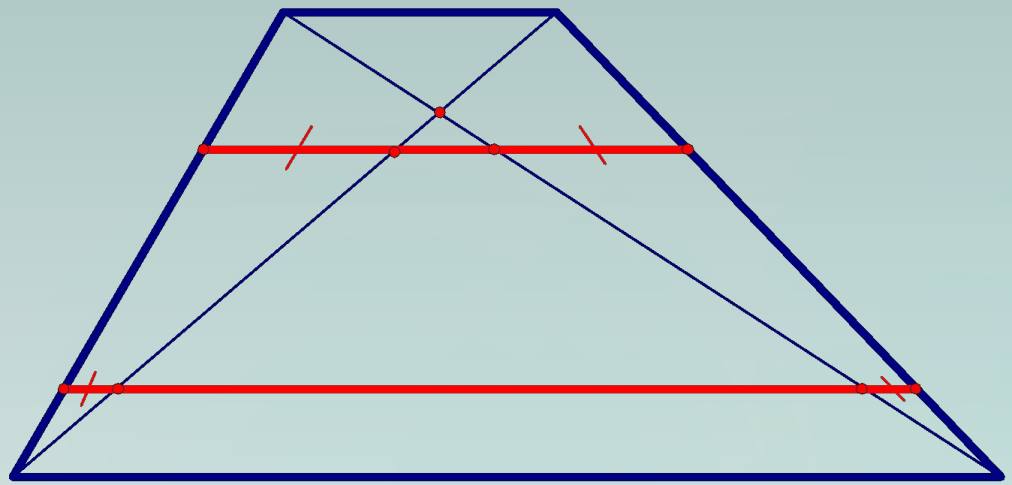


Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.



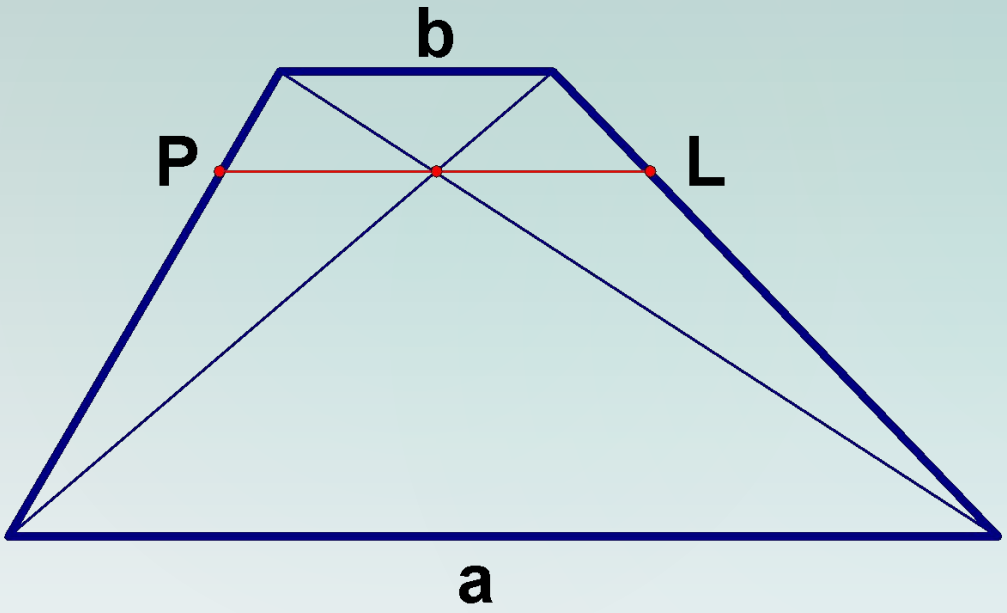
Замечательное свойство трапеции.

а) Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

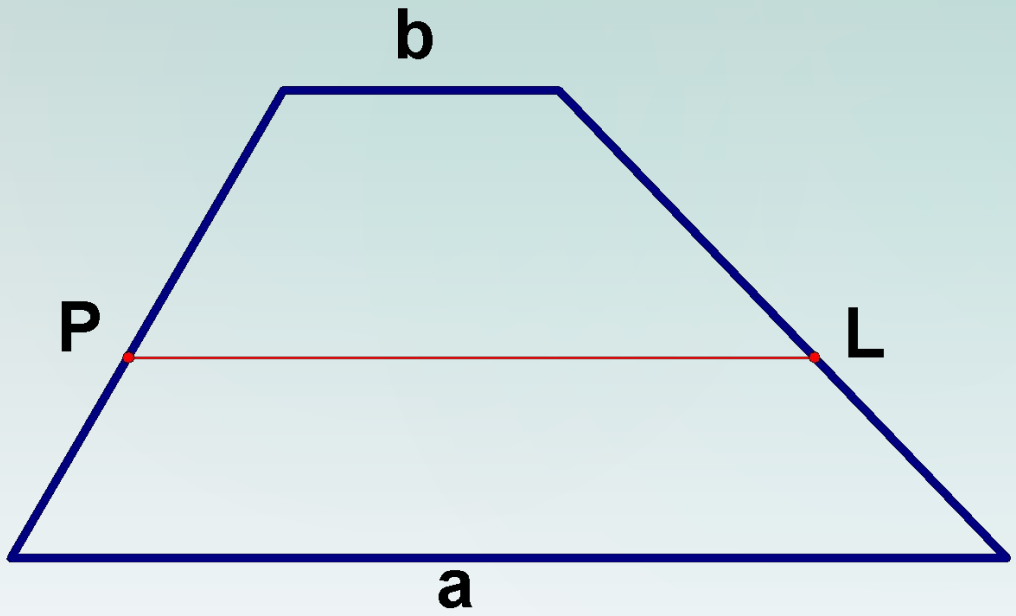


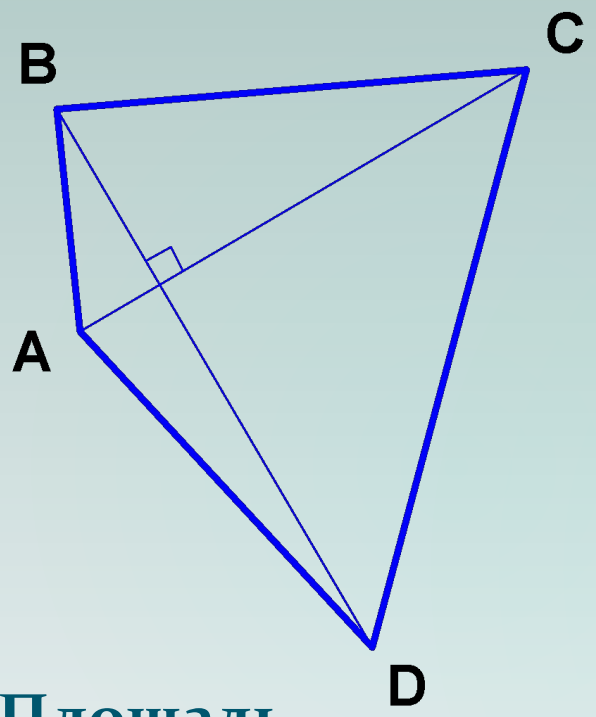
Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны.

Если через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами трапеции, равен $PL = \frac{2ab}{a+b}$



Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{ab}$.

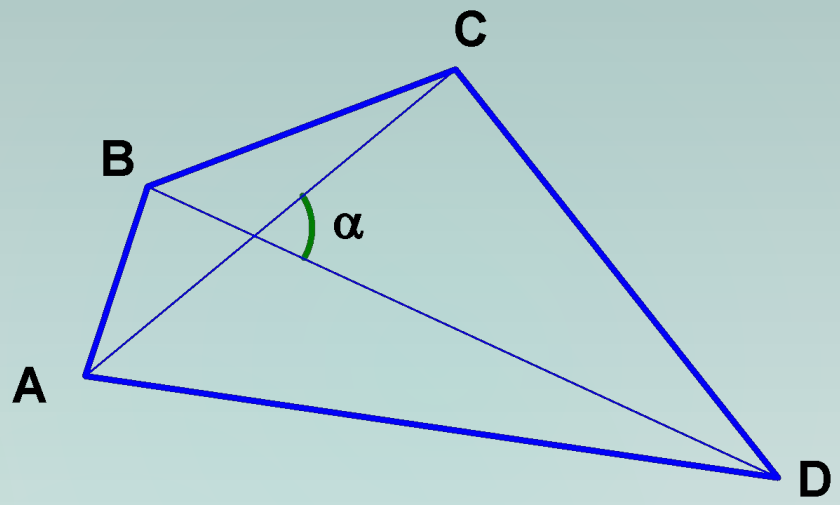




Площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

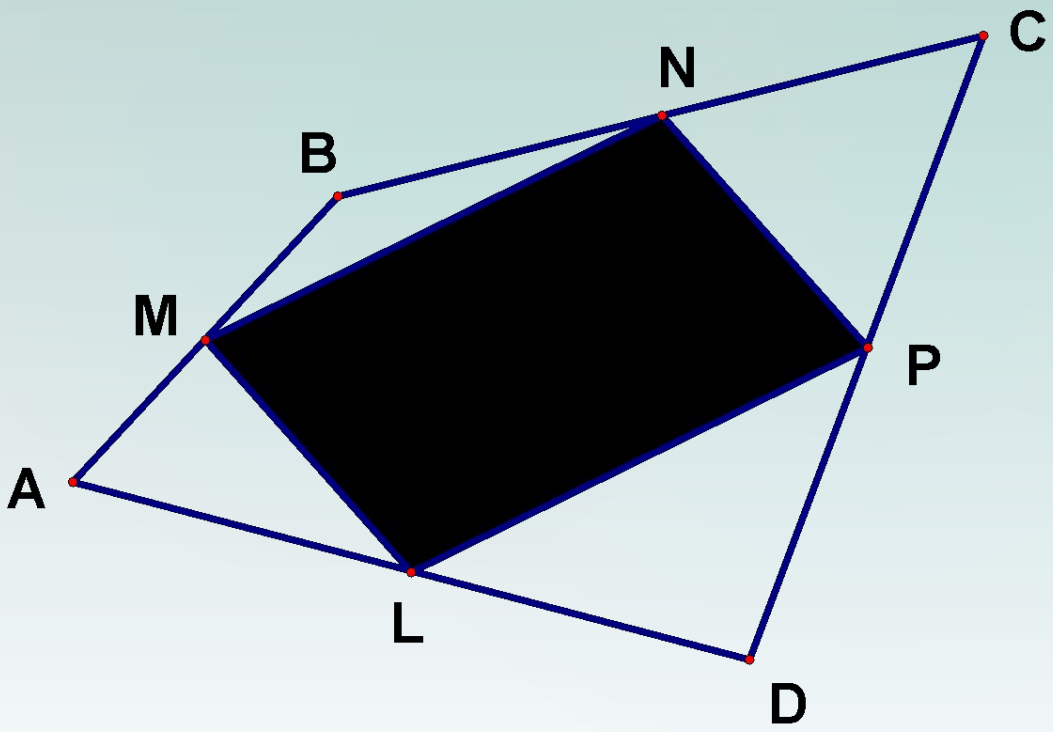
$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$



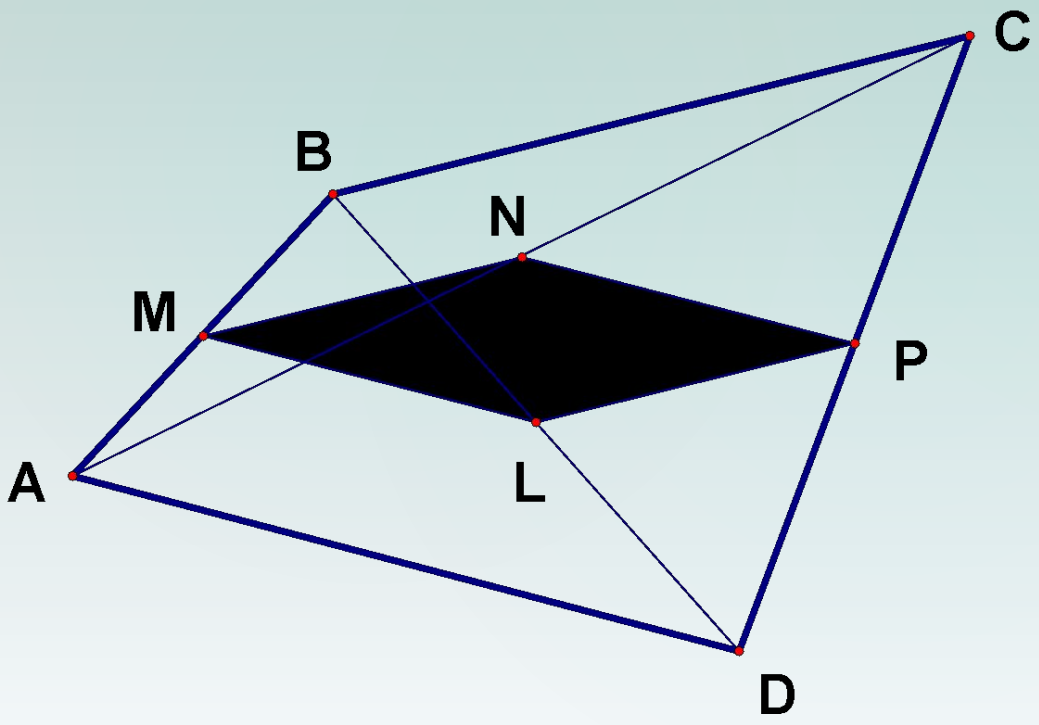
Площадь любого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, причём площадь параллелограмма вдвое меньше площади четырёхугольника.

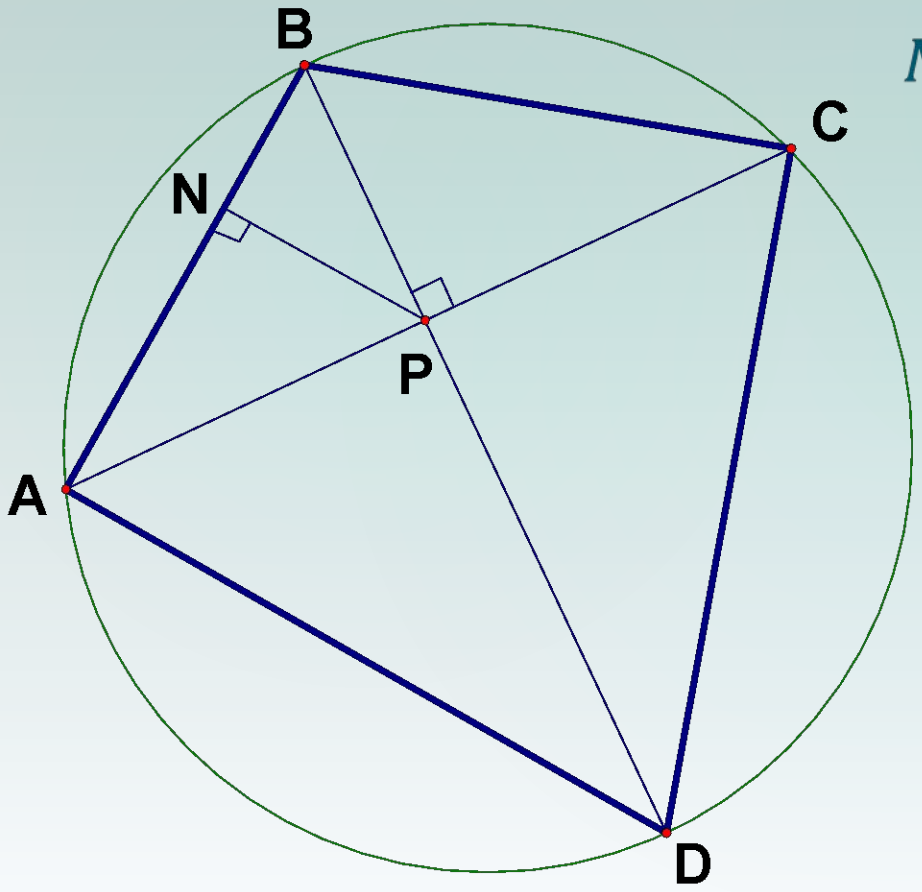
MNPL-параллелограмм, $S_{MNPL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$



Середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей либо являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.



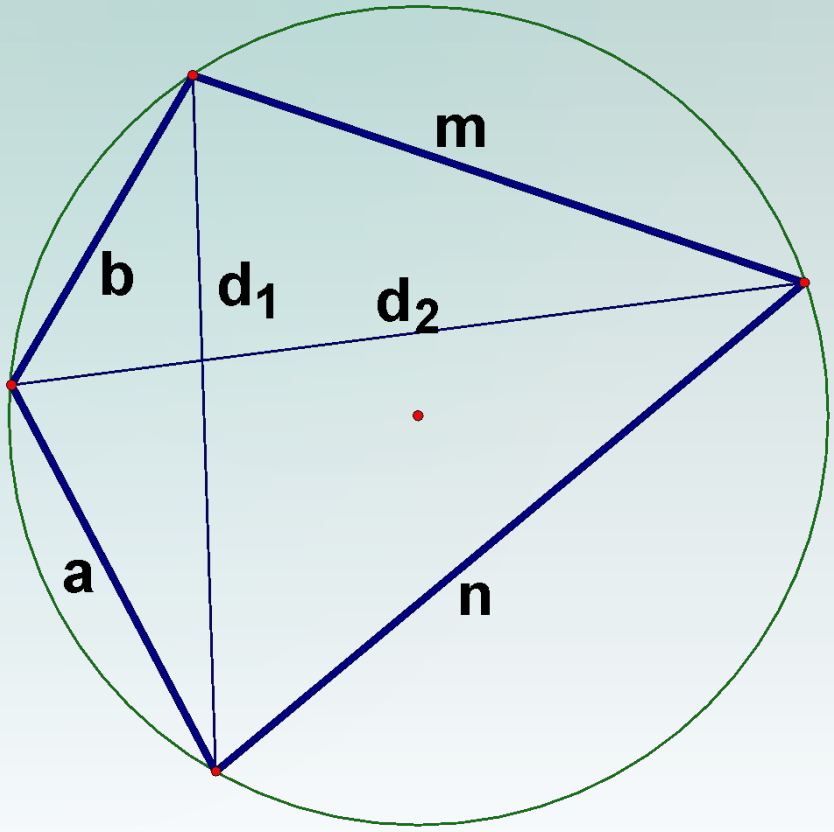
Если диагонали AC и BD четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность радиуса R с центром O, пересекаются в точке P и перпендикулярны, то расстояние от точки P до стороны AB вдвое меньше стороны CD;

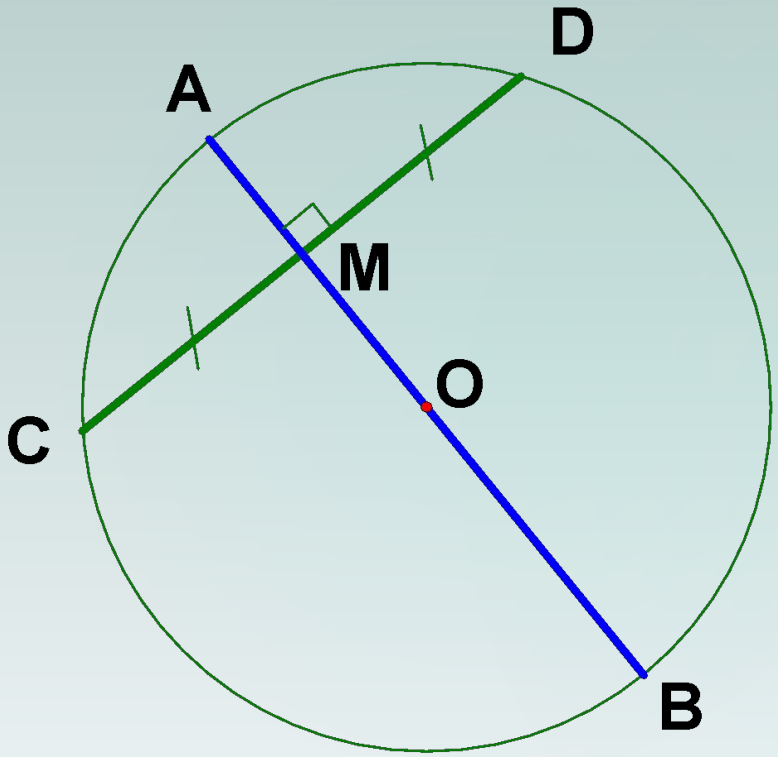


$$NP = \frac{1}{2}CD$$

Теорема Птолемея.

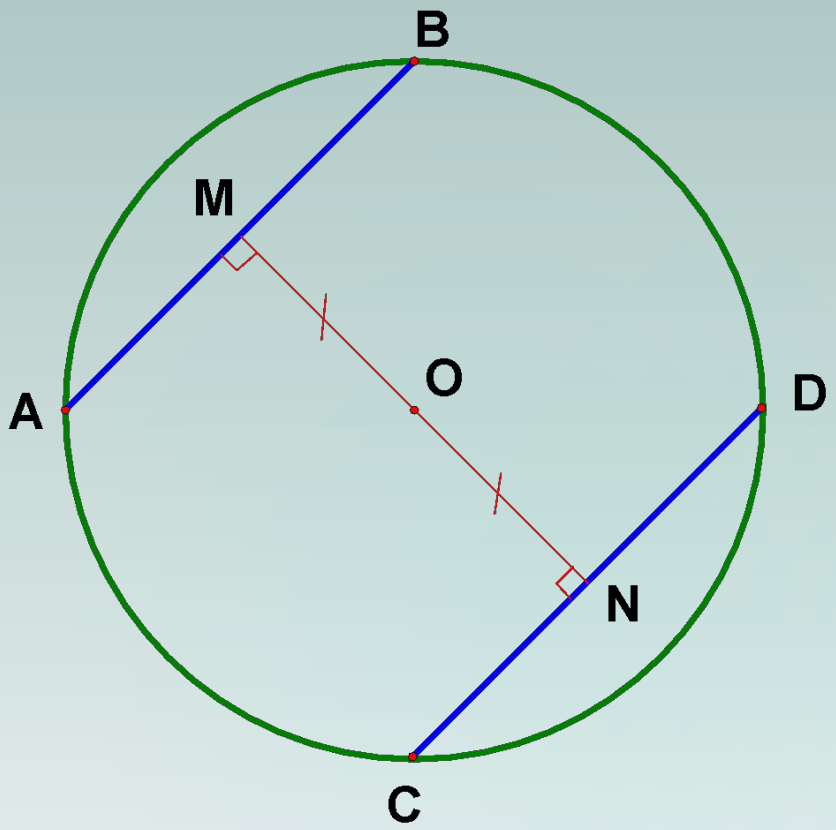
Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей $bn \cdot am = d_1 \cdot d_2$





а) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.
б) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
в) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

AB-диаметр окружности, CD-хорда, M-середина хорды CD



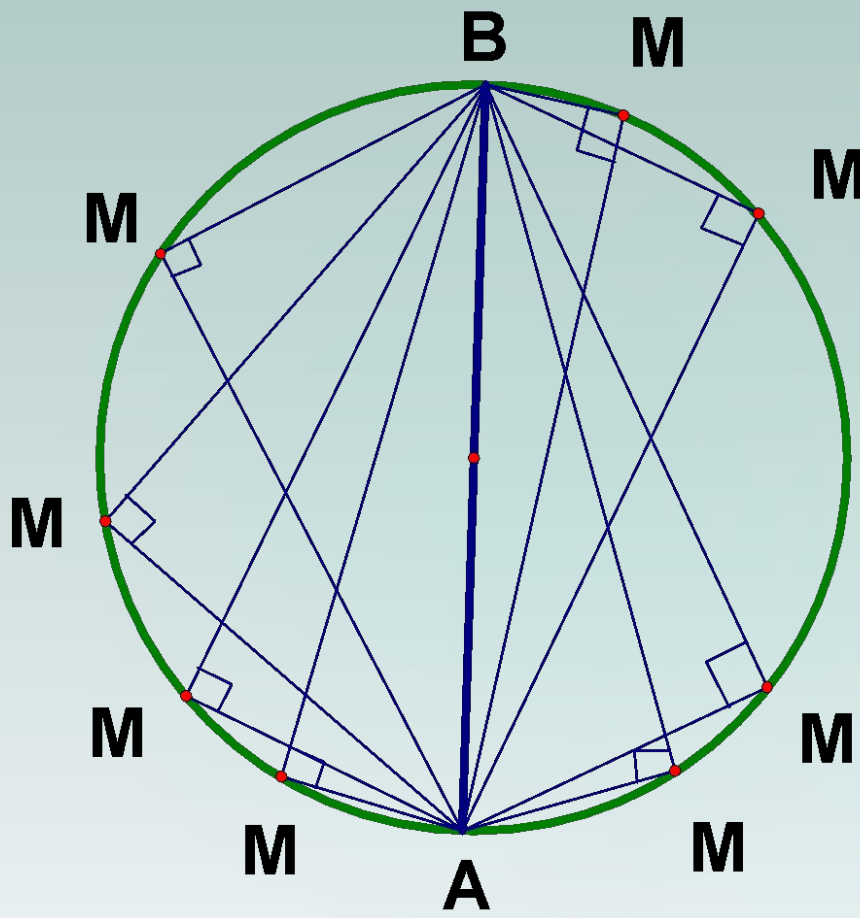
а) Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния. MO = NO

б) Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны. AB = CD

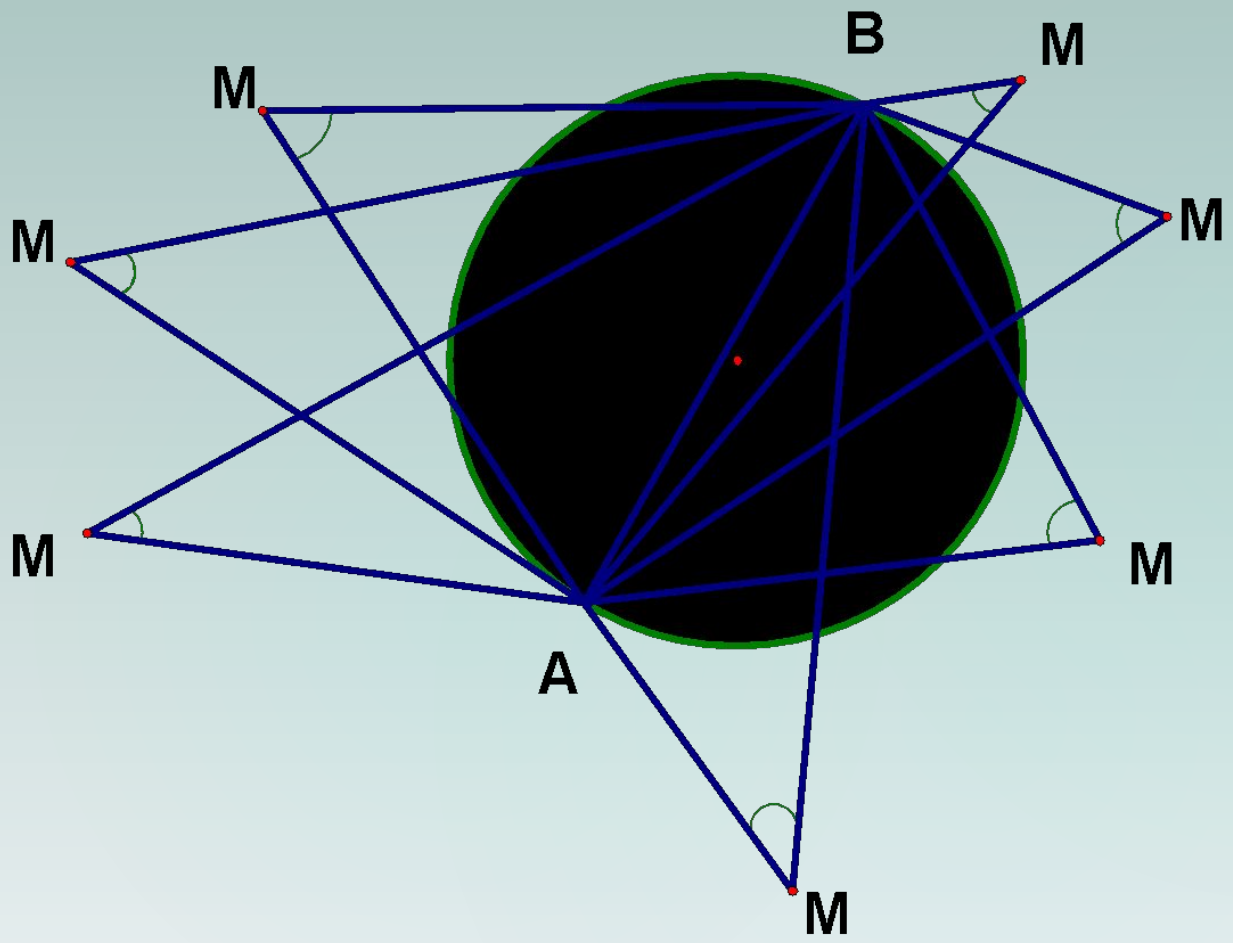
в) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

Если AB‖ CD, то $\smile AC = \smile BD$

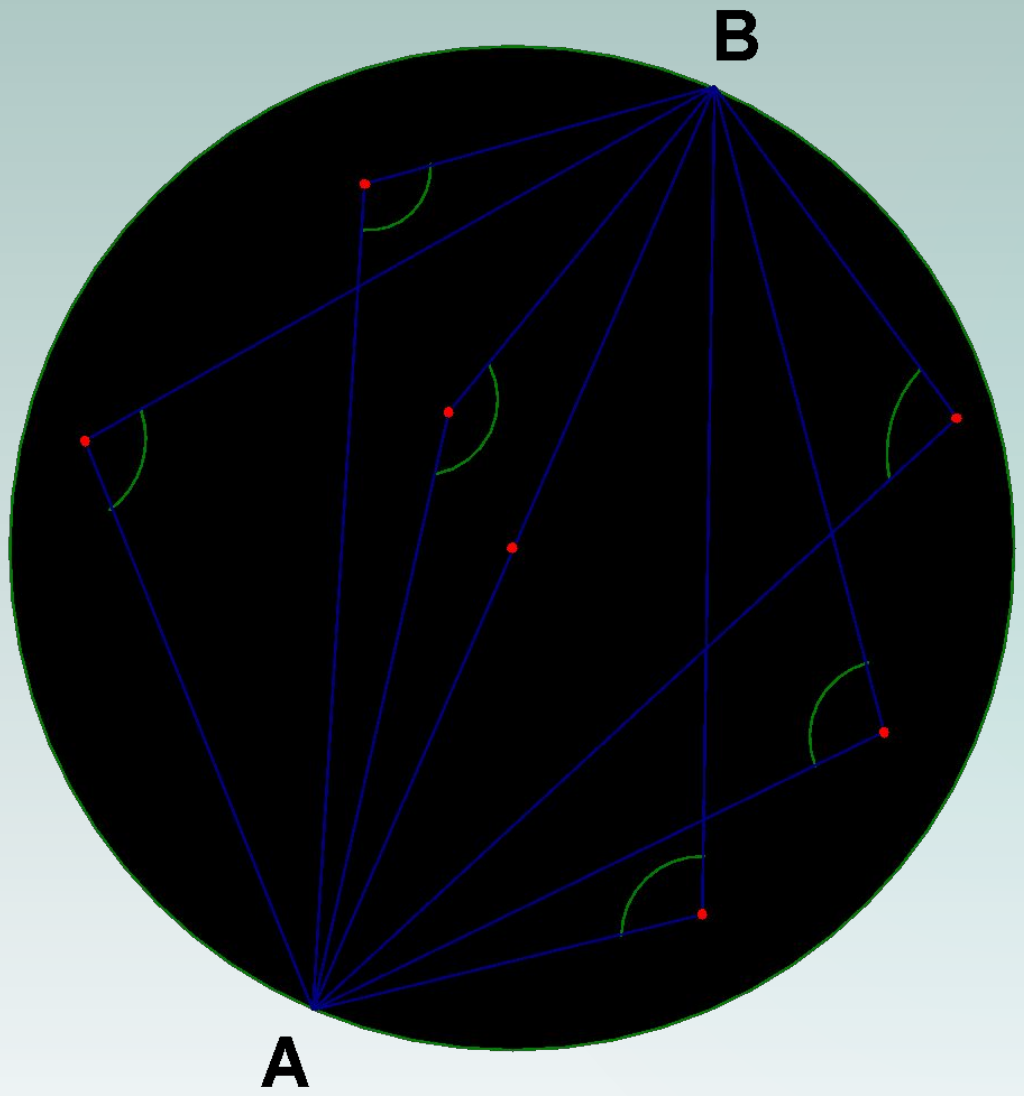
Как это работает...



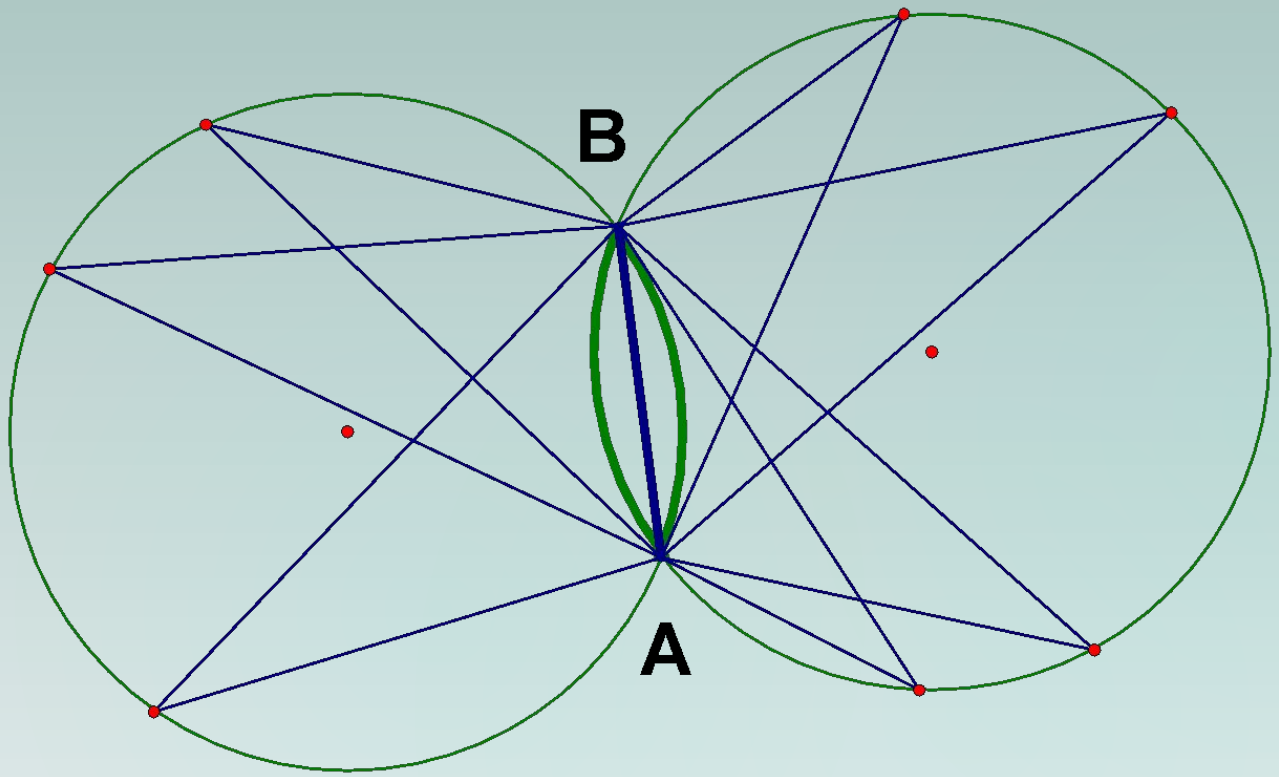
Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек Аи B.



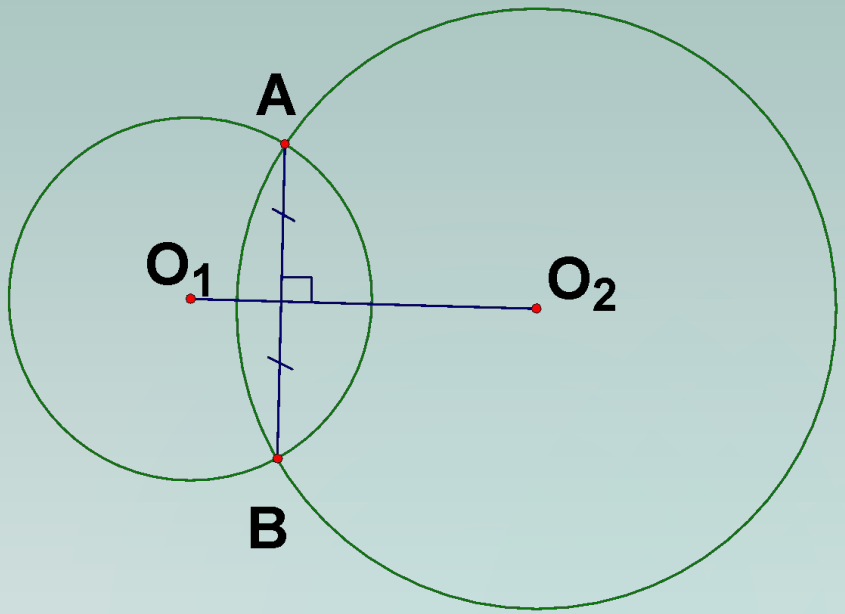
Геометрическое место точек М, из которых отрезок АВ виден под острым углом (∠АМВ < 90°), есть внешность круга с диаметром АВ без точек прямой АВ.

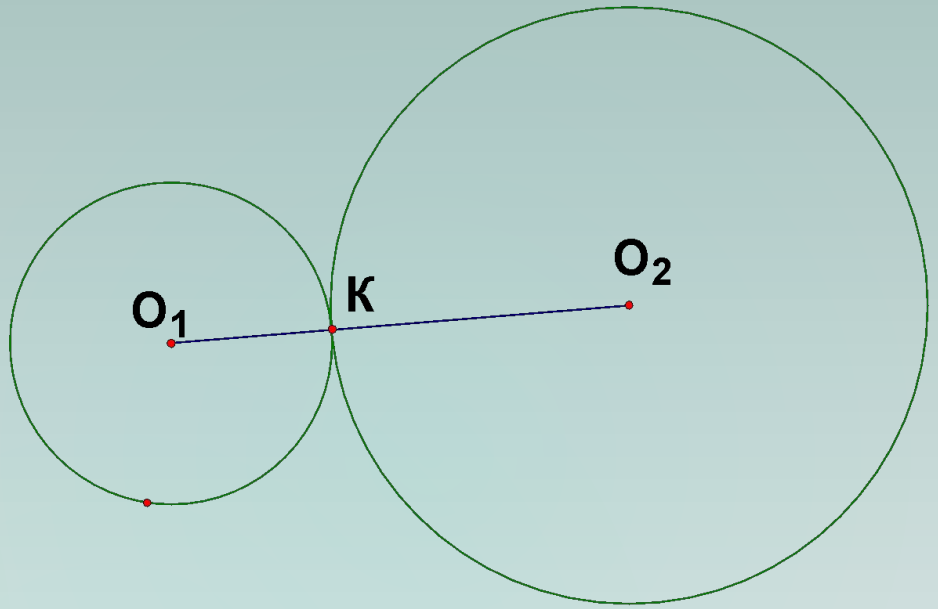


Геометрическое место точек М, из которых отрезок АВ виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром АВ без точек отрезка АВ.

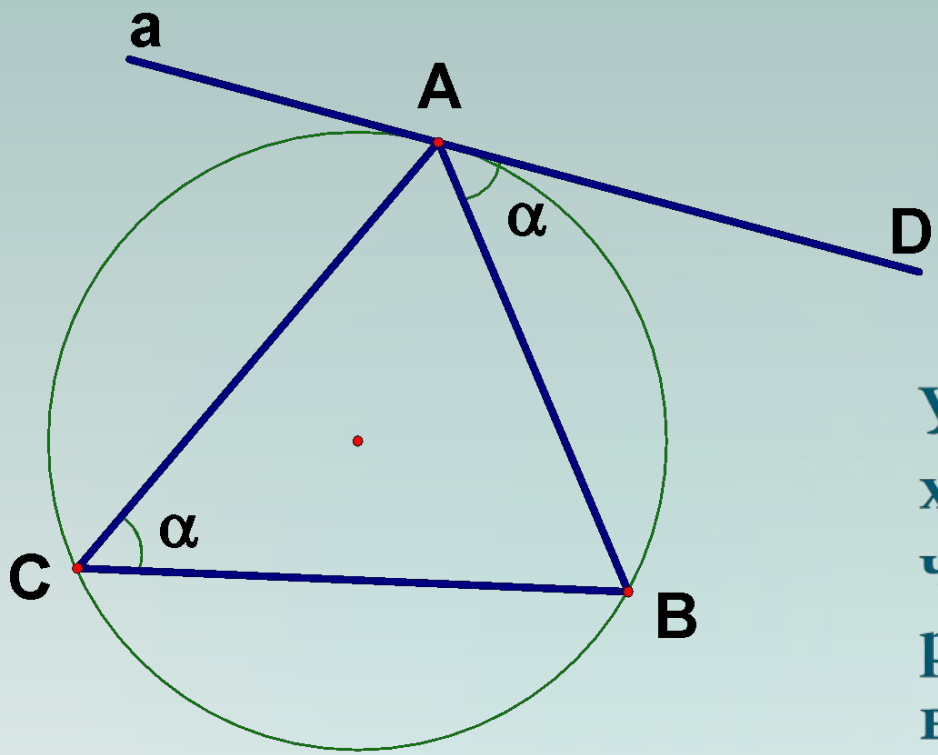


Геометрическое место точек, из которых отрезок АВ виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой АВ, лежащие по разные стороны от прямой АВ, без точек А и В.



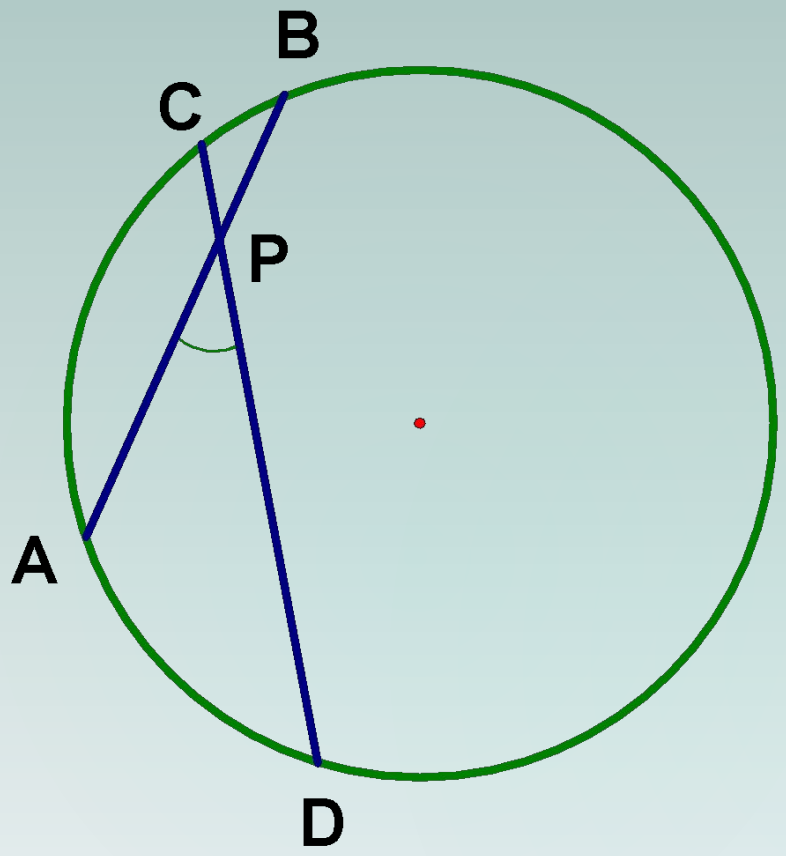


а) Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.
б) Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания.



Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

$$\angle DAB = \angle ACB = \frac{1}{2} \smile AB$$

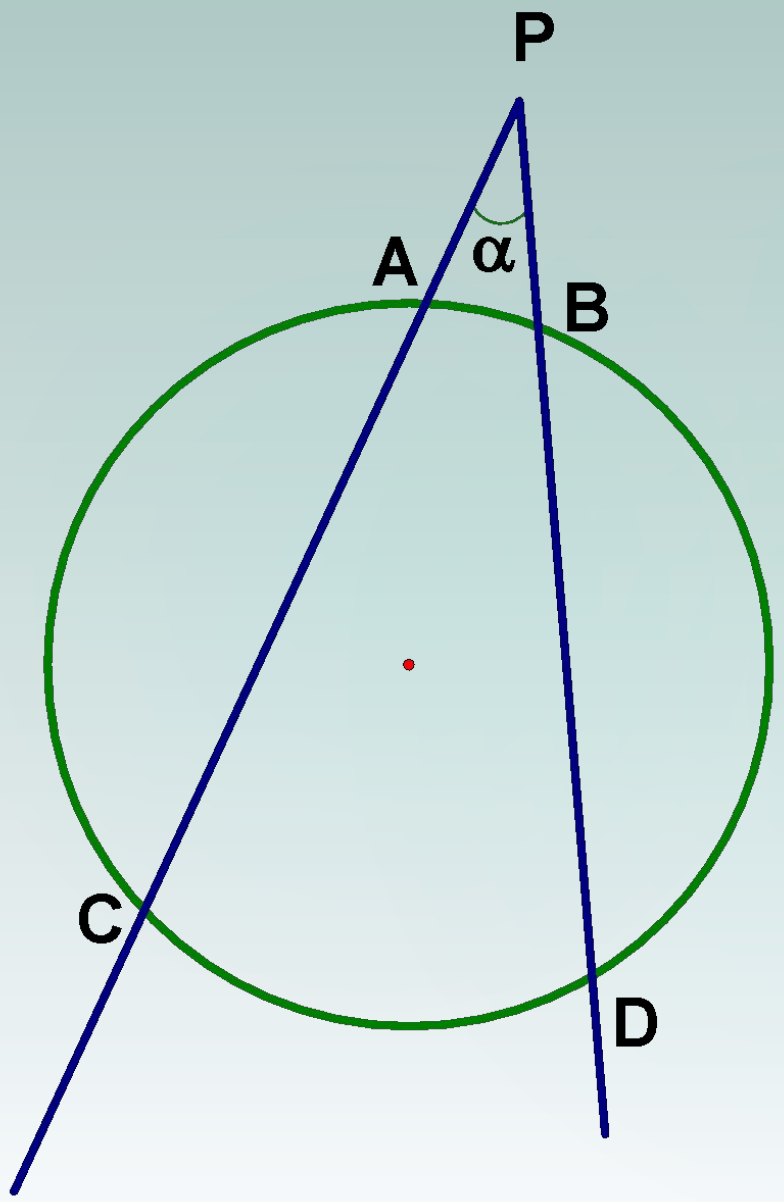


Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

$$\angle APD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile CB)$$

или

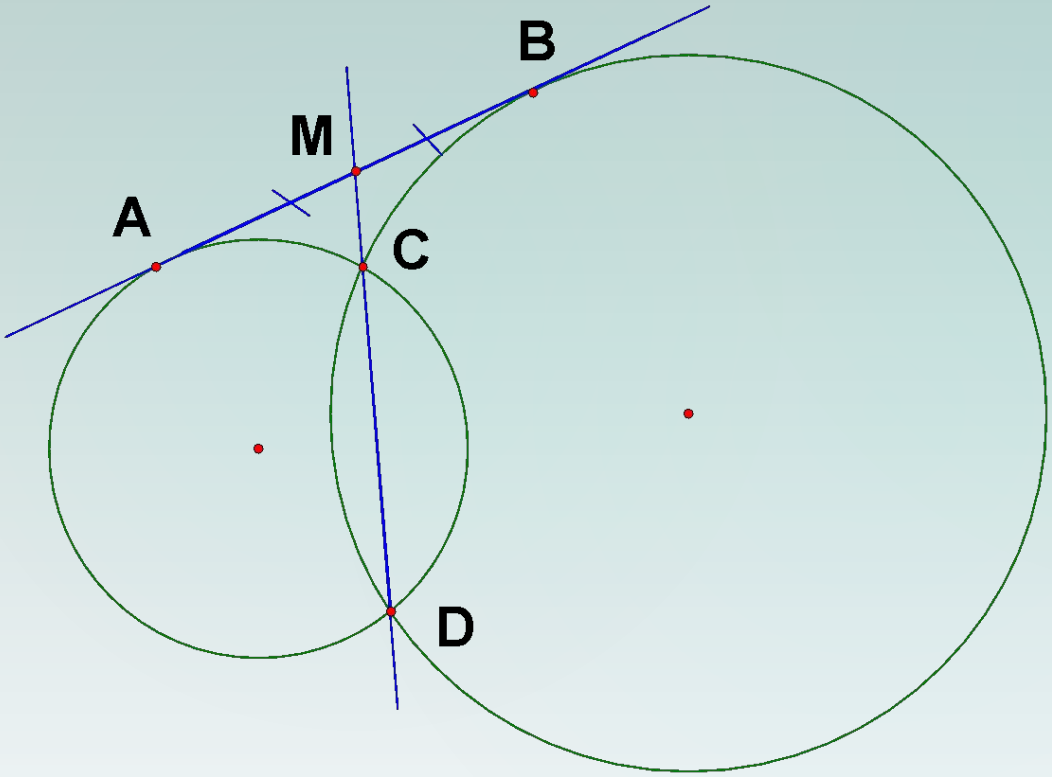
$$\angle BPD = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile BD)$$

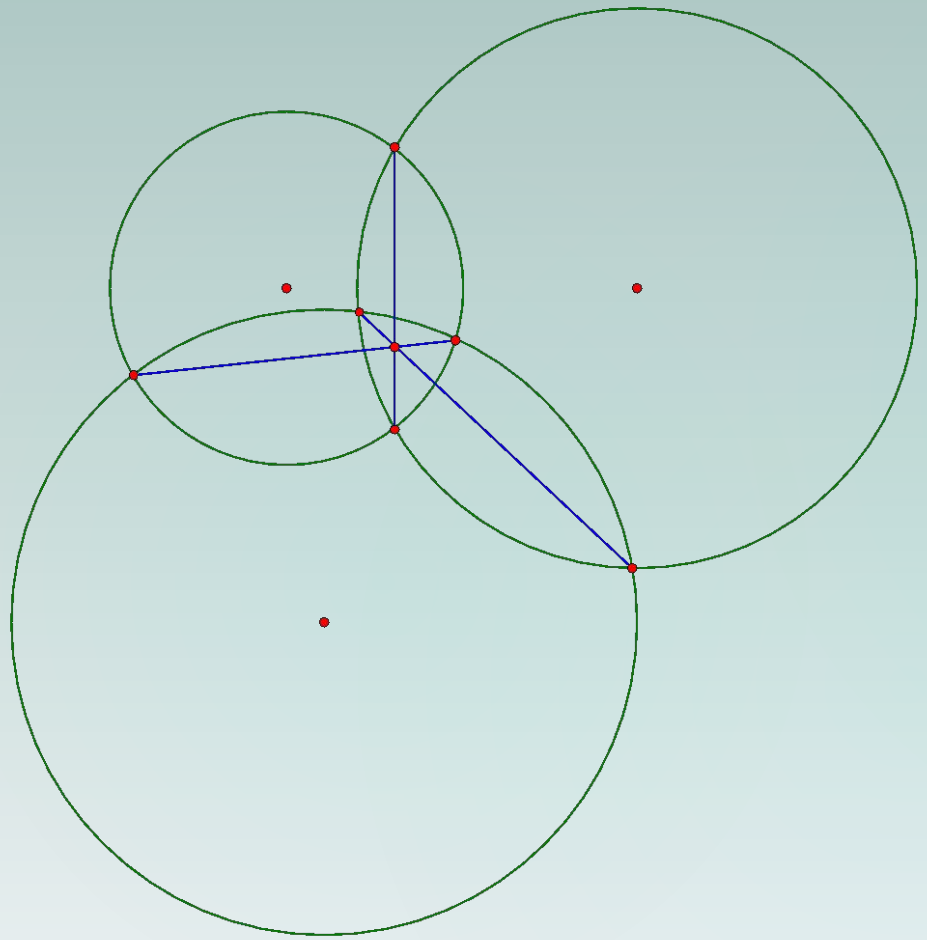


Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

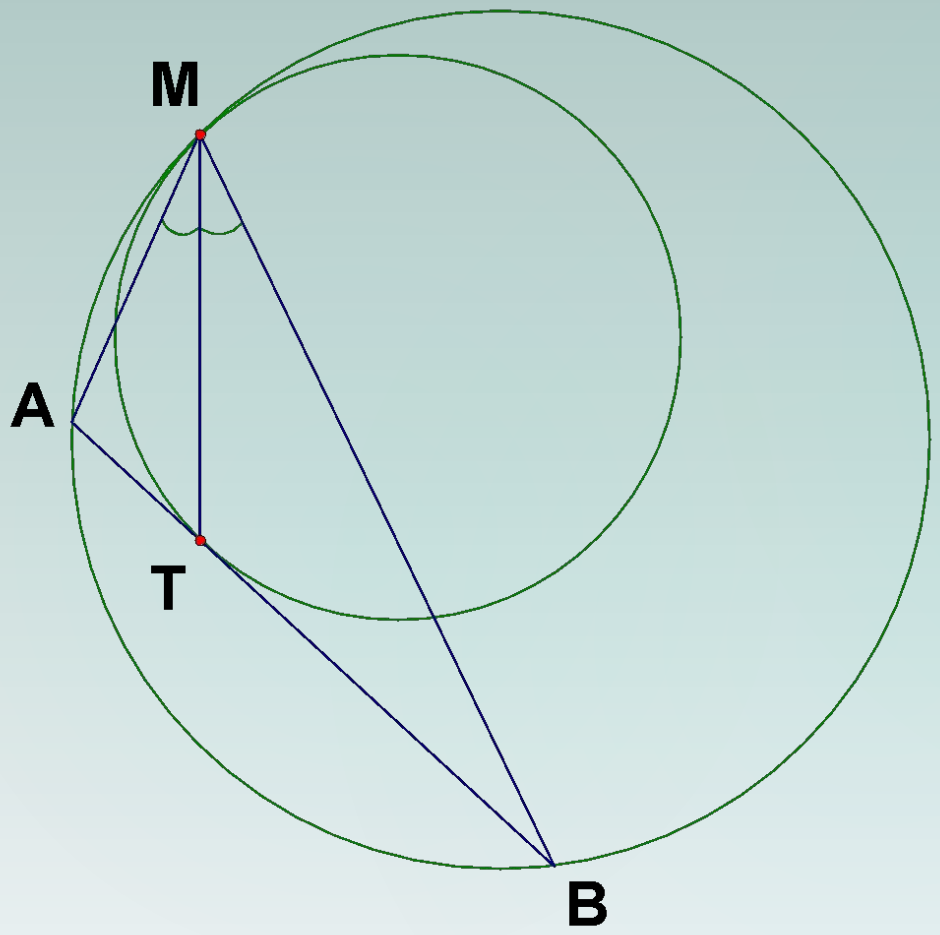
$$\angle\alpha = \frac{1}{2}(\smile CD - \smile AB)$$

Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

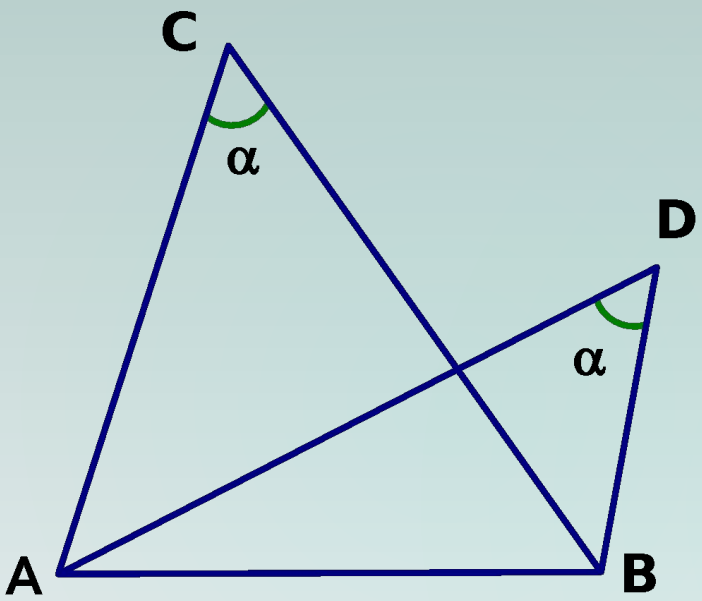




Общие хорды (или их продолжения) трёх попарно пересекающихся окружностей проходят через одну точку либо параллельны.



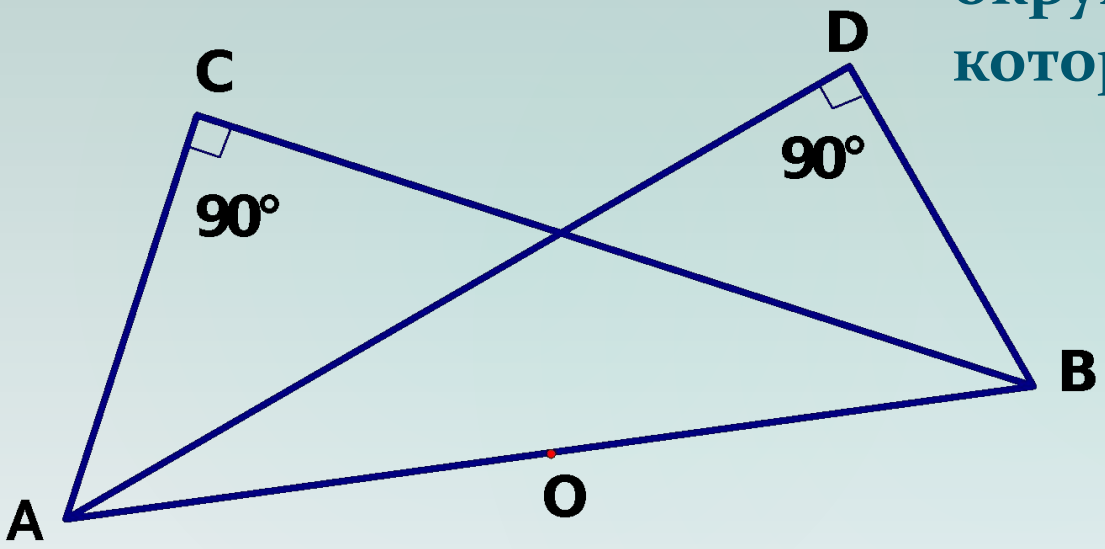
Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Если AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T, то MT — биссектриса угла AMB.



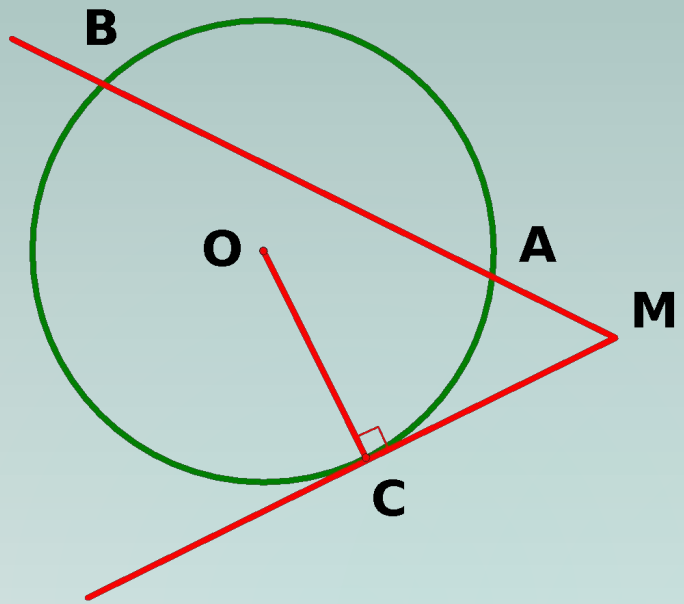
Если точки C и D расположены по одну сторону от отрезка AB и отрезок виден из этих точек под одинаковым углом, то A, B, C и D лежат на одной окружности

Как это работает...

Если из точек C и D отрезок AB виден под прямым углом, то A, B, C и D лежат на одной окружности, центр которой – середина AB.

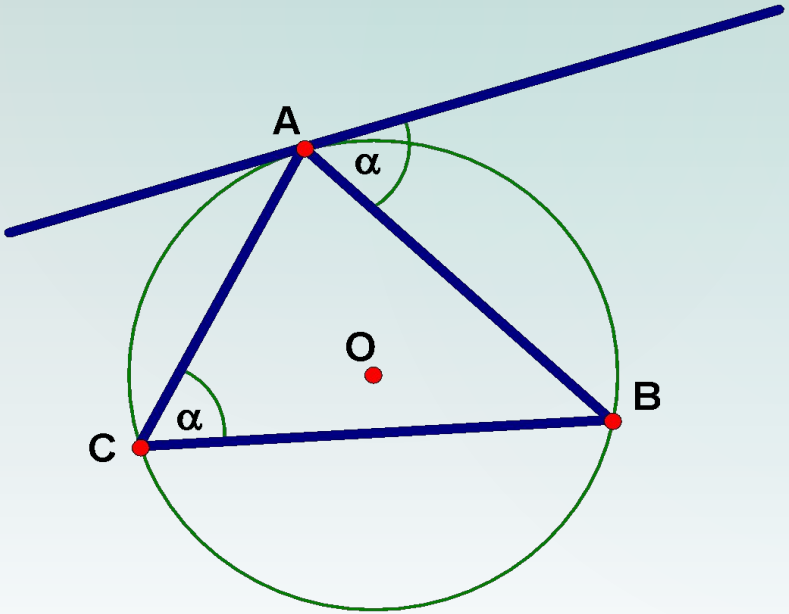


Как это работает, смотрим в следующей задаче:



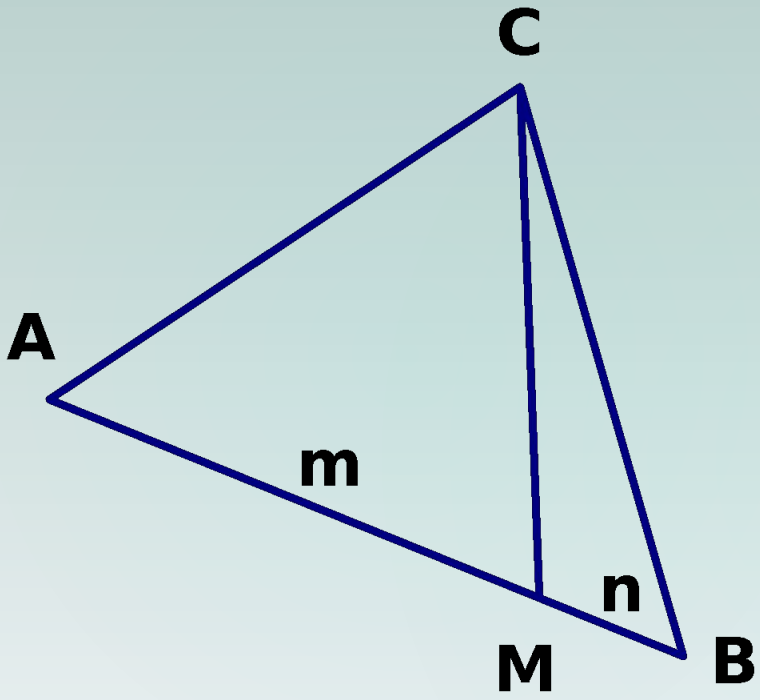
а) К окружности из одной точки проведена касательная и секущая. Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков длин секущей.

$$MC^2 = AM \cdot BM$$



б) Угол, образованный касательной и хордой, равен вписанному в эту окружность углу, опирающемуся на дугу, заключенную между касательной и хордой.

Как это работает, смотрим в следующих задачах:



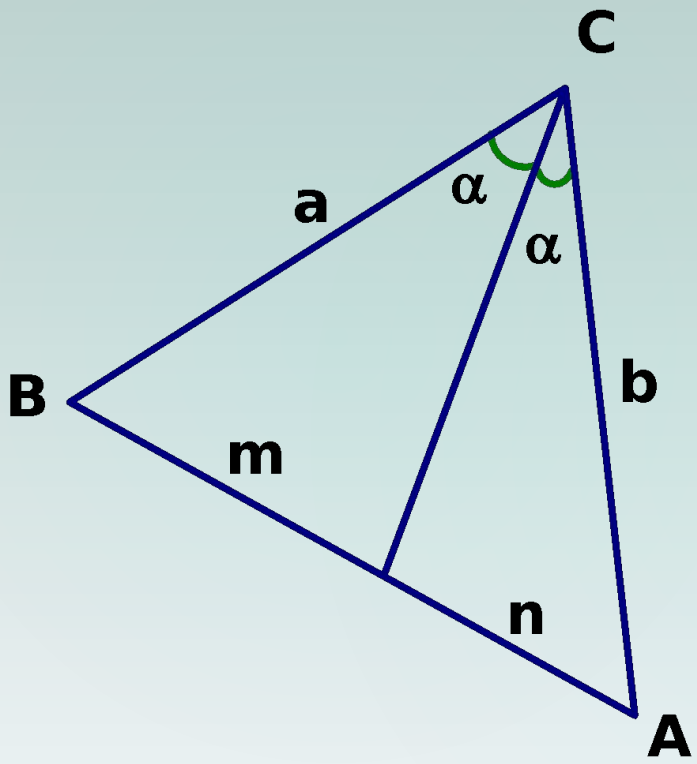
Если сторона AB треугольника ABC разделена на два отрезка m и n, тогда отношение площадей треугольников, на которые треугольник ABC разбивается отрезком CM, равно отношению этих отрезков.

$$\frac{S_{ACM}}{S_{MCB}} = \frac{m}{n}$$

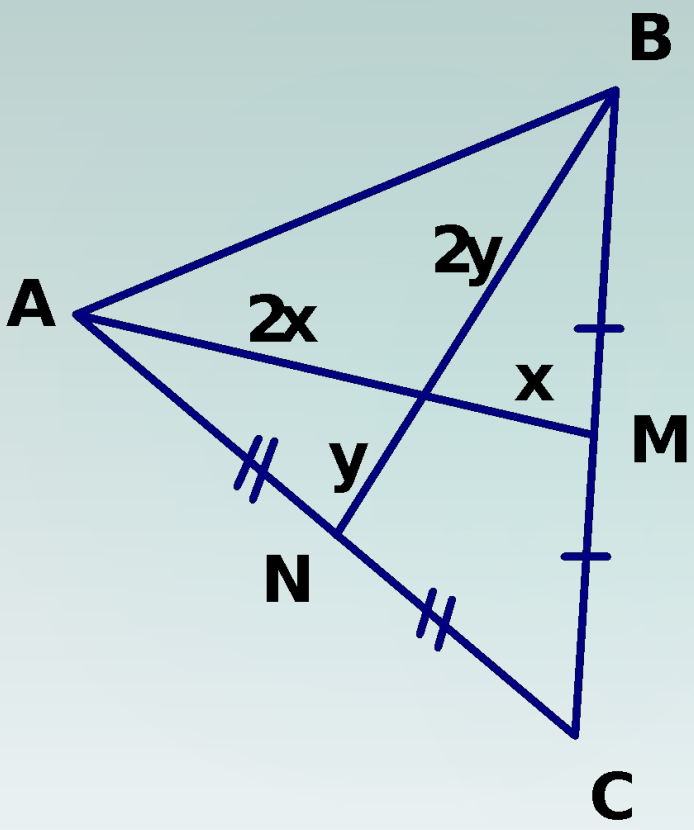
Как это работает, смотрим в следующей задаче:

Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

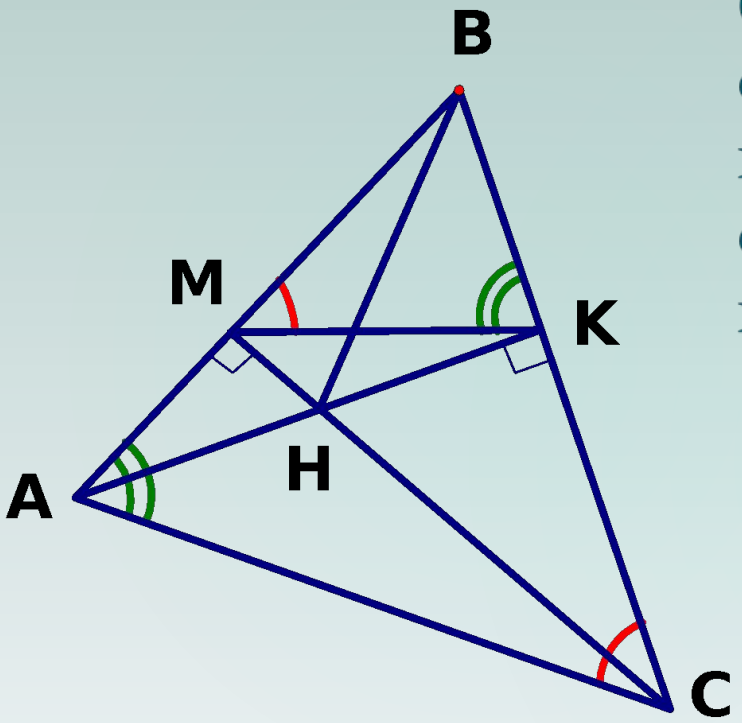


Как это работает, смотрим в следующей задаче:



Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Как это работает...



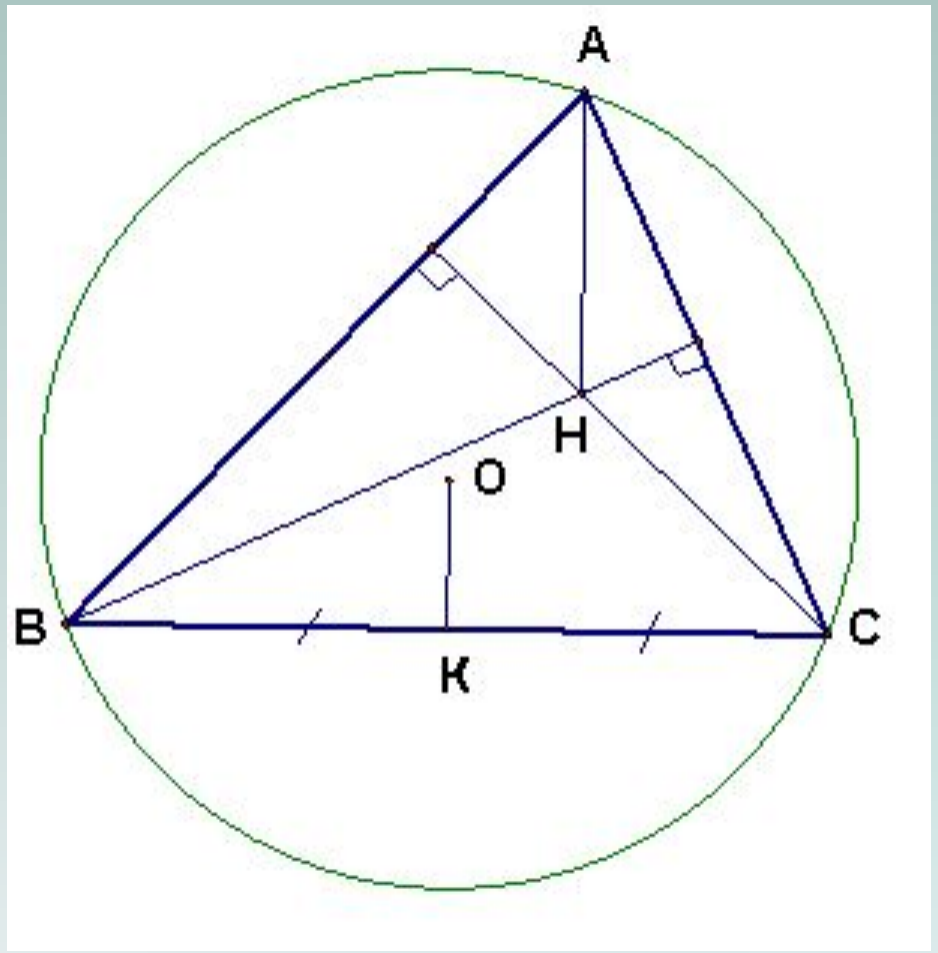
а) $\Delta MKB \sim \Delta CAB$; $k = |\cos \angle B|$;

б) Точки А, М, К, С – лежат на одной прямой;

в) Точки В, М,Н, К – лежат на одной прямой;

г) $R_{ABC} = R_{ACH} = R_{ABH} = R_{BCH}$

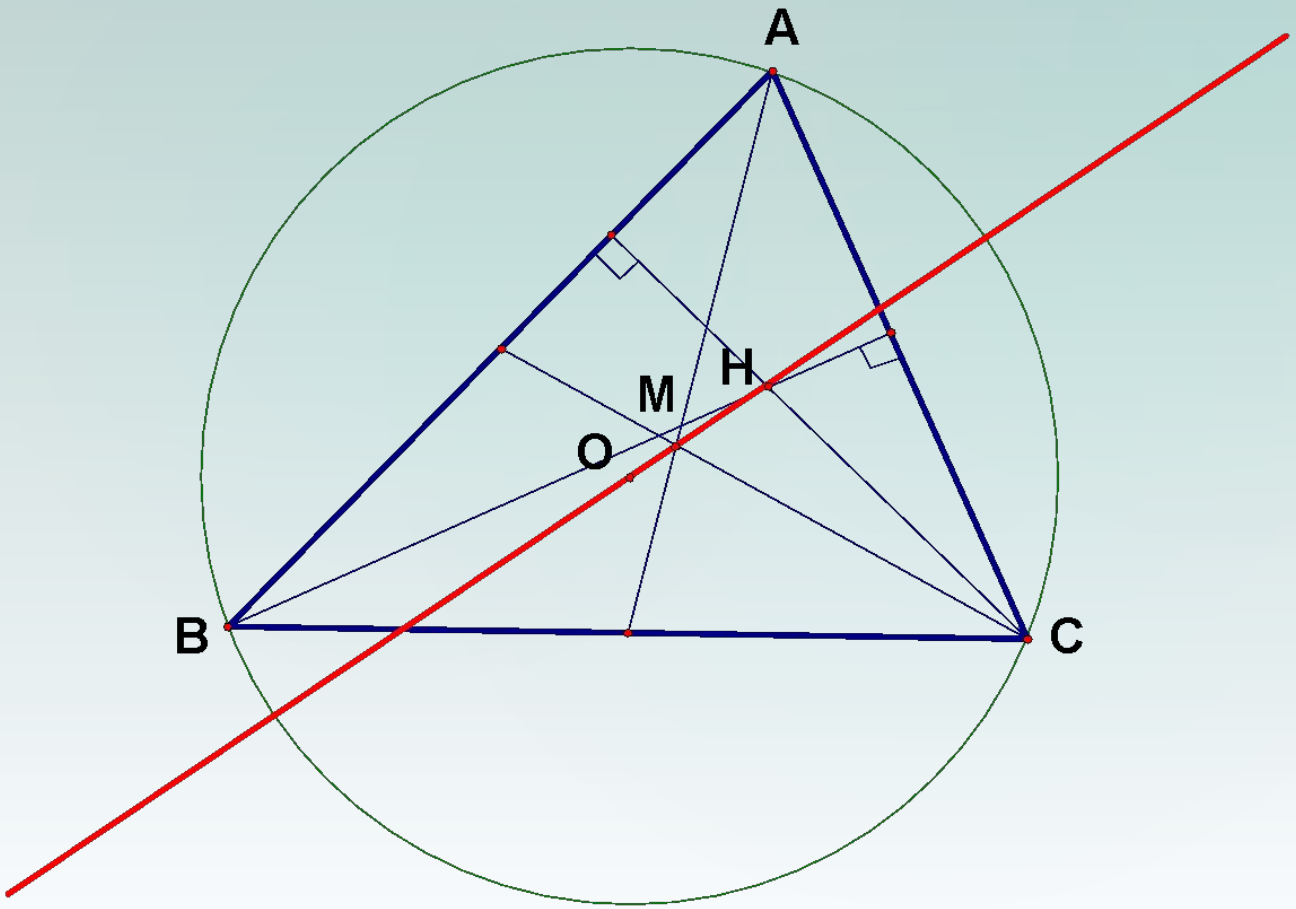
Как это работает…



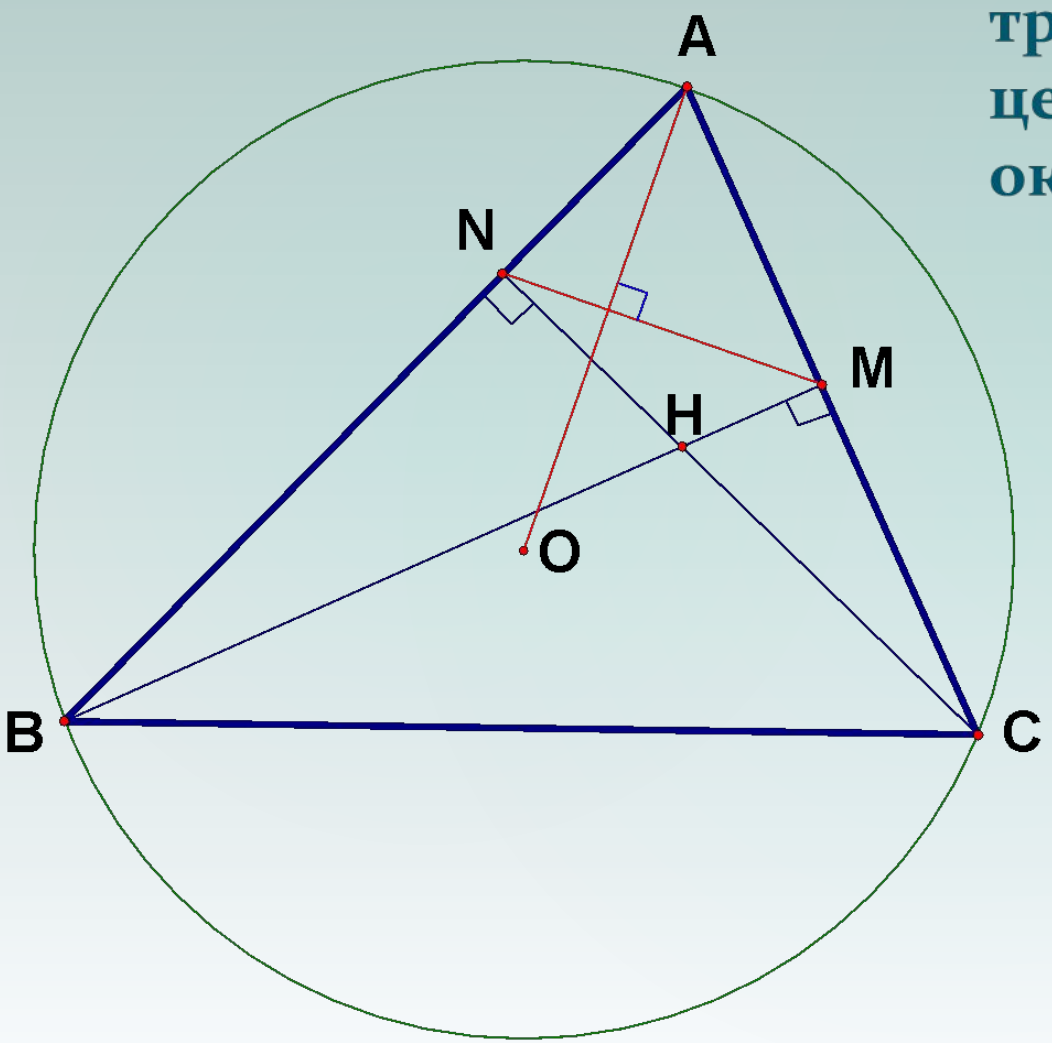
Если H точка пересечения высот треугольника ABC, а O — центр его описанной окружности, то отрезок AH вдвое больше расстояния от точки O до середины стороны BC.

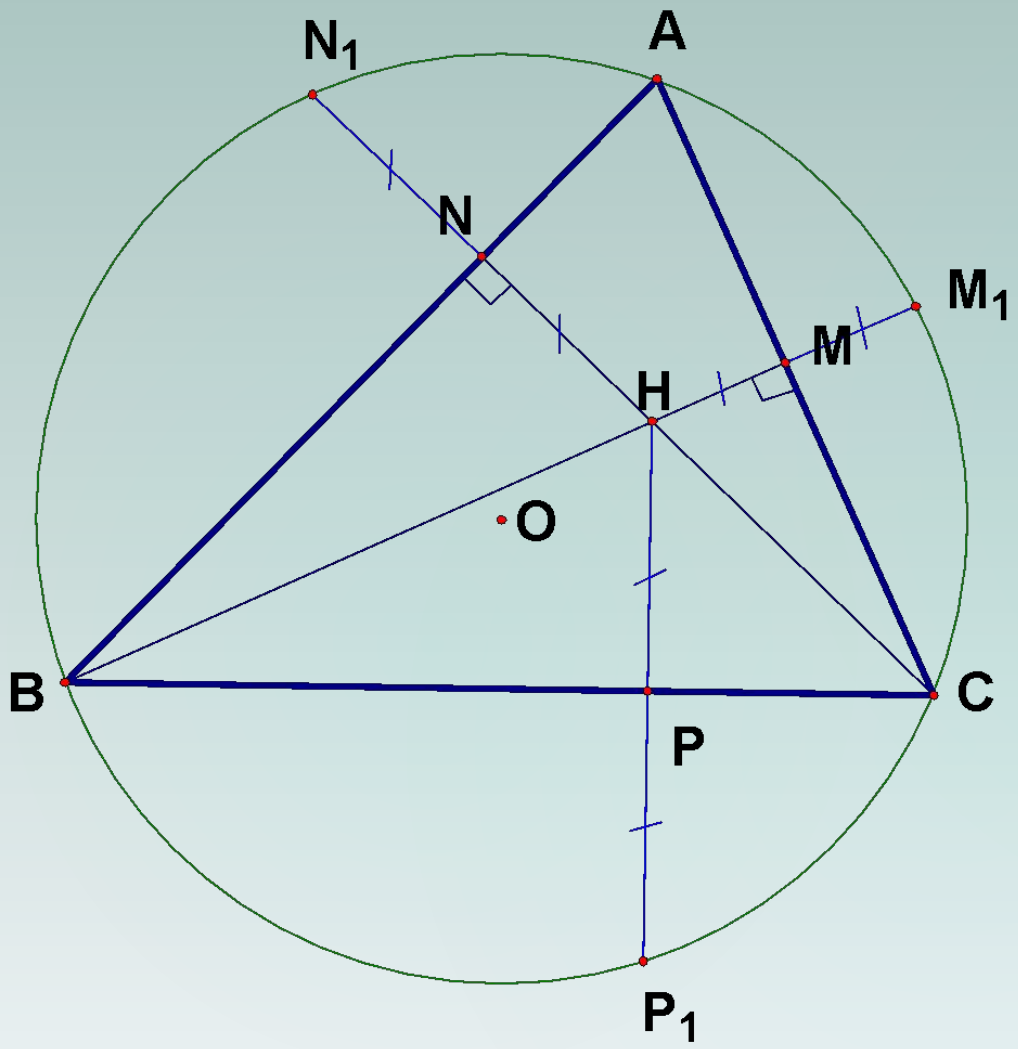
Как это доказать...

Точки О, Н и точка М пересечения медиан треугольника АВС лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причём точка М лежит на отрезке ОН и ОМ: МН = 1:2.

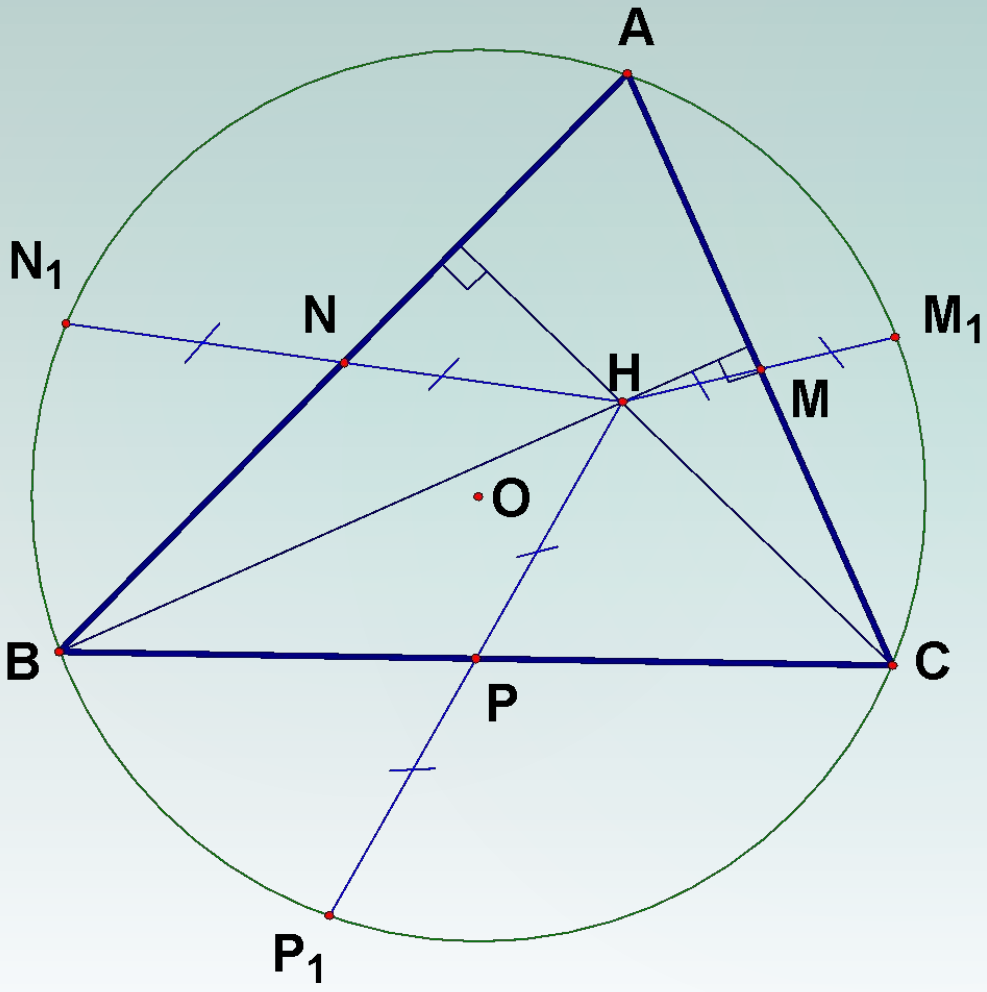


Если BM и CN — высоты треугольника ABC, а O — центр описанной окружности, то OA⊥ MN.

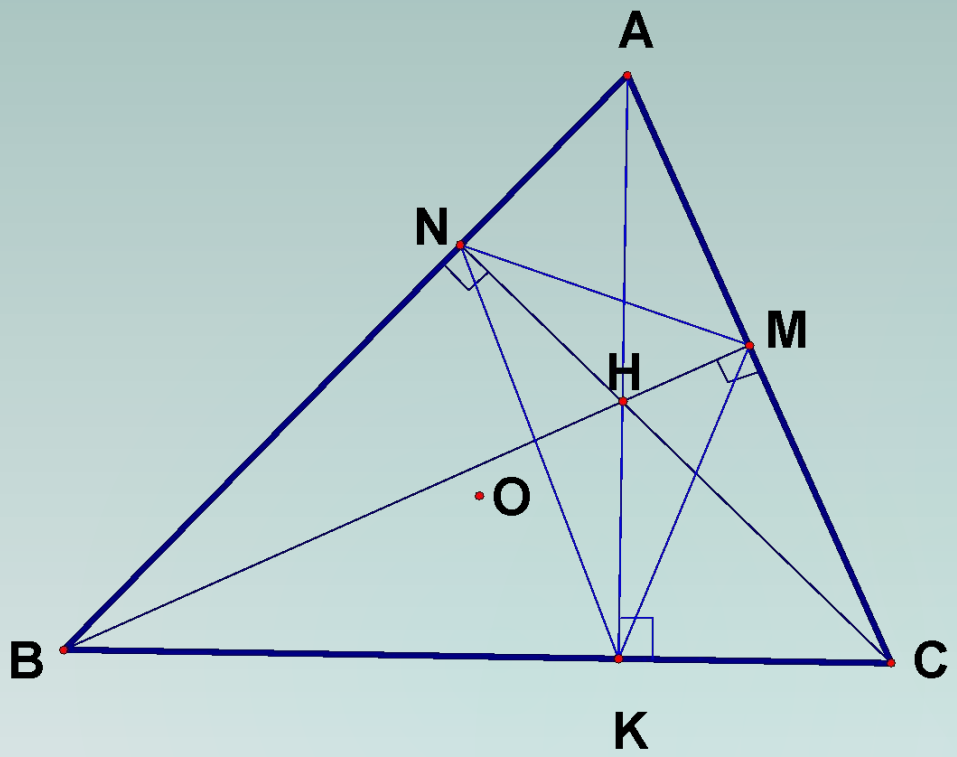


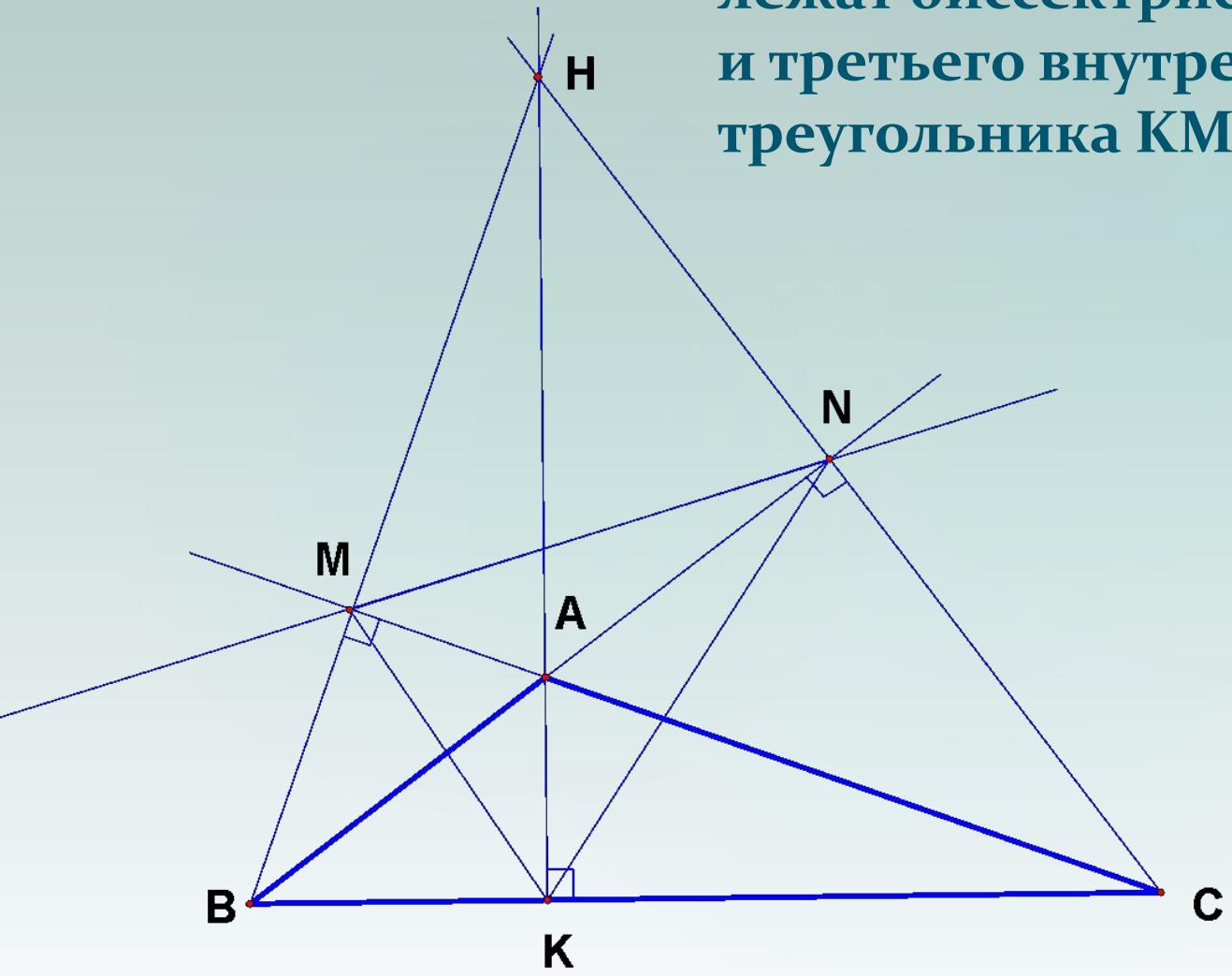


Точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно прямых AB, AC и BC, лежат на описанной окружности треугольника ABC.



Точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC.



Если АК, ВМ и CN — высоты остроугольного треугольника АВС, то биссектрисы треугольника KMN (ортотреугольника треугольника АВС) лежат на прямых АК, ВМ и CN.

Если же треугольник ABC тупоугольный, то на этих прямых лежат биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника KMN.