

Свойства педального треугольника. Точка Брокара

Выполнила работу: ученица 10 «а» класса

*МКОУ «Исилькульский общеобразовательный
лицей» Хованская Екатерина*

Преподаватель: Федотова Татьяна Николаевна

- *Актуальность исследования обусловлена ежегодным усложнением заданий ЕГЭ, что требует углубленных знаний не только в алгебре, но и геометрии.*
- ***Цель:** Рассмотреть теоретические аспекты pedalного треугольника, точки Брокара и их практическое применение.*

Задачи:

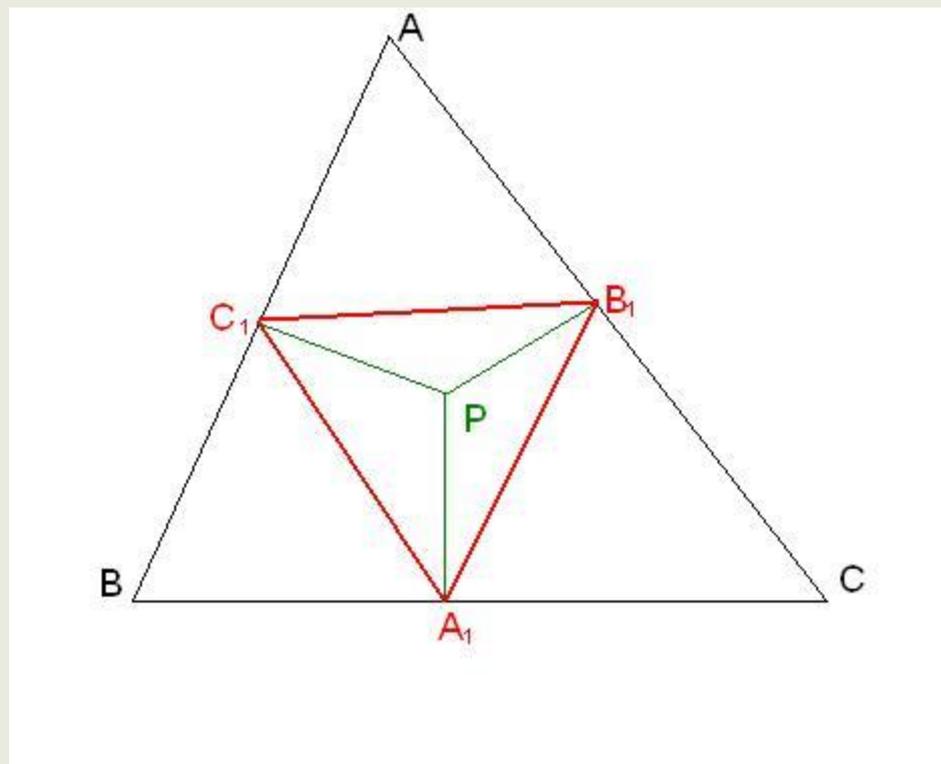
- *Дать общую характеристику треугольнику как геометрической фигуры.*
- *Рассмотреть pedalный треугольник как разновидность треугольника, точку Брокара.*
- *Показать практическое применение свойств pedalного треугольника и расположения точки Брокара.*

- *Объект исследования: треугольник - как геометрическая фигура.*
- *Предмет исследования: свойства pedalного треугольника.*
- *Гипотеза: если выяснить свойства pedalного треугольника, месторасположение точки Брокара и овладеть ими, то возникает объективная возможность для решения задач повышенной сложности.*

*Педальный треугольник как
разновидность треугольника. Точка
Брокара*

$$\sin^2 \varphi = \frac{4S^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

$$S_1 = \frac{4S^3}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$



Свойства педального треугольника и их применение в решении задач

1⁰. Если расстояние от педальной точки до вершины треугольника ABC равны x, y, z , то длины сторон педального треугольника равны $\frac{a^2}{2R}, \frac{b^2}{2R}, \frac{c^2}{2R}$, где R – радиус описанной окружности.

2⁰. Основания перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника, лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной окружности.

Свойства педального треугольника и их применение в решении задач

- **3⁰. Если из точки L внутри треугольника опущены перпендикуляры l_a, l_b, l_c , соответственно на стороны a, b, c треугольника, то $\frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c} = 1$**
- **5⁰. Третий педальный треугольник подобен исходному.**

Свойства педального треугольника и их применение в решении задач

- 4⁰. Перпендикуляры, опущенные их точки, лежащей в плоскости треугольника, на его стороны, определяют на сторонах шесть отрезков так, что сумма квадратов трех отрезков, не имеющих общих концов, равна сумме квадратов других трех отрезков.*

Задачи о педальном треугольнике, месторасположении точки Брокара

- **Задача 4.** Найти площадь педального треугольника точки Брокара, если стороны треугольника равны 4, 7 и 5 см.
- **Решение.**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$$
$$S_1 = \frac{4(4\sqrt{6})^3}{16 \cdot 49 + 49 \cdot 25 + 16 \cdot 25} = \frac{256\sqrt{6}^3}{784 + 1225 + 400} = \frac{3762}{2409} \approx 1,57$$

Терминологический словарь.

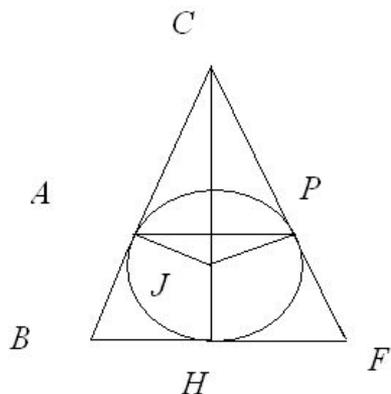
Педальный треугольник - треугольник, вершинами которого являются основания перпендикуляров, опущенных из точки, находящейся внутри треугольника. А сама эта точка называется **педальной точкой**.

Если педальную точку взять на описанной окружности, то основания перпендикуляров, опущенных от данной точки к сторонам треугольника, лежат на одной прямой, которая называется **прямой Симсона**.

Точкой Брокара называется такая педальная точка, которая при соединении с вершинами треугольника образует равные чередующиеся углы. А такие углы называются **углами Брокара**.

Задача 7. Основание равнобедренного треугольника равно 36.

Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках A и P , $AP=12$. Найдите периметр этого треугольника



Решение.

I способ

Пусть BCF – равнобедренный треугольник с основанием BF . Проведем высоту CH . Тогда $BH=HF$ и $BF=2BH=36$. Следовательно, $FH=BH=18$. Тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, $AB=BH=HF=FP=18$. Поскольку CH – ось симметрии треугольника BCF , то центр вписанной окружности лежит на CH , а $AB=FP$. Следовательно, точки A и P симметричны относительно прямой CH и поэтому $AP \parallel BF$. Значит, треугольники ACP и BCF подобны. Отсюда следует, что треугольник ACP равнобедренный и $AC=AP$. Пусть $AC=x$. Из подобия треугольников ACP и BCF следует

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BF} \quad \text{Отсюда получаем} \quad \frac{x}{x+18} = \frac{12}{36}$$

значит, $x=9$. Поэтому, $BC=CP=x+18=27$. Следовательно, искомый периметр треугольника BCF равен $BF+2BC=36+54=90$.

Задача 7. Основание равнобедренного треугольника равно 36.

Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках A и P , $AP=12$. Найдите периметр этого треугольника.

II способ

Так как дана вписанная окружность, то J – есть педальная точка, тогда треугольник APH – педальный.

$$p = \frac{BC + BF + CF}{2}, \quad BC=CF, \text{ так как треугольник } BCF\text{- равнобедренный, } BC=x \quad \frac{x + x + 36}{2} = p$$

$$(2x^2 - 36) \cdot 18 = 12x \quad x \neq 0$$

$$36x - 648 = 12x,$$

$$24x = 648,$$

$$x = 27$$

$$BC=27, \quad CF=27, \quad BF=36.$$

$$P_{BCF} = 27 + 27 + 36 = 90.$$

По изученным свойствам педального треугольника

$$AP = 2(p - BF) \sqrt{\frac{(p - BC)(p - CF)}{BC \cdot CF}} = 2(x + 18 - 36) \sqrt{\frac{(x + 18 - x)(x + 18 - x)}{x \cdot x}} = 2(x - 18) \frac{18}{x} = 12$$

Таким образом, знание свойств педального треугольника, месторасположения точки Брокера значительно упрощают решение сложных математических задач.