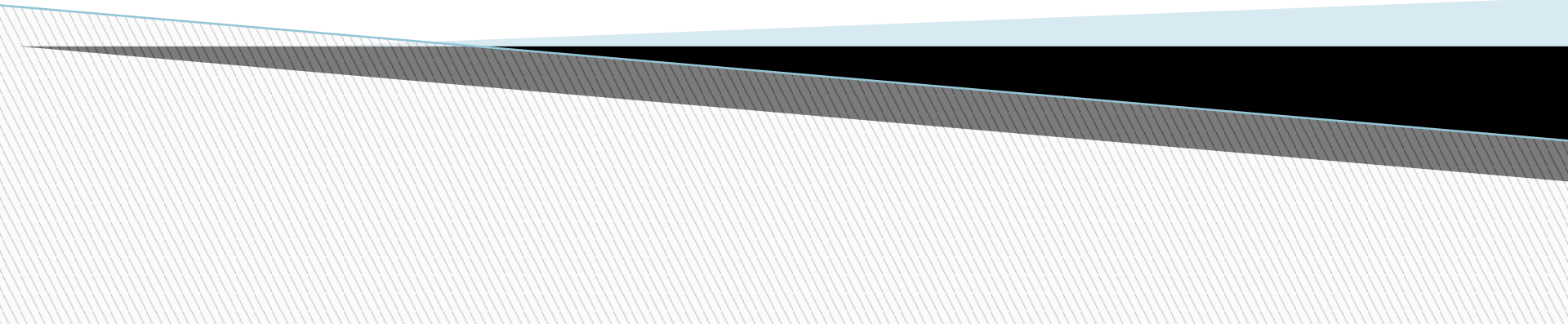


Теорема Пифагора



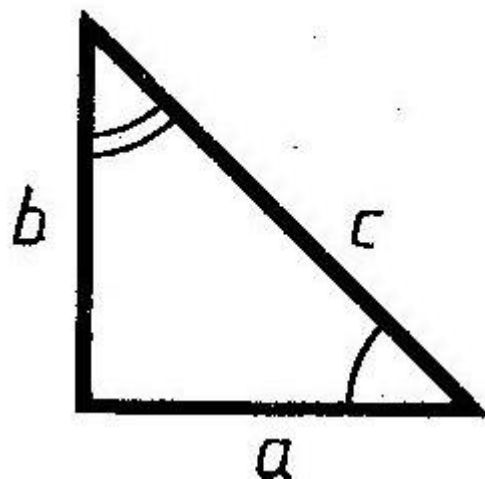
Историческая справка



Пифагор — древнегреческий ученый VI в. до н. э.

Историческая справка. Существует замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника, справедливость которого была доказана древнегреческим философом и математиком Пифагором (VI в. до н.э.). Но изучение вавилонских клинописных таблиц и древних китайских рукописей показало, что это утверждение было известно задолго до Пифагора. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он открыл доказательство этой теоремы.

Теорема. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*



$$c^2 = a^2 + b^2.$$

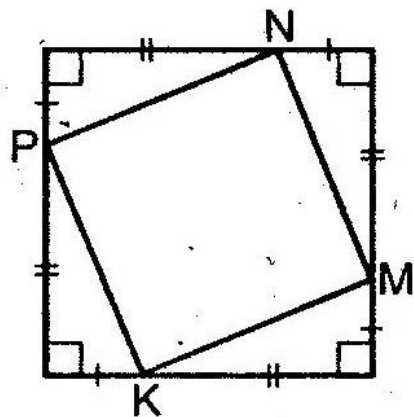


Рис. 376

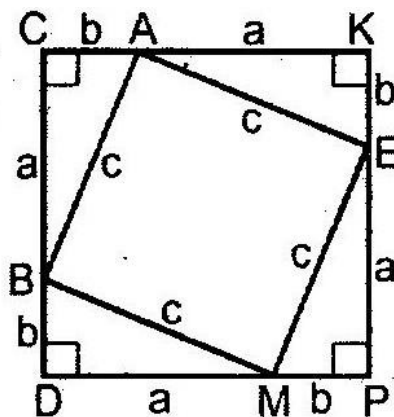


Рис. 377

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство:

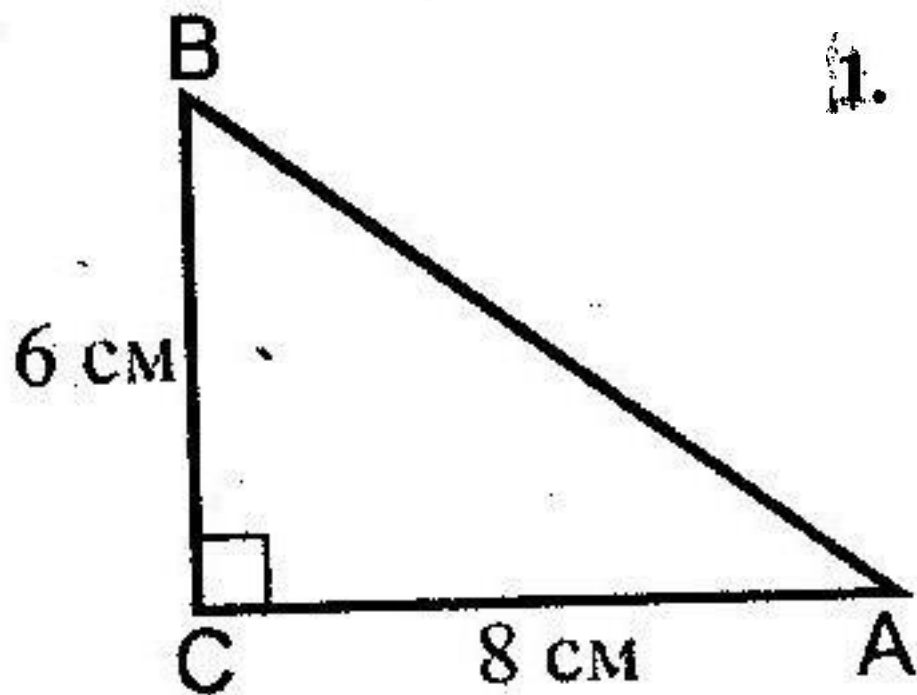
а) Построим $\triangle ABC$ до квадрата $CKPD$ со стороной $(a + b)$;
 $S_{CKPD} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

б) $\triangle BCA = \triangle AKE = \triangle EPM = \triangle MDB$ по двум катетам.
 $S_{BCA} = S_{AKE} = S_{EPM} = S_{MDB} = ab/2$.

в) $BAEM$ — квадрат, $S_{BAEM} = c^2$.

г) $S_{CKPD} = S_{BAEM} + S_{BCA} + S_{AKE} + S_{EPM} + S_{MDB} = c^2 + 4 \cdot ab/2 =$
 $= c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Решение задач по готовым чертежам



1. Рис. 379. Найти: AB .

Рис. 379

Решение задач по готовым чертежам

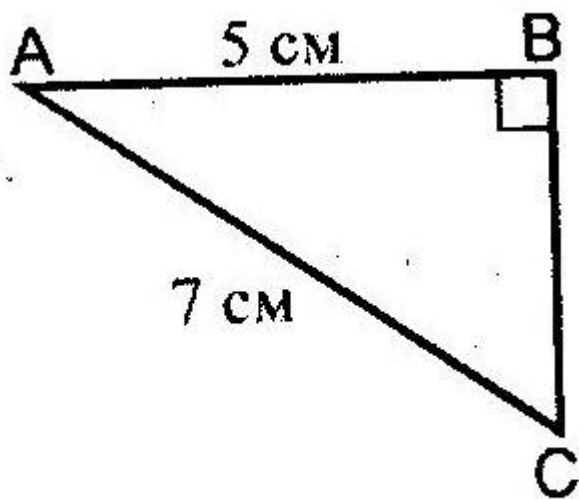


Рис. 380

2. Рис. 380. *Найти: BC .*

Решение задач по готовым чертежам

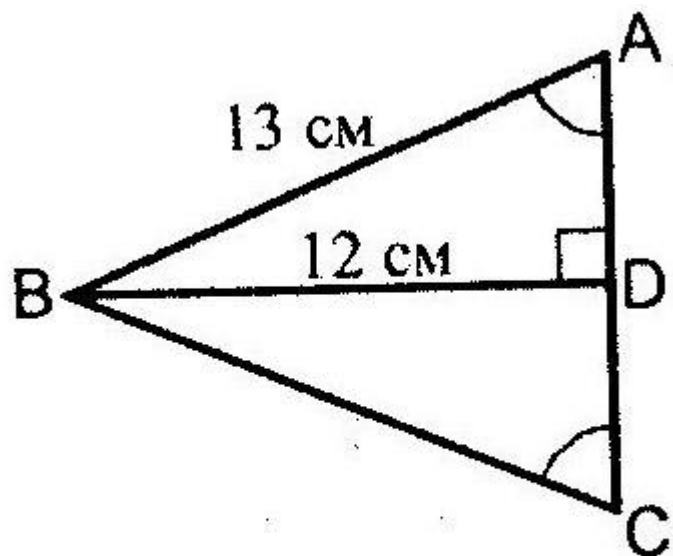


Рис. 381

3. Рис. 381. *Найти: AC.*

Решение задач по готовым чертежам

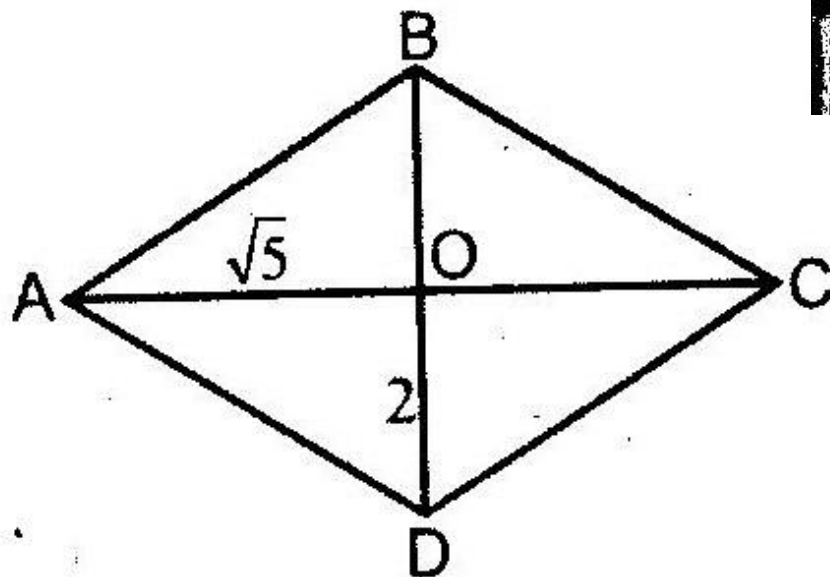


Рис. 382

Рис. 382. $ABCD$ ромб.
Найти: BC .

Решение задач по готовым чертежам

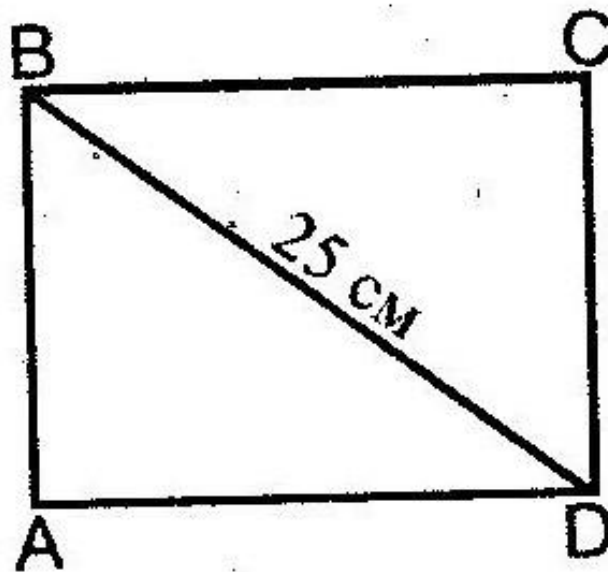


Рис. 383

5. Рис. 383. $ABCD$ – прямоугольник. $AB : AD = 3 : 4$.
Найти: AD .

Решение задач по готовым чертежам

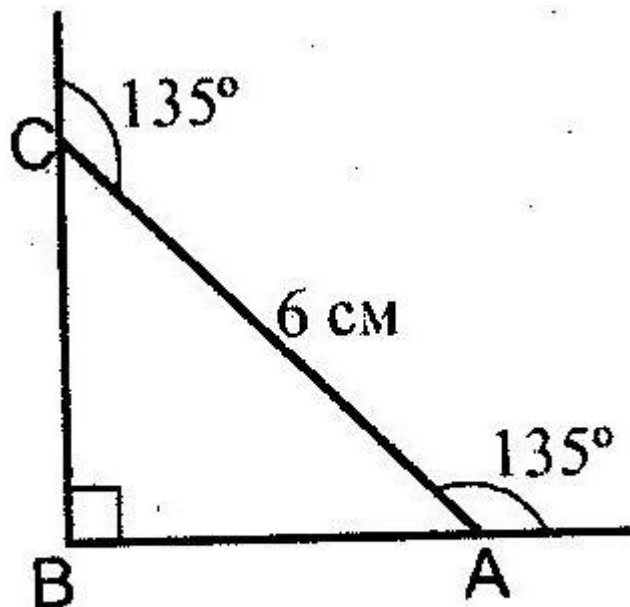


Рис. 384

6. Рис. 384. Найти: AB .

Ответы к задачам

1. $AB = 10$ см.

3. $AC = 10$ см.

5. $AD = 4$ см.

7. $AC = 24$ см; $S_{ABCD} = 120$ см².

2. $BC = 2\sqrt{6}$ см.

4. $BC = 3$.

6. $AB = 3\sqrt{2}$ см.

Решить задачи

□ 1) № 483(а,б); 484(а,б); 487

□ 2) Дополнительные задачи:

1. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание – 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см. (*Ответ: $S_{ABCD} = 50 \text{ см}^2$.*)
2. Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 18 см, а боковая сторона равна 5 см. Найдите площадь трапеции. (*Ответ: 42 см^2 .*)

Устно:

Сформулировать утверждения, обратные данным и выяснить, верны ли они:

- Сумма смежных углов равна 180° .
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- Вертикальные углы равны.
- В параллелограмме противоположные стороны равны.
- В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Дано: $\triangle ABC$, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Выяснить, является ли $\triangle ABC$ прямоугольным?

Решение:

- а) Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ такой, что $\angle C = 90^\circ$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тогда по теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$.
- б) Так как $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, то:
 $A_1C_1^2 + B_1C_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, следовательно, $AB^2 = A_1B_1^2$ и $AB = A_1B_1$.
- в) $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ по трем сторонам, откуда $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ – прямоугольный. Итак, если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

1. Решить устно задачи № 498 (а, б, в)
2. Решить задачу № 499 (а) письменно

Решить самостоятельно задачи:

1. Определите углы треугольника со сторонами $1, 1, \sqrt{2}$.

(Ответ: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.)

2. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. На стороне AC отмечена точка M так, что $AM = 1$, $BM = 1$. Найдите AC .

(Ответ: $1 + \sqrt{3}$.)

3. В треугольнике MPK $PK = 2$. На стороне MK отмечена точка A так, что $MA = AP = \sqrt{3}$, $AK = 1$. Найдите $\angle MPK$.

(Ответ: 75° .)

Домашнее задание

П. 54, вопрос 8;

Решить задачи № 483 в), г), 484 в), г), д), 486 в);

П. 55; вопросы 9, 10.

Решить задачи № 498 (г, д, е), № 499 (б), 488

Дополнительные задачи:

1. В некоторой трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и $\sqrt{577}$ см соответственно, высота трапеции – 24 см, меньшее основание – 7 см. Найдите площадь трапеции и вторую боковую сторону.
2. В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и $\sqrt{82}$ см соответственно. Большая диагональ 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение задач по теме «Теорема Пифагора»

»» Урок 27

Решение задач по готовым чертежам

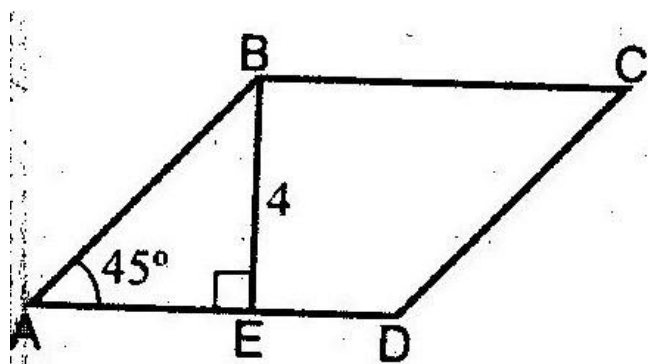


Рис. 385

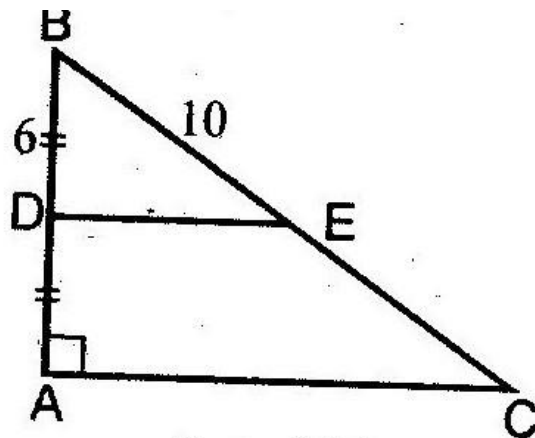


Рис. 386

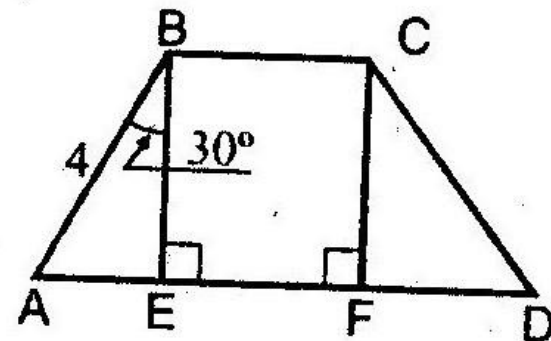


Рис. 387

1. Рис. 385. $ABCD$ – параллелограмм. Найти: CD .
2. Рис. 386. $DE \parallel AC$. Найти: AC .
3. Рис. 387. $ABCD$ – трапеция. Найти: CF .

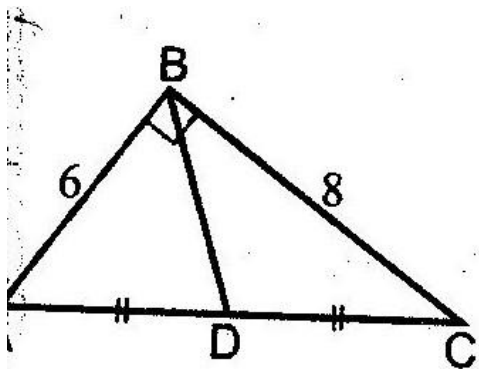


Рис. 388

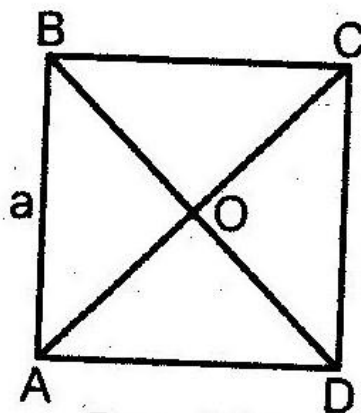


Рис. 389

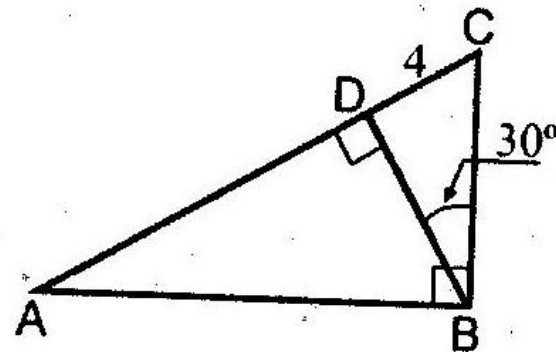


Рис. 390

4. Рис. 388. Найти: BD .
5. Рис. 389. $ABCD$ – квадрат. Найти: AO .
6. Рис. 390. Найти: DC ; AC ; AB .

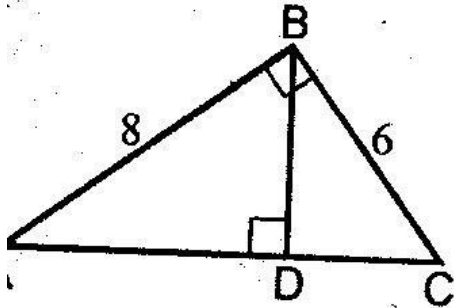


Рис. 391

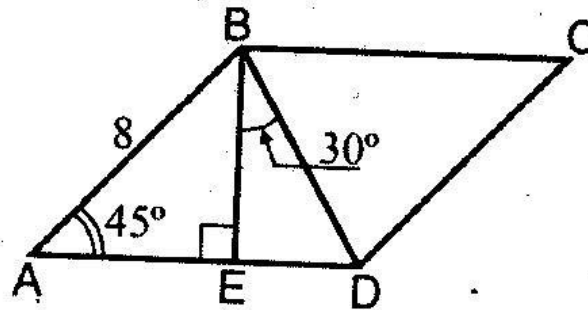


Рис. 392

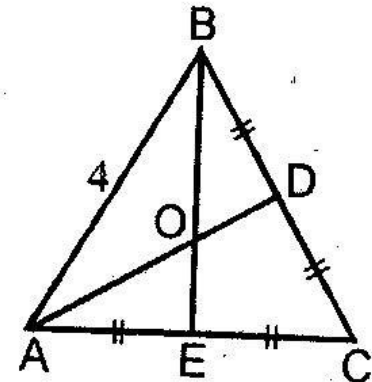


Рис. 393

7. Рис. 391. Найти: BD .
8. Рис. 392. $ABCD$ – параллелограмм. Найти: AD .
9. Рис. 393. $\triangle ABC$ – равносторонний. Найти: AO , OE .

Ответы к задачам

1. $CD = 4\sqrt{2}$.

3. $CF = 2\sqrt{3}$.

5. $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

7. 4,8.

9. $OE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $AO = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

2. $AC = 16$.

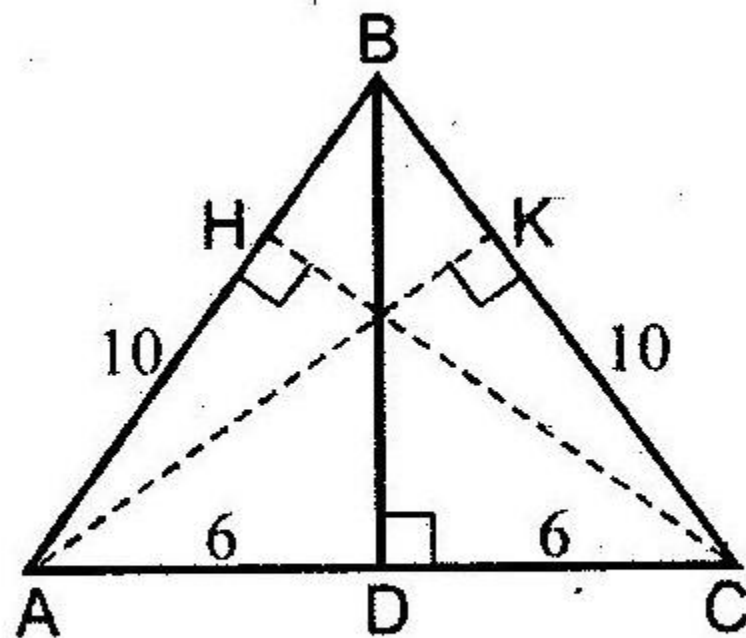
4. $BD = 5$.

6. $DC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8\sqrt{3}$; $AB = 16$.

8. $AD = 4\sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решить задачи № 492, 495а), записав краткое решение

№ 492



Puc. 394

№ 492

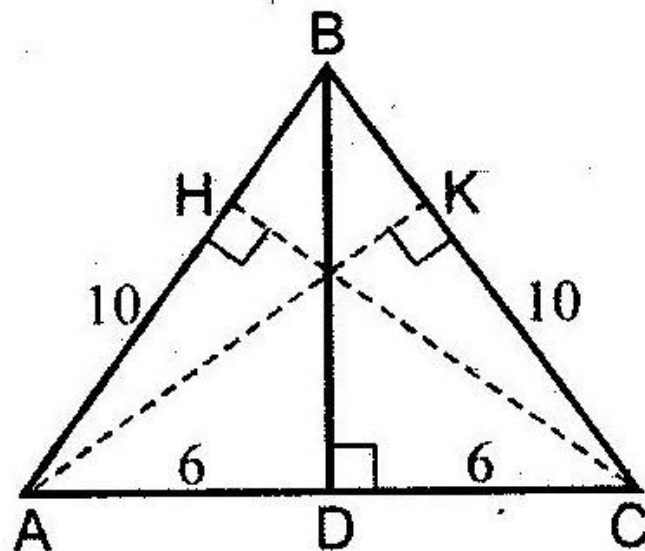


Рис. 394

Из $\triangle ABD$ $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

$\triangle ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow CH = AK$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} CH \cdot AB \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9,6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 18; 9,6; 9,6 см.

495a)

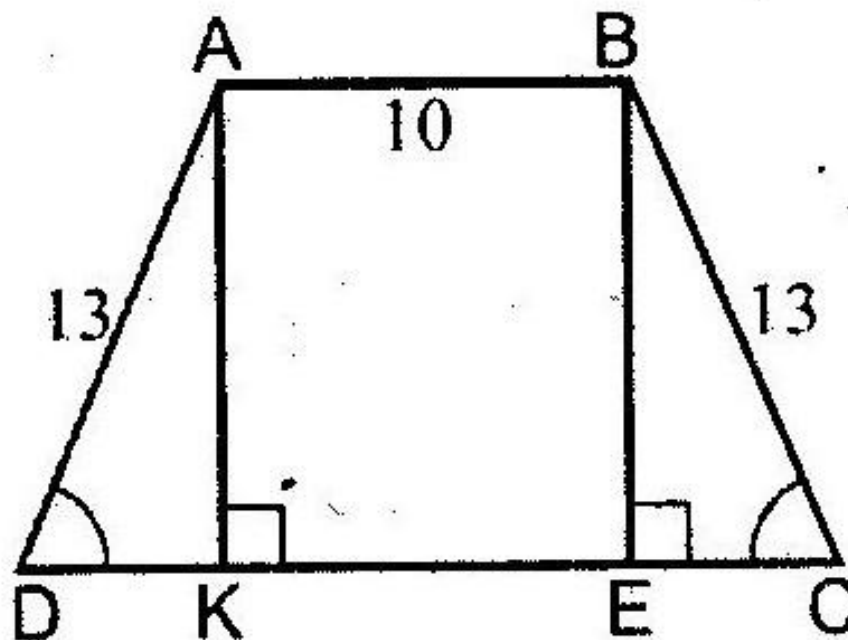


Рис. 395

495a)

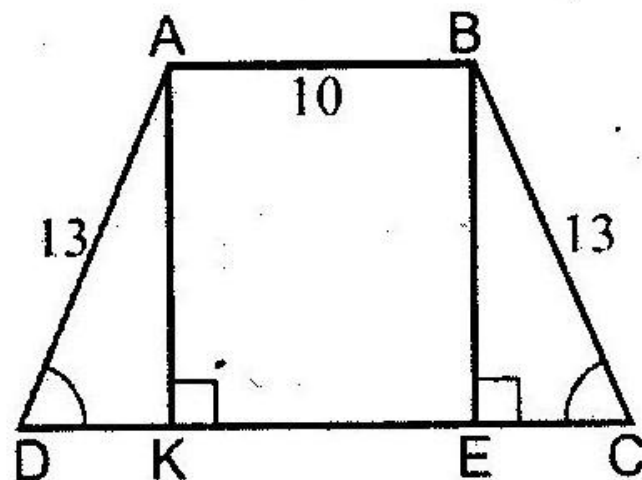


Рис. 395

$DK = CE$ ($\triangle ADK = \triangle BCE$ по гипотенузе и острому углу),
 $ABEK$ – прямоугольник, тогда $KE = 10$ см, $DK = \frac{20-10}{2} = 5$ (см).

$\triangle ADK$ – прямоугольный $\Rightarrow AK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AK \cdot (AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (10 + 20) = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 180 см^2 .

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. Рис. 396.

Так как $AC = 14$ см, $BD = 48$ см, то $AO = 7$ см, $BO = 24$ см.

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 7^2 + 24^2 = 625. AB = 25 \text{ см.}$$

Ответ: $AB = 25$ см.

2. Рис. 397. $\triangle ABC$ – прямоугольный, равнобедренный

$$x^2 + x^2 = 20^2; x = 10\sqrt{2}.$$

Ответ: $10\sqrt{2}$ см, $10\sqrt{2}$ см.

II вариант

1. Рис. 398.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 12^2 + 8^2 = 208. AC = 4\sqrt{13} \text{ см.}$$

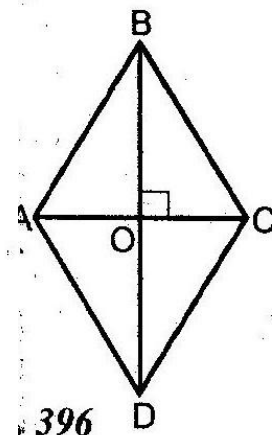
Ответ: $10\sqrt{2}$.

2. Рис. 399. Так как $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 90^\circ$, то $AC = BC : 2$, т. е.

$$AC = x \text{ см, } BC = 2x \text{ см.}$$

$$x^2 + 6^2 = (2x)^2; x = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$.



396

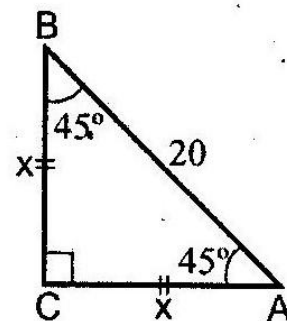


Рис. 397

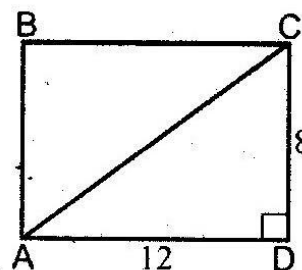


Рис. 398

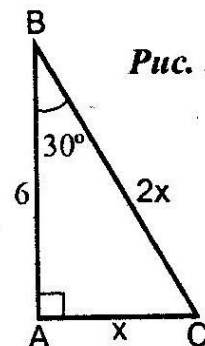


Рис. 399

II уровень

вариант

1. Рис. 400. Проведем $CE \perp AD$. $CD^2 = CE^2 + DE^2$; $CE = 5$ см.

$$S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 55 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 55 см².

2. Рис. 401.

Проведем $BE \perp AC$, тогда в $\triangle ABE$ $AE = BE = x$ см, $\angle E = 90^\circ$,

$$AB^2 = x^2 + x^2, \text{ откуда } x = 5\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 30\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

Ответ: $30\sqrt{2}$ см².

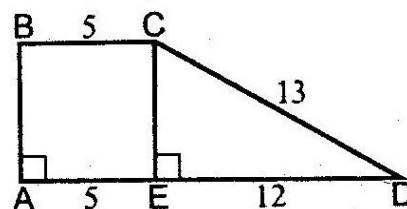


Рис. 400

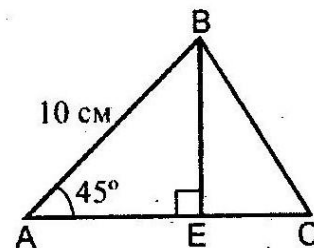


Рис. 401

II вариант

1. Рис. 402.

Проведем $CE \perp AD$.

$$DE^2 = CD^2 - CE^2 = 144, DE = 12 \text{ см, тогда } BC = AE = 8 \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 126 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 126 см².

2. Рис. 403.

Проведем $BE \perp AC$, тогда в $\triangle ABE$ $AE = 6$ см,

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 108, BE = 6\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 24\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $24\sqrt{3}$ см².

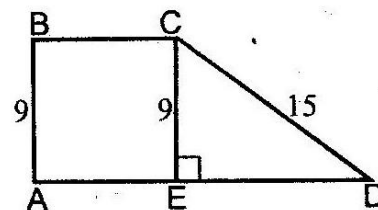


Рис. 402

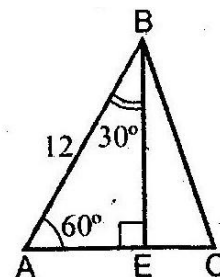


Рис. 403

III уровень

I вариант

1. Рис. 404.

$$BO = OD = BD : 2 = \sqrt{41} \text{ см. } AO = OC = AC : 2 = 13 \text{ см.}$$

Если $KD = x$ см, то $AK = 16 - x$ (см).

$$OK^2 = OD^2 - KD^2 = AO^2 - AK^2.$$

$$41 - x^2 = 13^2 - (16 - x)^2; x = 4.$$

$$KD = 4 \text{ см, } AK = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 4 см, 12 см.

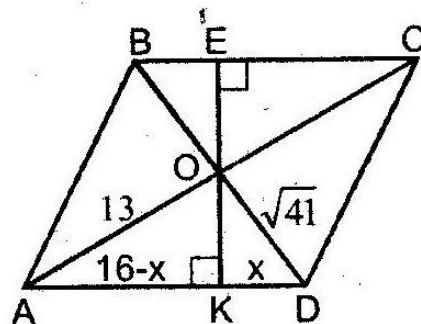


Рис. 404

2. Рис. 405.

$$AB = BC = BK + KC = 25 \text{ см. } AK^2 = AB^2 - BK^2 = 49, AK = 7 \text{ см.}$$

$$AC^2 = AK^2 + KC^2 = 50, AC = 5\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$S_{ABC} = AK \cdot BC : 2 = 7 \cdot 25 : 2 = 87,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $AC = 5\sqrt{2}$ см. $S = 87,5 \text{ см}^2$.

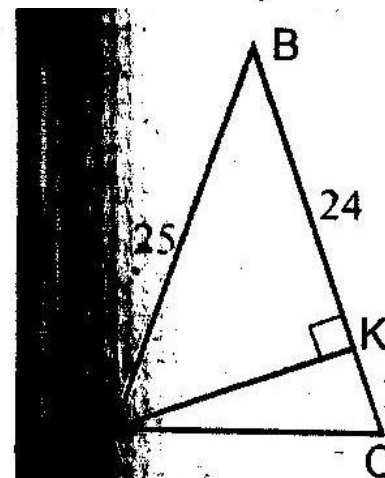


Рис. 405