



Золотое сечение или Код да Винчи

«Есть в математике нечто,
вызывающее человеческий
восторг».

Ф. Хауздорф.

Содержание

- Золотое сечение – гармоническая пропорция.
- История Золотого сечения.
- Деление отрезка в золотом отношении.
- Золотой треугольник.
- Золотой прямоугольник.
- Пентаграмма.
- Золотой прямоугольный треугольник.
- Золотой эллипс.
- Золотое сечение в природе.
- Пропорция и Золотое сечение во внешних формах человека.
- Золотое сечение в живописи.
- Золотое сечение в архитектуре и скульптуре .
- Золотое сечение в поэзии.
- Золотое сечение в музыке.



Золотое сечение - гармоническая пропорция

Математическое понимание гармонии

- **Гармония** – связь, созвучие, соразмерность, согласованность частей одного целого.
- **Математическая гармония** - это равенство или соразмерность частей друг с другом и части с целым.

Понятие математической гармонии тесно связано с понятиями **пропорции** и **симметрии**.

Золотое сечение – гармоническая пропорция

- **Пропорция** (от лат. *proportio*) означает «соразмерность», «определенное соотношение частей между собой».
- В математике **пропорцией** называют равенство двух отношений:

$$a : b = c : d.$$

- Отрезок прямой АВ можно разделить на две части следующими способами:
 - а) на две равные части;
 - б) на две неравные части в любом отношении (такие части пропорции не образуют);
 - в) таким образом, когда $AB : AC = AC : BC$.Последнее и есть золотое деление или деление отрезка в крайнем и среднем отношении.

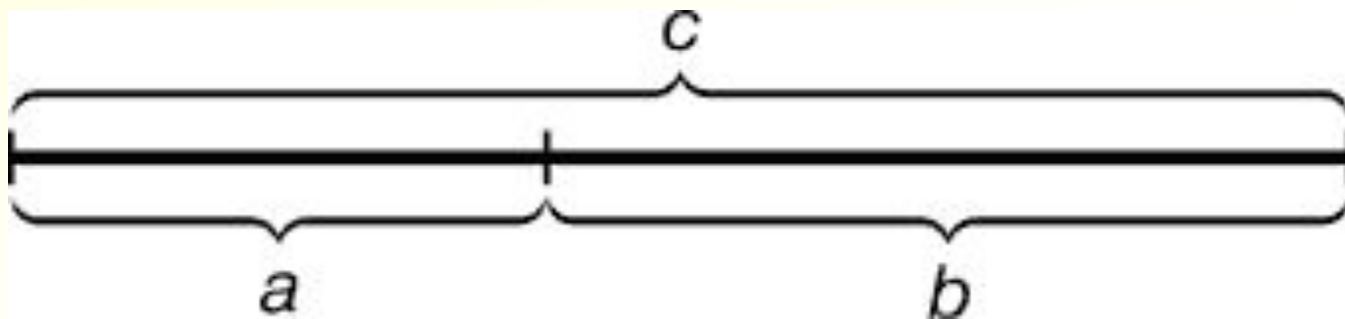
а) A C B

б) A C B

в)  $AB : AC = AC : BC$

Понятие «Золотое сечение»

Золотое сечение - деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

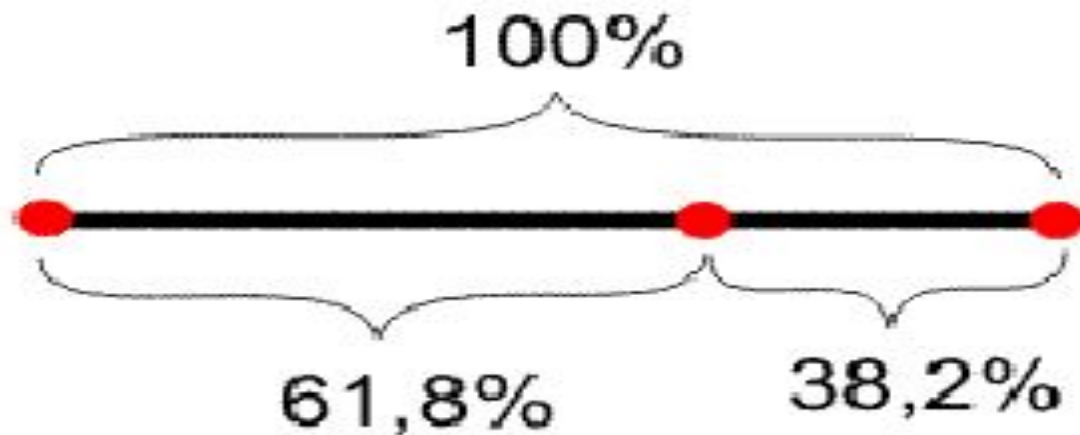


$$a : b = b : c \quad \text{или} \quad c : b = b : a$$

Эта пропорция равна:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484 \dots$$

Золотое сечение в процентах





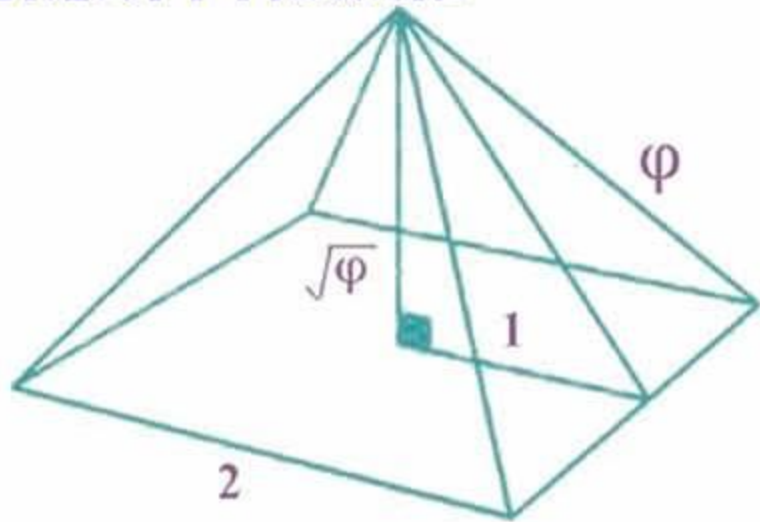
История Золотого сечения

История «Золотого сечения»

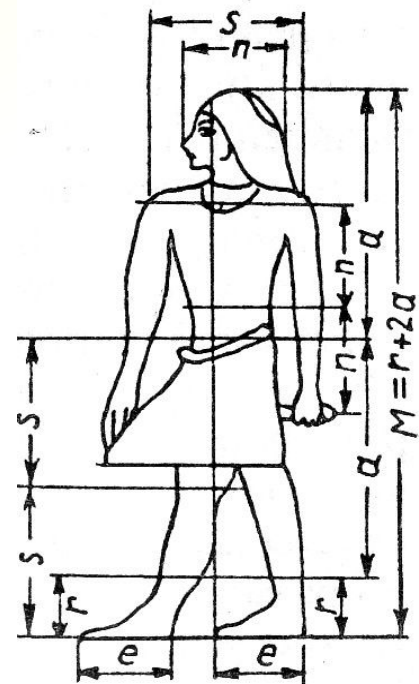
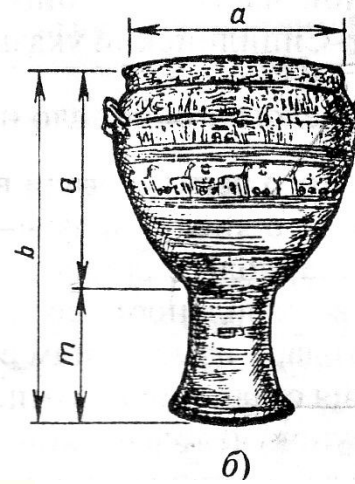
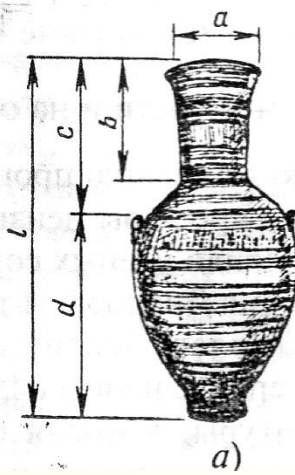
Теория гармонии Древних

- Понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.)
- В **Древнем Египте** существовала «система правил гармонии», основанная на Золотом Сечении.
- В **Древней Греции** Золотое Сечение было своеобразным канонem культуры, который пронизывает все сферы науки и искусства. Красота и гармония стали важнейшими категориями познания.
- В толковании древних греков **понятие золотого сечения, и понятие гармонии идентичны.**
- Согласно **Пифагору гармония имеет численное выражение**, то есть, она связана с концепцией числа.
- **Евклид** излагает теорию Платоновых тел, которая является существенным разделом геометрической теории Золотого Сечения.

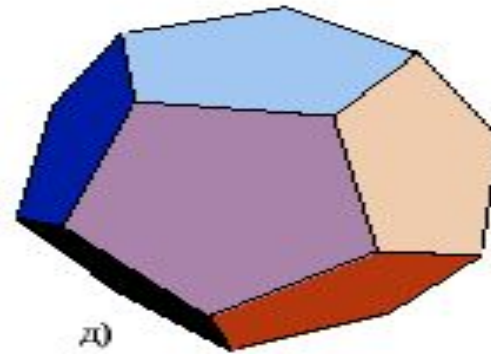
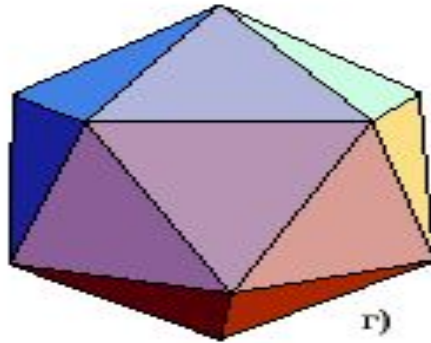
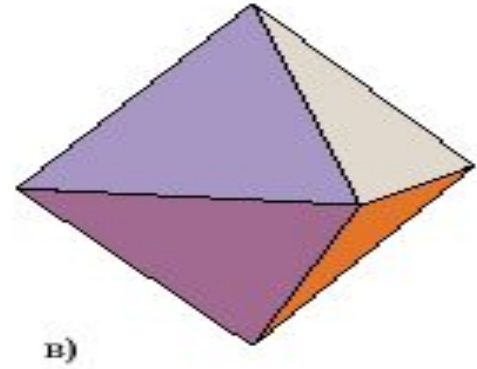
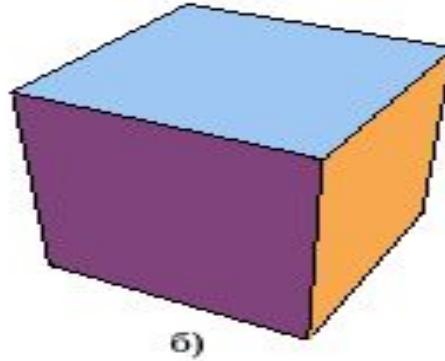
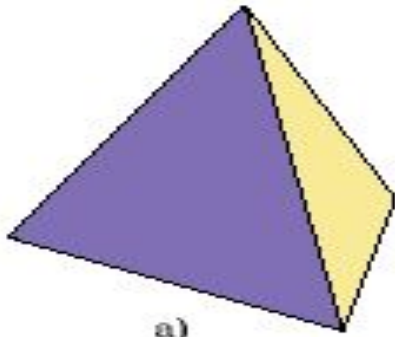
GREAT PYRAMID



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{d}{l} = \varphi.$$



Платоновы тела:



а) тетраэдр («Огонь»), б) гексаэдр («Земля»),
в) октаэдр («Воздух»),
г) икосаэдр («Вода»),
д) додекаэдр («Вселенский разум»).

Ряд Фибоначчи

- С историей золотого сечения связано имя итальянского математика Леонардо Фибоначчи.



- Ряд чисел

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
и т.д. известен как **ряд Фибоначчи**.

«Золотая Пропорция» - главный эстетический принцип эпохи Средневековья

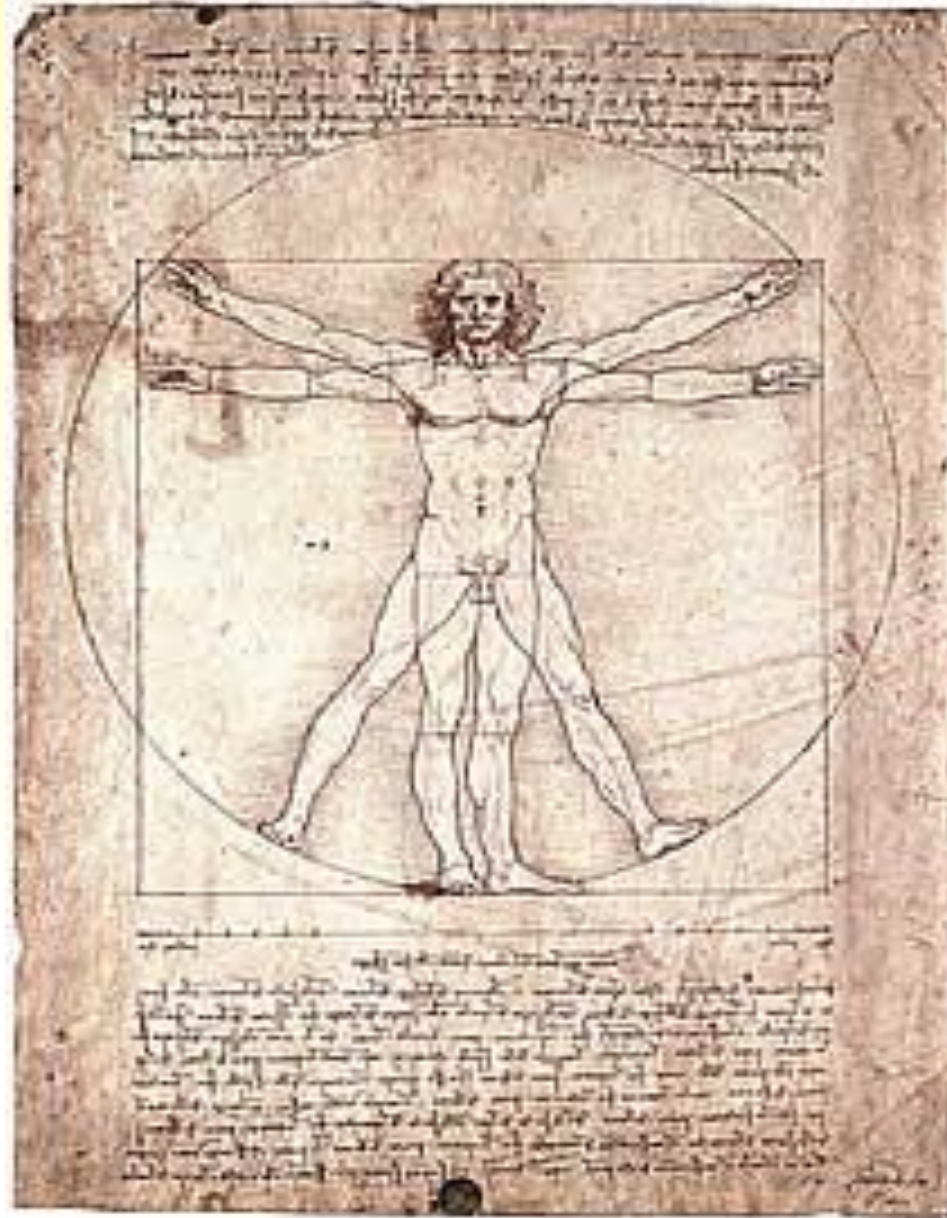
Леонардо да Винчи(1452-1519)
художник и ученый был одним из
первых, кто ввел сам термин «Золотое
Сечение».

Доказано, что во многих своих
произведениях Леонардо да Винчи
использовал пропорции золотого сечения, в
частности, в своей всемирно известной
фреске «Тайная вечеря» и
непревзойденной «Джоконде».



**«Пусть никто, не будучи
математиком, не дерзнет читать
мои труды».** Леонардо да Винчи.

«Витрувианский человек» Леонардо да Винчи



Пропорции человеческого тела (Витрувий)

- длина от кончика самого длинного до самого низкого основания из четырёх пальцев равна ладони
- ступня составляет три ладони
- локоть составляет шесть ладоней
- высота человека составляет четыре локтя (и соответственно 24 ладони)
- шаг равняется четырём ладоням
- размах человеческих рук равен его высоте
- расстояние от линии волос до подбородка составляет $\frac{1}{10}$ его высоты
- расстояние от макушки до подбородка составляет $\frac{1}{8}$ его высоты
- расстояние от макушки до сосков составляет $\frac{1}{4}$ его высоты
- максимум ширины плеч составляет $\frac{1}{4}$ его высоты
- расстояние от локтя до кончика руки составляет $\frac{1}{4}$ его высоты
- расстояние от локтя до подмышки составляет $\frac{1}{8}$ его высоты
- длина руки составляет $\frac{2}{5}$ его высоты
- расстояние от подбородка до носа составляет $\frac{1}{3}$ длины его лица
- расстояние от линии волос до бровей $\frac{1}{3}$ длины его лица
- длина ушей $\frac{1}{3}$ длины лица
- пупок является центром окружности

**Лука Пачоли (1445
—19 июня 1517)
итальянский
математик.**

В 1509 г. в Венеции была
издана книга Пачоли
«Божественная
пропорция».





Альбрехт Дюрер (1471-1528)-
выдающийся немецкий
художник и теоретик искусства
эпохи Возрождения.

Дюрер:

«Необходимо, чтобы тот,
кто что-либо умеет, обучил
этому других, которые в
этом нуждаются. Это я и
вознамерился сделать». 18

Вклад Кеплера в теорию Золотого Сечения



- Иоганн Кеплер (1571-1630)-астроном, приверженец Золотого Сечения.
- Кеплер обратил внимание на ботаническую закономерность **филлотаксиса** и установил **связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией**, доказав, что последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:
 $1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; \dots$ в пределе стремится к золотой пропорции.

«Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнивать с мерой золота; второе же больше напоминает - драгоценный камень.»



Золотое сечение в геометрии

Деление отрезка в золотом отношении

Дано: отрезок АВ.

Построить: золотое сечение отрезка АВ, т.е. точку Е так, чтобы $\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB}$

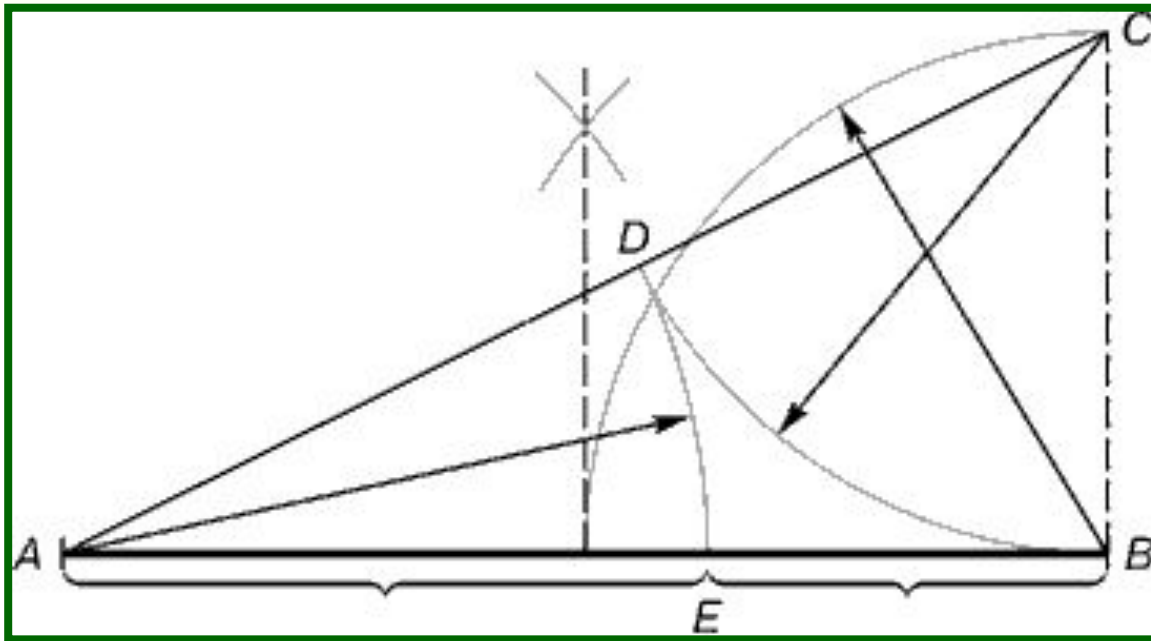
Построение.

1) Построим прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого. Для этого восстановим в точке В перпендикуляр к прямой АВ и на нем отложим отрезок $BC = \frac{1}{2} AB$

2) Далее, соединим точки А и С, отложим отрезок $CD = CB$,

3) Отложим $AE = AD$.

Точка Е является искомой, она производит золотое сечение отрезка АВ.

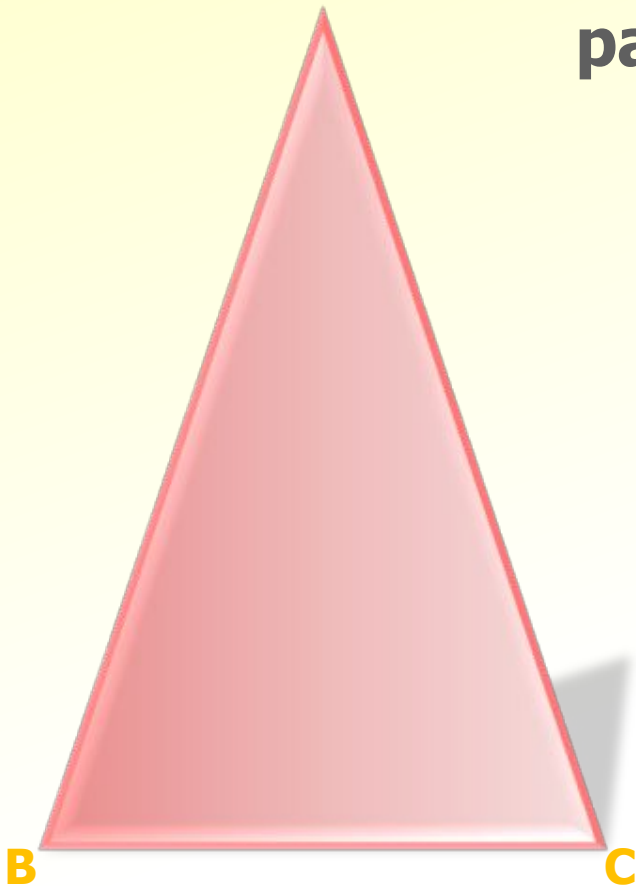


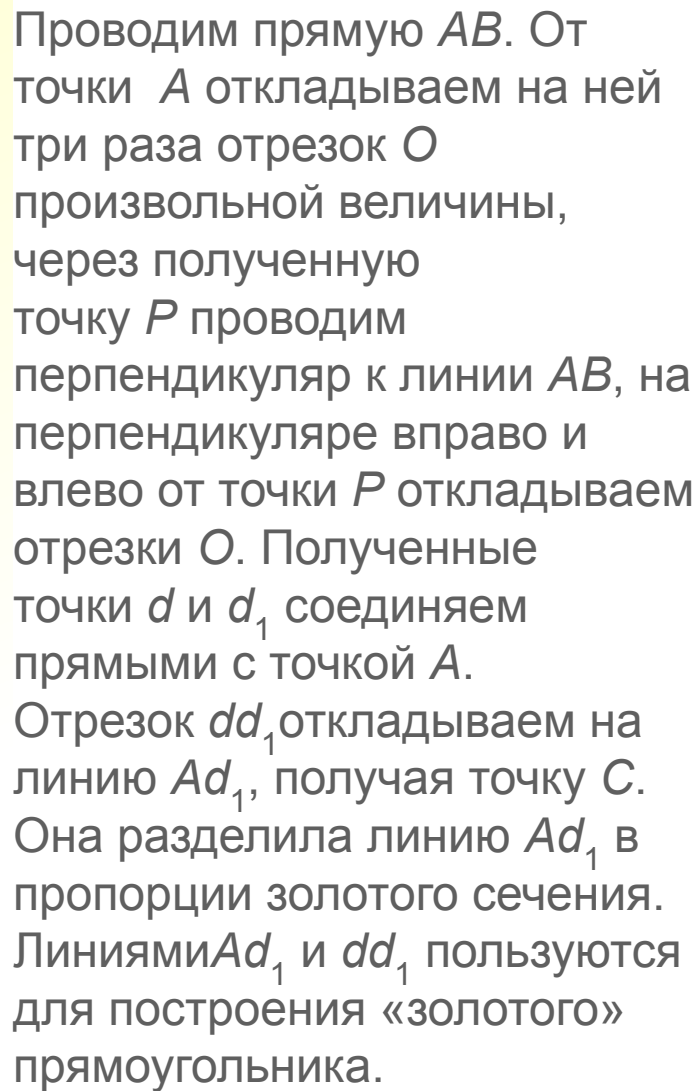
Золотой треугольник

Золотым называется такой **равнобедренный треугольник**, основание и боковая сторона которого находятся в золотом отношении:

$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

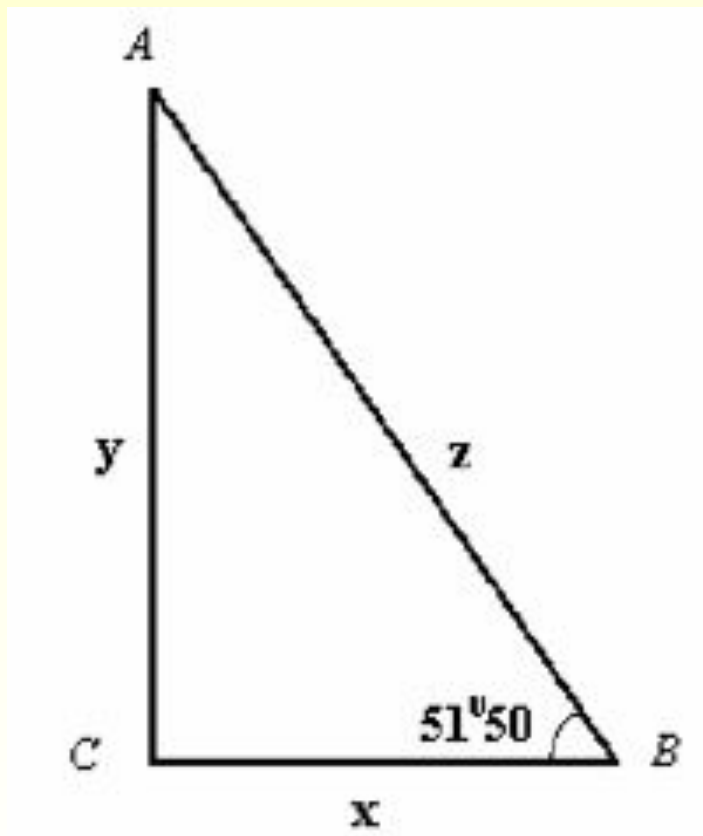
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$





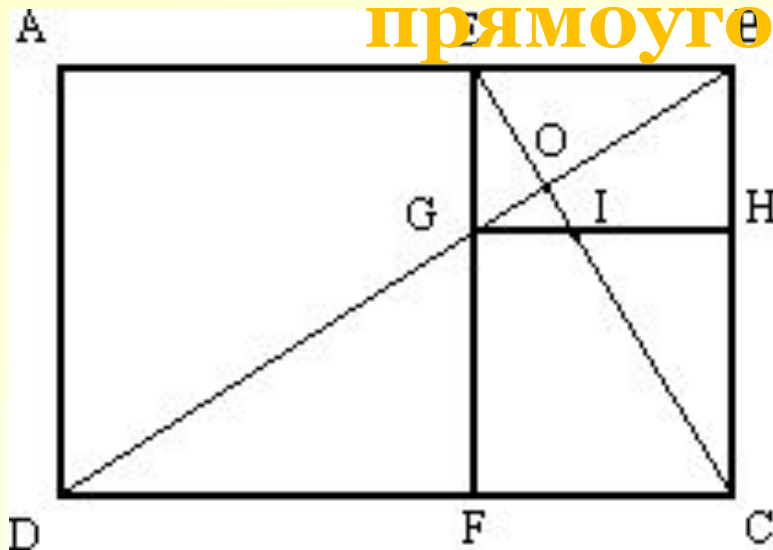
Проводим прямую AB . От точки A откладываем на ней три раза отрезок O произвольной величины, через полученную точку P проводим перпендикуляр к линии AB , на перпендикуляре вправо и влево от точки P откладываем отрезки O . Полученные точки d и d_1 соединяем прямыми с точкой A . Отрезок dd_1 откладываем на линию Ad_1 , получая точку C . Она разделила линию Ad_1 в пропорции золотого сечения. Линиями Ad_1 и dd_1 пользуются для построения «золотого» прямоугольника.

Золотой прямоугольный треугольник



- В золотом прямоугольном треугольнике отношение большего катета к меньшему равно $\sqrt{\varphi}$, а отношение гипотенузы к меньшему катету равно φ , то есть «ЗОЛОТОЙ пропорции».

Золотой прямоугольник

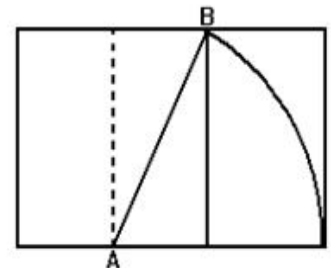
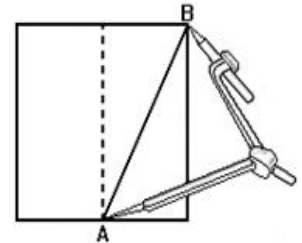
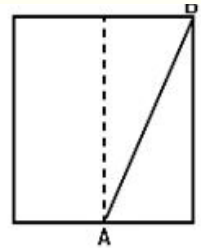
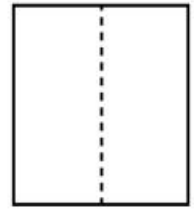


$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

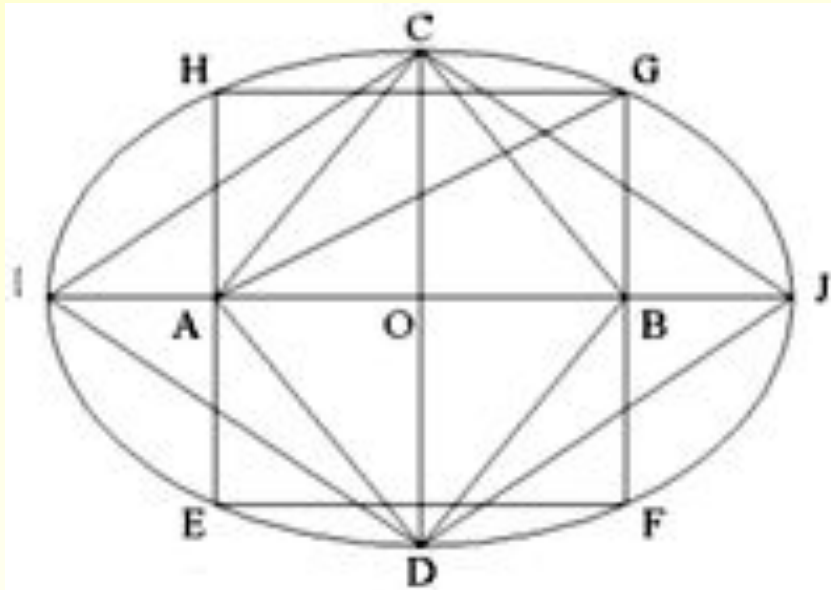
Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, т.е. отношение длины к ширине даёт число **Ф**, называется **золотым прямоугольником**.

Построение золотого прямоугольника.

- 1) Начертите квадрат и разделите его на два равных прямоугольника.
- 2) В одном из прямоугольников проведите диагональ АВ.
- 3) Проведите окружность радиуса АВ с центром в точке А.
- 4) Продолжите основание квадрата до пересечения с дугой и проведите боковую сторону искомого прямоугольника под прямым углом.



Золотой эллипс

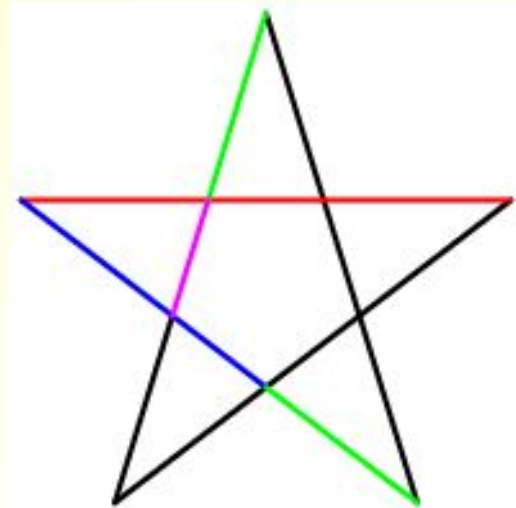
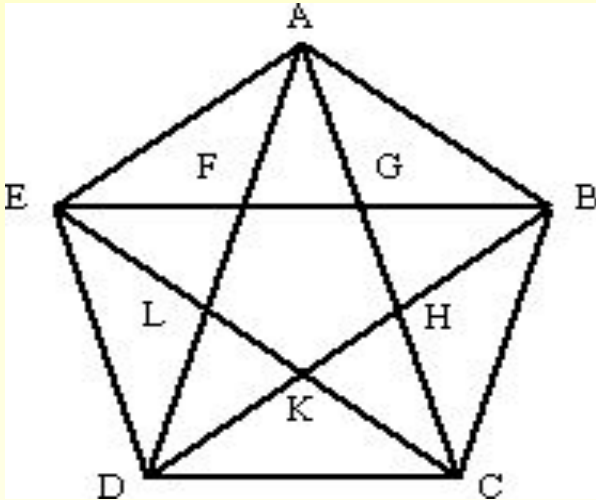


$$\frac{OB}{BC} = \frac{1}{\varphi}; \quad \frac{OB}{OC} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}; \quad \frac{OC}{CJ} = 1; \quad \frac{OC}{OJ} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}};$$

$$\frac{CB}{CJ} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OJ} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}};$$

Золотой эллипс формируется с помощью двух ромбов ACBD и ICJD, вписанных в эллипс. Золотые ромбы ACBD и ICJD состоят из 4-х прямоугольных треугольников типа OCB или OCJ, которые являются золотыми прямоугольными треугольниками.

Пентаграмма



Если в пентаграмме провести все диагонали, то в результате получим **пятиугольную звезду**.

Точки пересечения диагоналей в пентаграмме являются **точками золотого сечения диагоналей** (отношение синего отрезка к зелёному, красного к синему, зелёного к фиолетовому, равны **1.618**). При этом эти точки образуют **новую пентаграмму $FGHKL$** и **пять правильных треугольников (ADC, ADB, EBD, AEC, EBC)**

Пятиконечная звезда на флагах.



Буркина Фасо



Венесуэла



Гвинея - Бисау



Гана



Вьетнам



Гондурас



Гренада



Джибути



Доминика



Зимбабве



Ирак



Йемен

Пятиконечная звезда на флагах.



Камерун



Китай



Коморские острова



Корейская народная
Демокр-ая р - ка



Куба



Либерия



Мавритания



Микронезия



Мозамбик



Новая Зеландия



Пакистан



Папуа – Новая Гвинея



**Раифский мужской
монастырь.**

«Пентагон» США.





Золотое сечение в природе

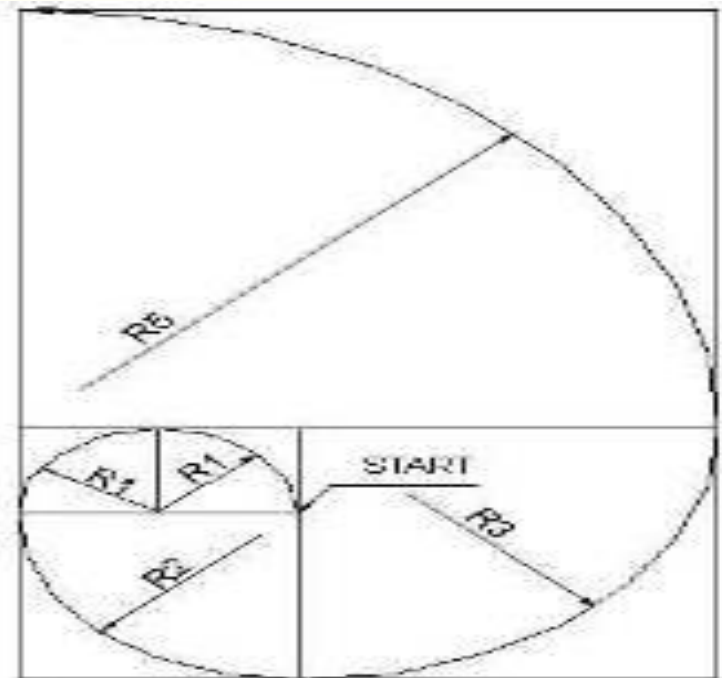
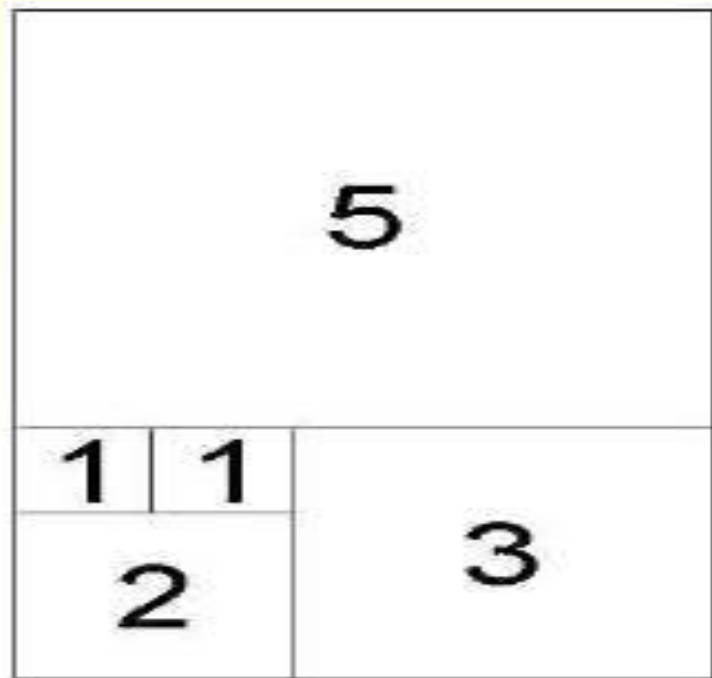
Вопрос:

Что общего в
молекулах ДНК,
кристаллах
снежинок,
лепестков розы,
раковин
моллюсков, рогов
млекопитающих,
далеких
космических
галактиках?



Золотая спираль (спираль Архимеда)

Ответ: в основе их структуры лежит золотая (логарифмическая) спираль. Эта спираль вписывается в золотой прямоугольник (отношение длины и ширины которого равно числу Φ). Последовательно отрезая от него квадраты и вписывая в каждый из них по четверти окружности, мы и получим золотую спираль



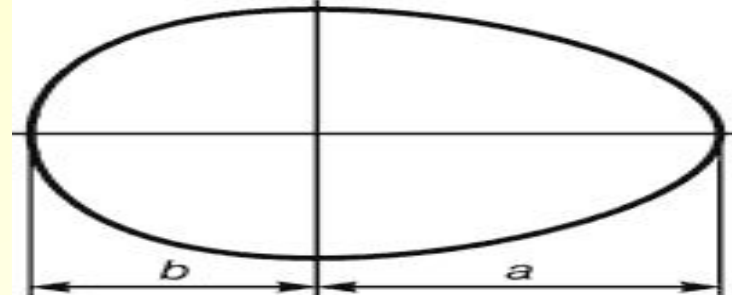
Явление филлотаксиса

Филлотаксисом называется своеобразное решетчатое расположение листьев, семян, чешуек многих видов растений. Ряды ближайших соседей в таких решетках разворачиваются по спиралям или закручиваются винтовыми линиями вокруг цилиндра.



Семечки в подсолнухе расположены по логарифмическим спиралям. При этом отношение числа левых и правых спиралей равно отношению соседних чисел Фибоначчи. Можно встретить подсолнухи с отношением количества спиралей $34/55$ и $55/89$.

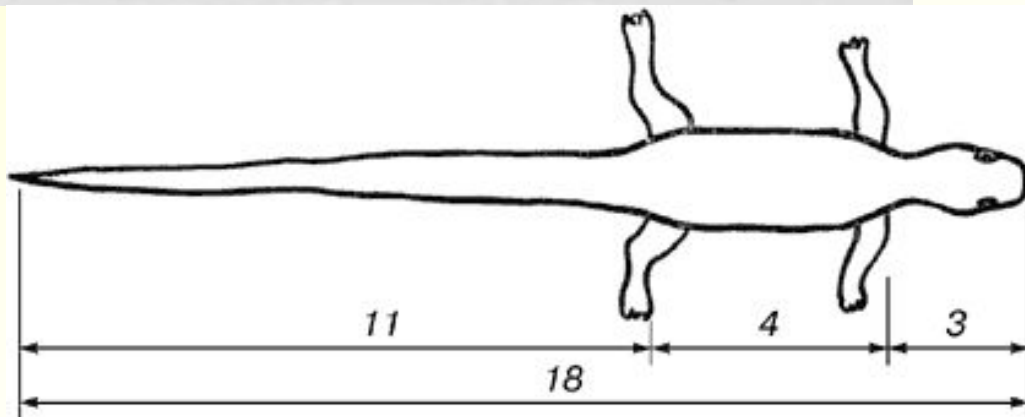
Форма птичьих яиц описывается золотым сечением.



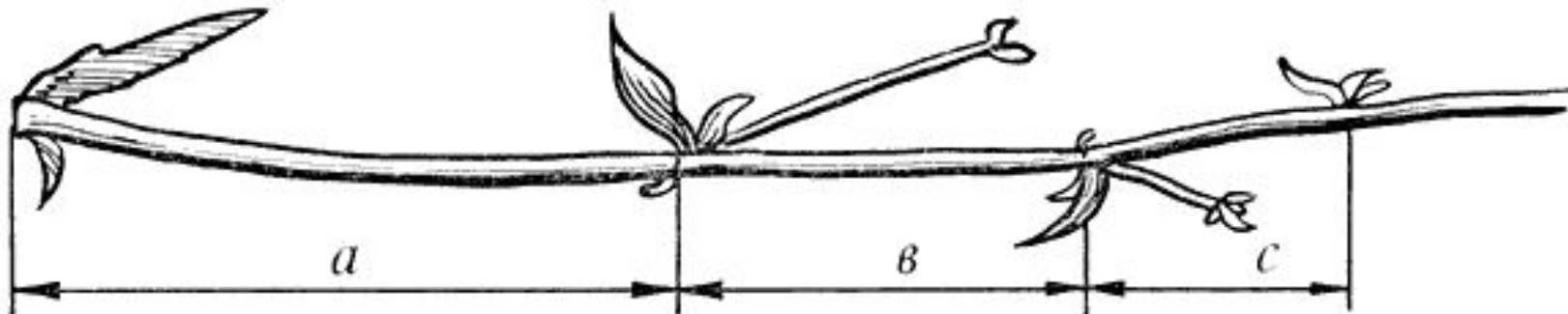
Совершенная форма тела стрекозы создана по законам золотого сечения: отношение длины хвоста и корпуса равно отношению общей длины к длине хвоста.



Ящерица.



Цикорий.

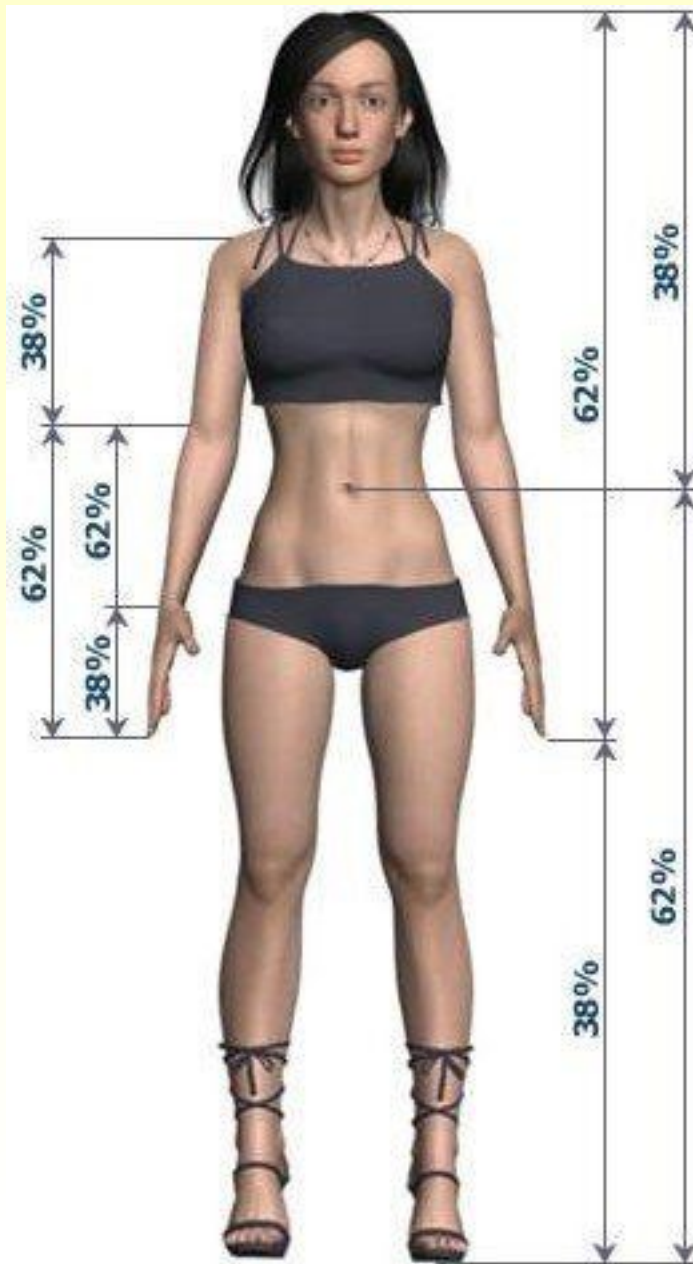




Золотое сечение и пропорция во внешних формах человека.

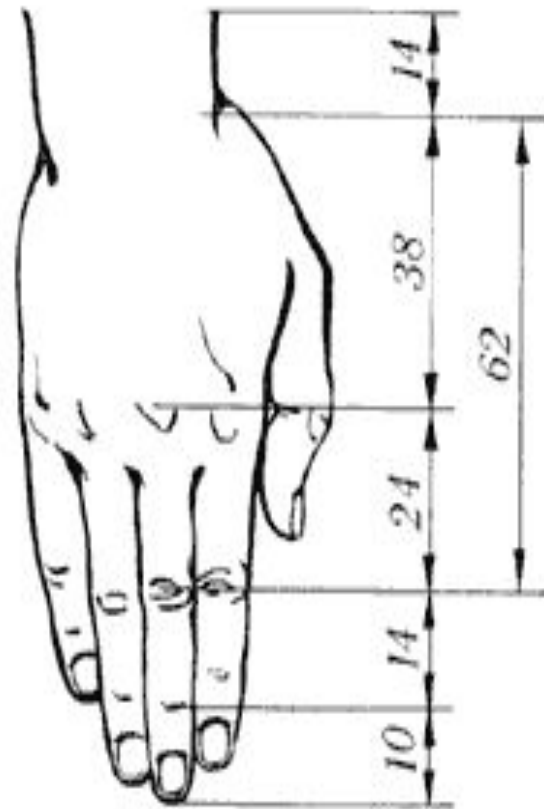
«Обнаженное тело кажется мне прекрасным.
Для меня оно – чудо, где не может быть
ничего безобразного»

О. Роден.

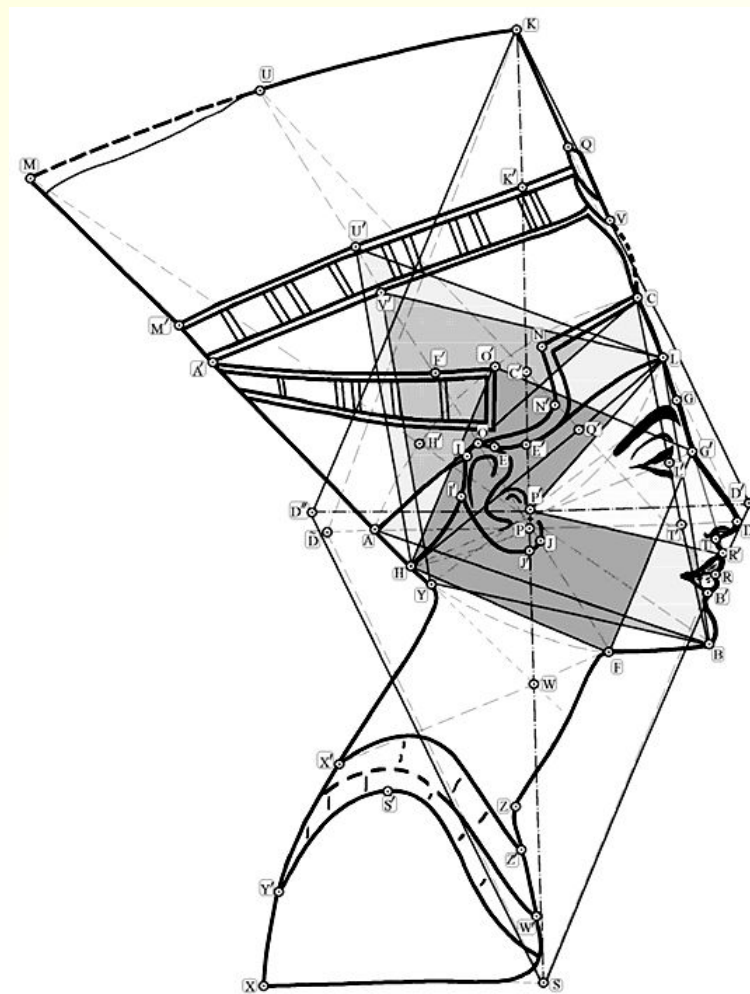


- *Цейзинг:*
- Мужское тело:
- $13 : 8 = 1,625$
- Женское тело:
- $8 : 5 = 1,6$.
- У новорожденного: $1 : 1$.

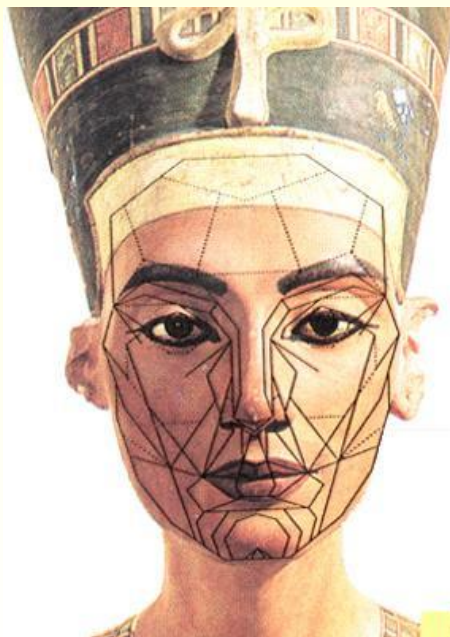
Пропорции золотого сечения в частях тела



Скульптурный портрет Нефертити и его гармонический анализ, выполненный Э.М. Сороко.



Гармонический анализ женского лица.



Н.И. Крюковский :

- *"Созерцая совершенное, прекрасное человеческое лицо и тело, невольно приходишь к мысли о каком-то скрытом, но явственно чувствующемся математическом изяществе его форм, о математической правильности и совершенстве составляющих его криволинейных поверхностей!"*

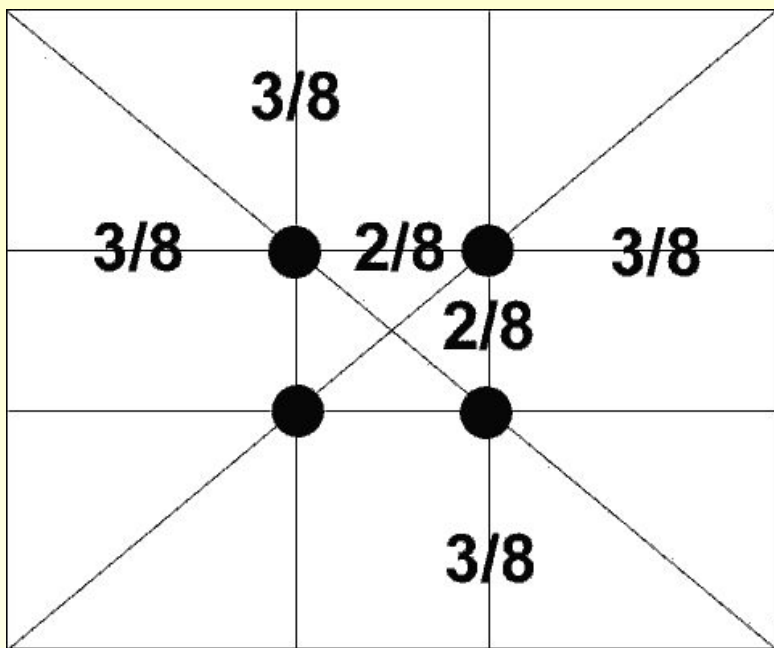


Золотое сечение в живописи

«Поистине живопись – наука и
законная дочь природы...»

Леонардо да

Винчи



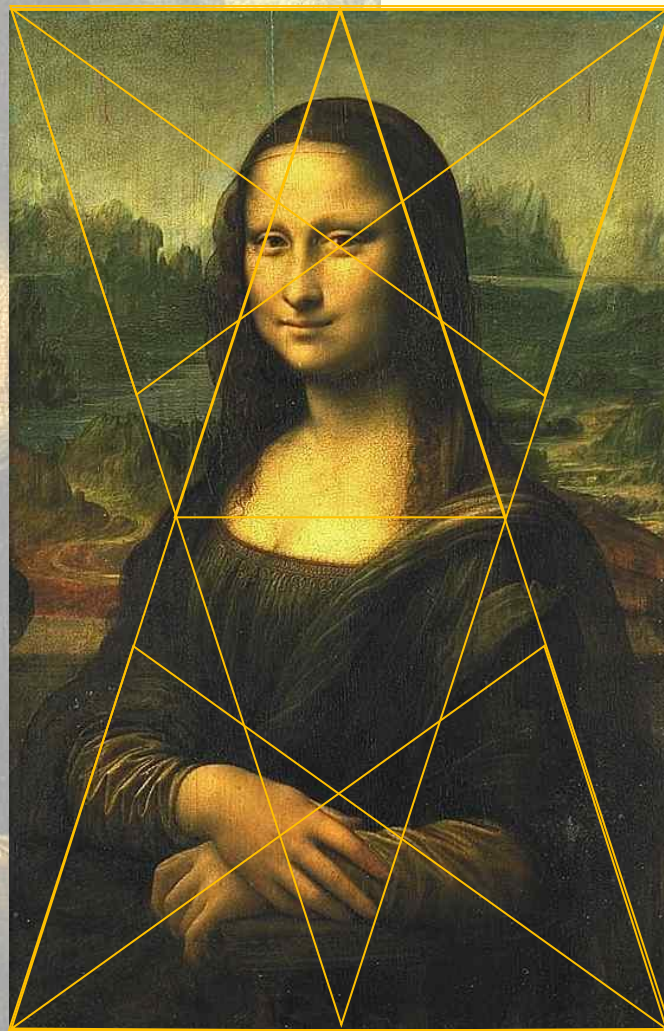
«Золотое сечение»
картины.

В эпоху Возрождения художники открыли, что любая картина имеет определенные точки, невольно приковывающие наше внимание, так называемые зрительные центры. Таких точек всего четыре, и расположены они на расстоянии $3/8$ и $5/8$ от соответствующих краев плоскости.

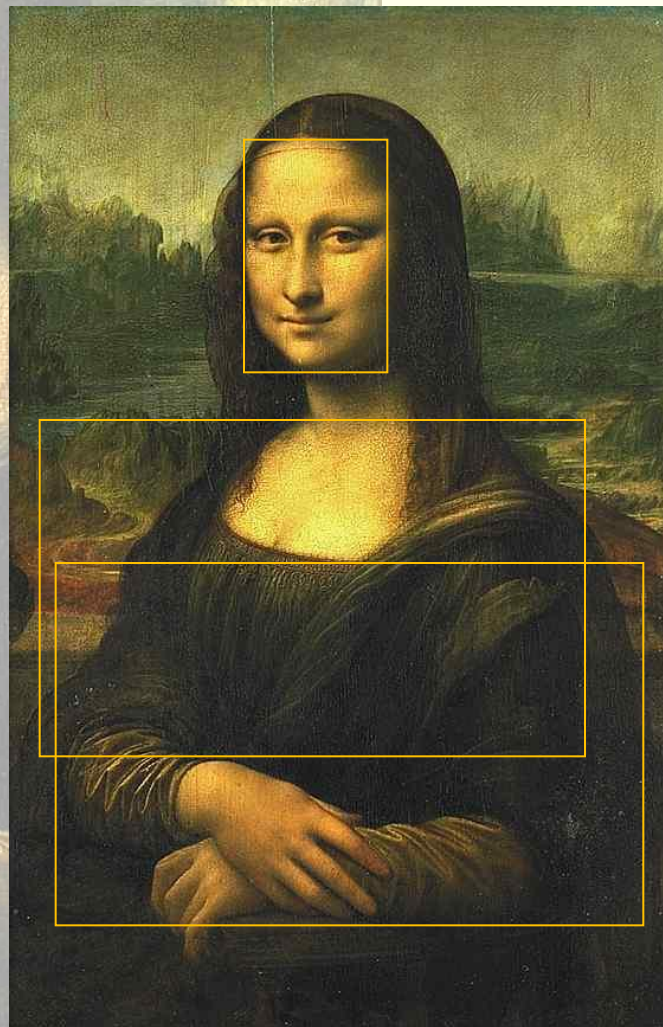
Золотое сечение в картине Леонардо да Винчи "Джоконда"



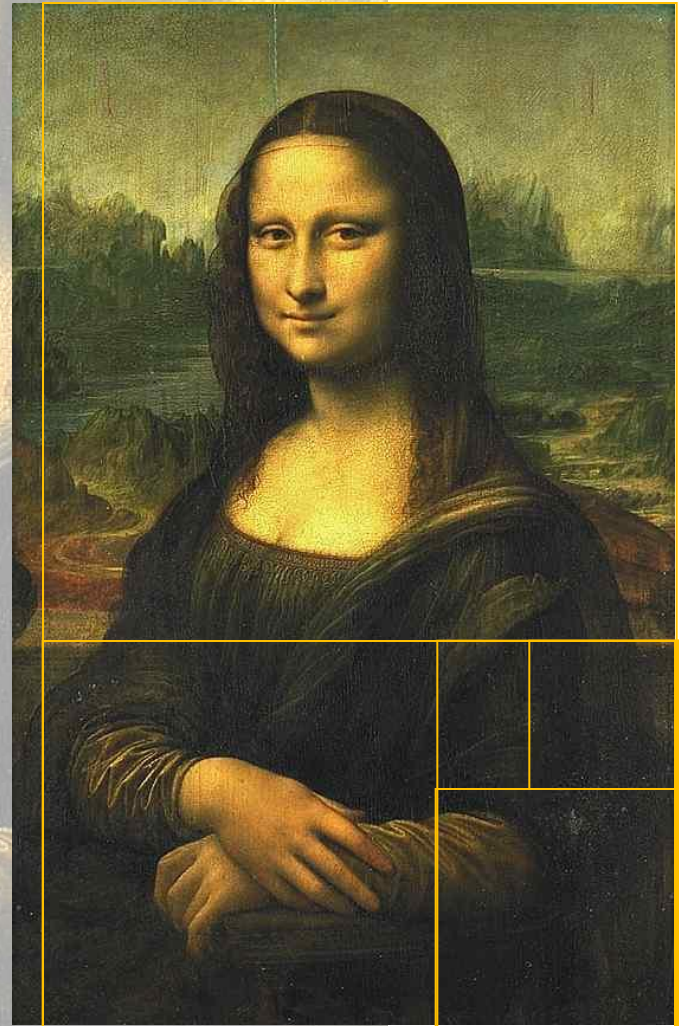
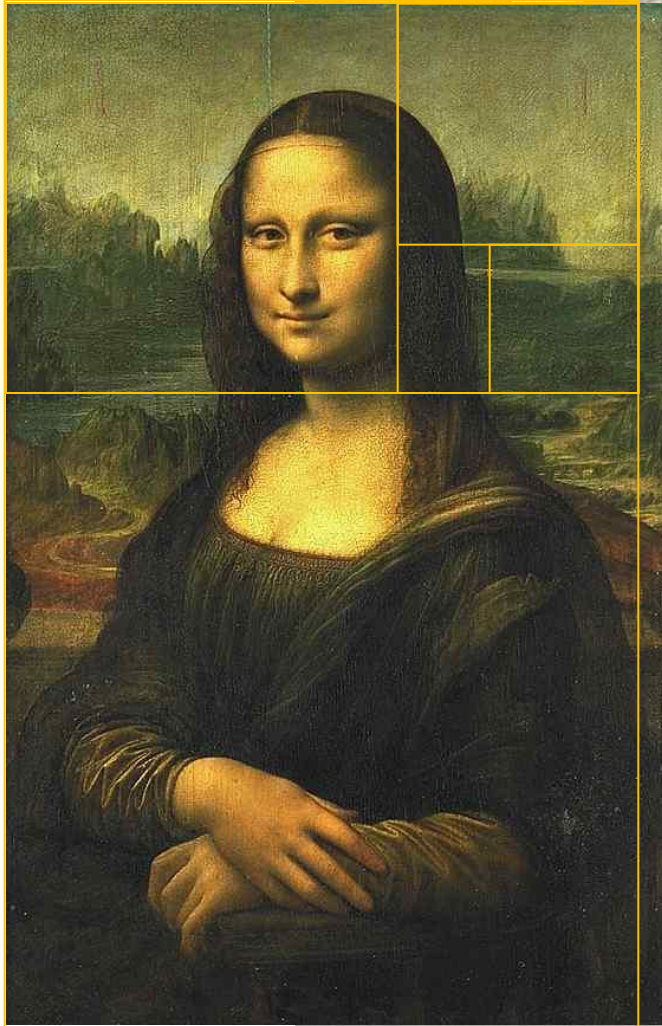
Портрет Моны Лизы привлекает тем, что композиция рисунка построена на «золотых треугольниках».



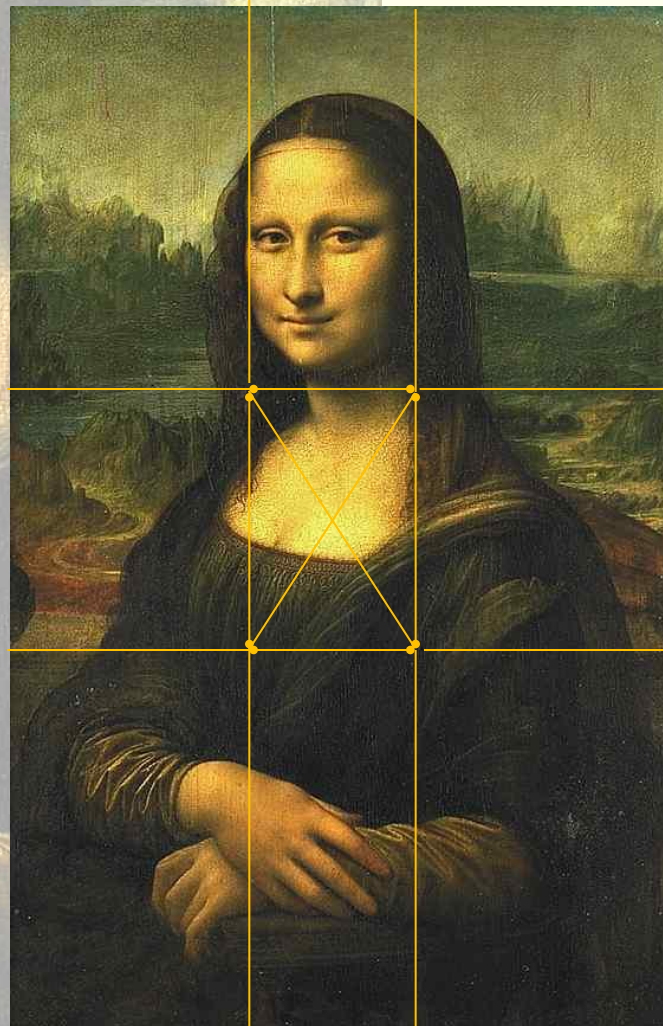
Существовало мнение, что композиция имеет успех из-за построения на «золотых прямоугольниках».



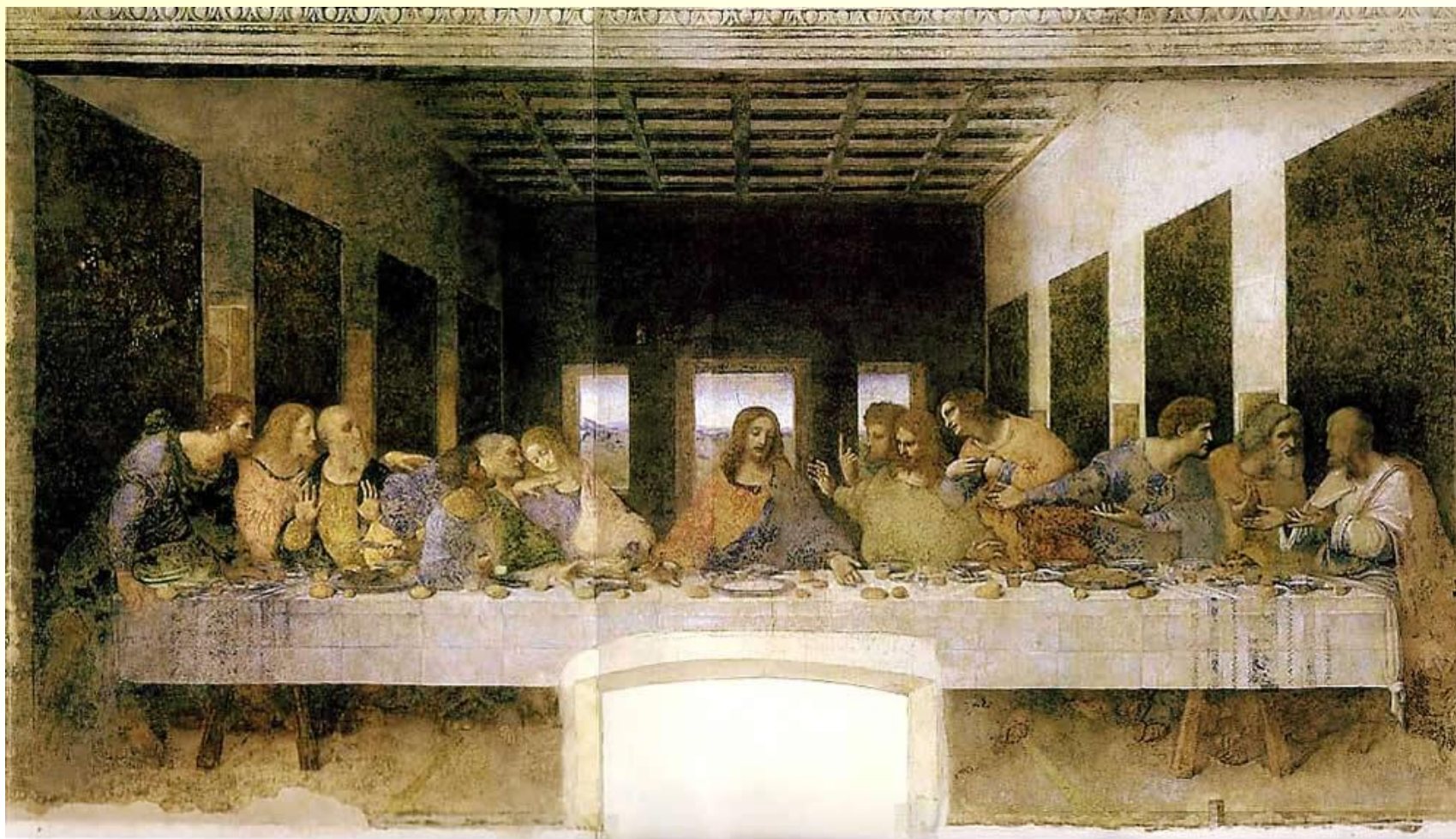
Существовало мнение, что композиция имеет успех из-за построения на «золотых прямоугольниках».

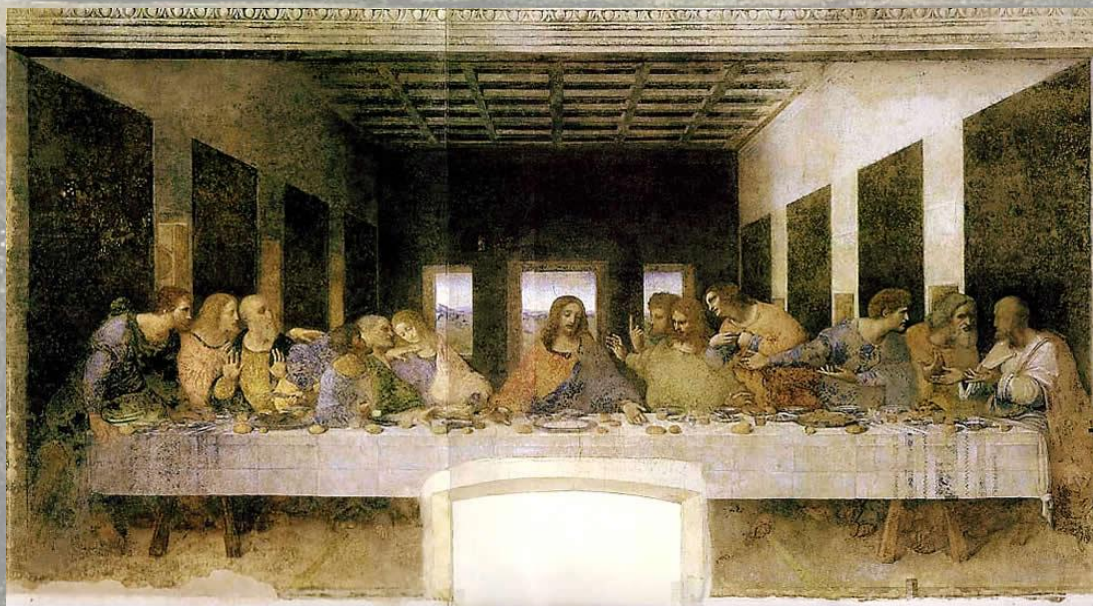


Картина имеет точки, невольно приковывающие наше внимание, так называемые зрительные центры..

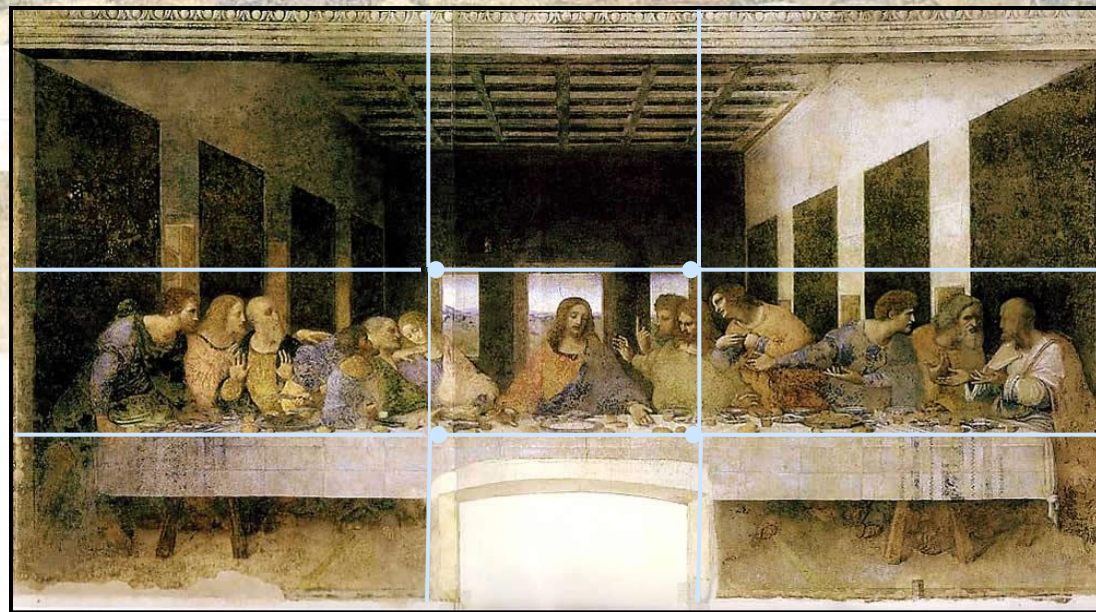


Фреска Леонардо да Винчи «Тайная вечеря» и золотое сечение

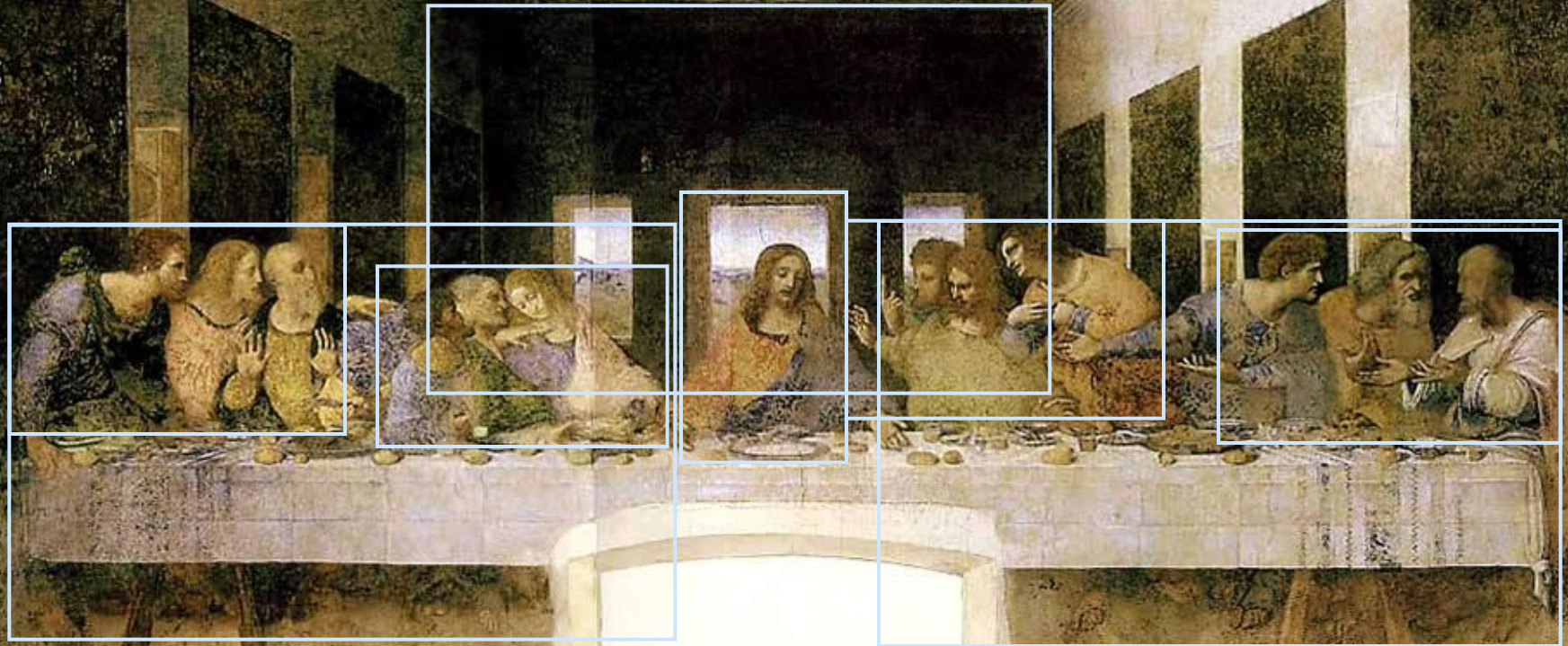


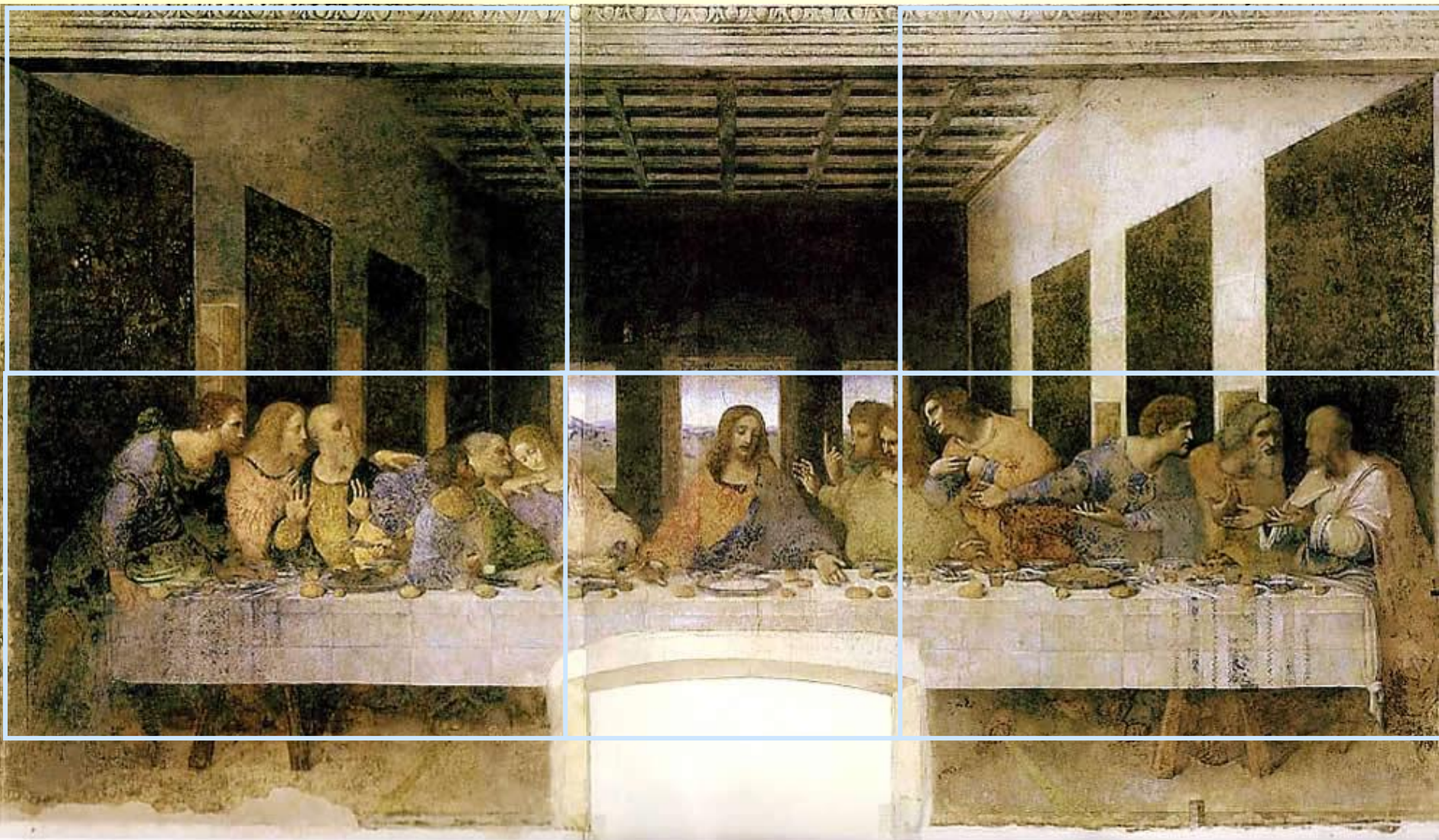


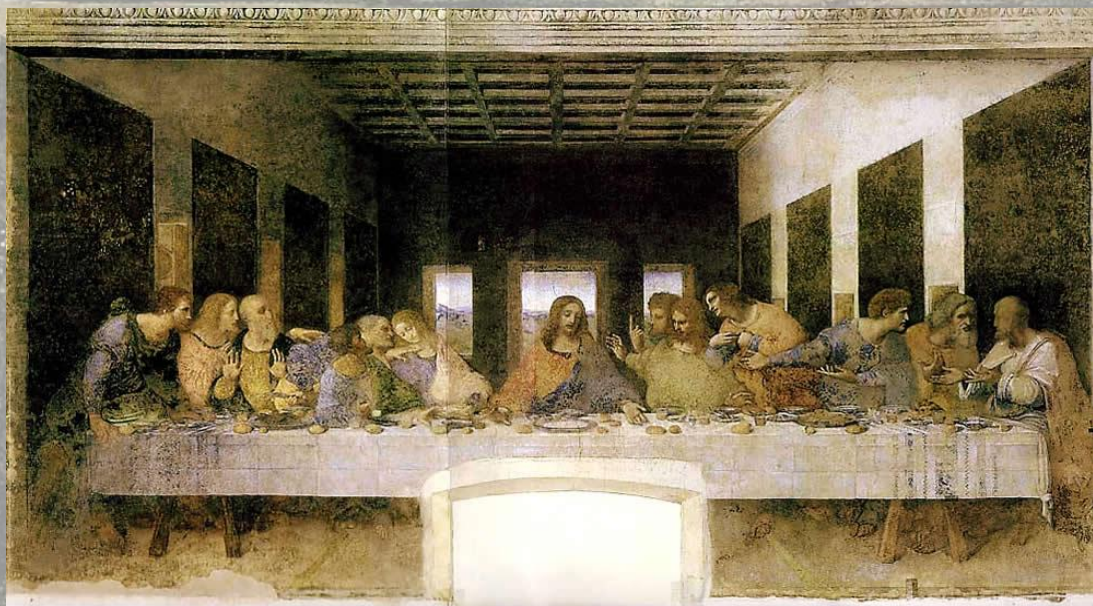
На фреске
«Тайная вечеря»
четко
просматривается
деление картины
в пропорциях
золотого сечения.



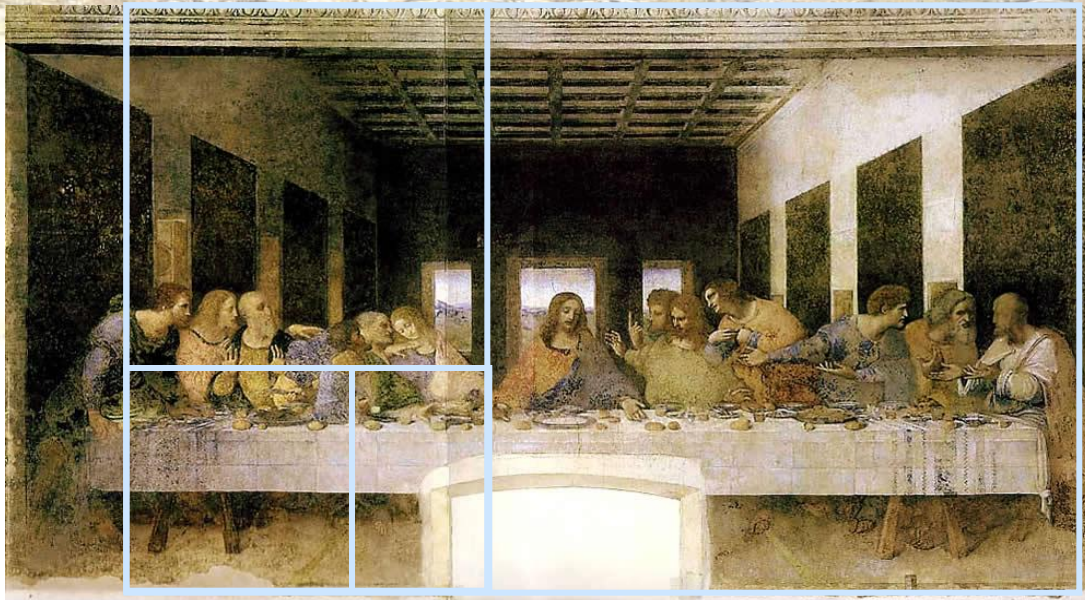
Наличие золотых прямоугольников

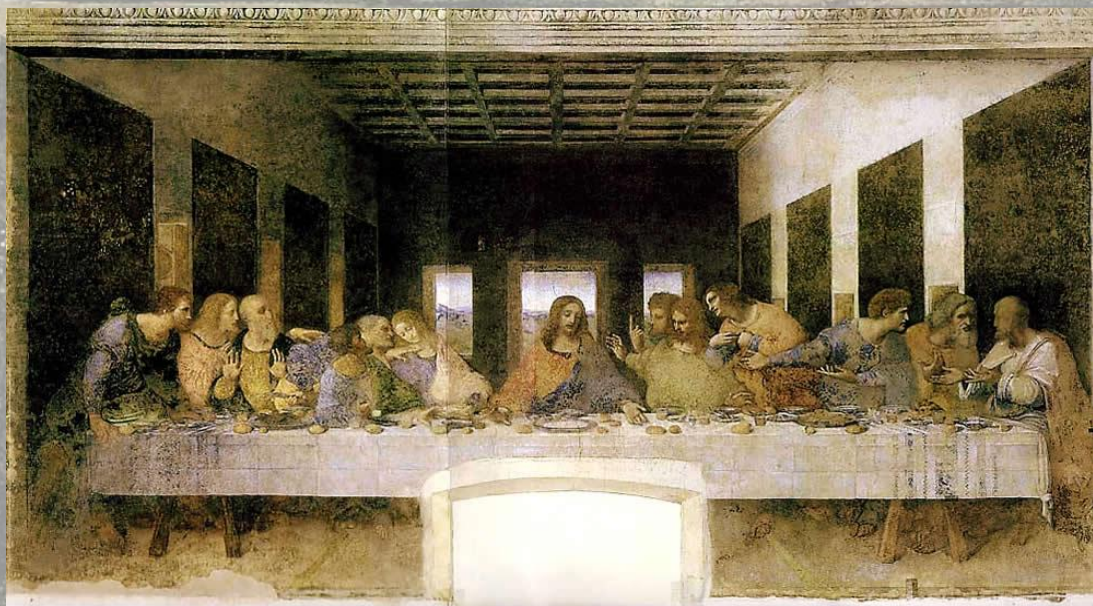




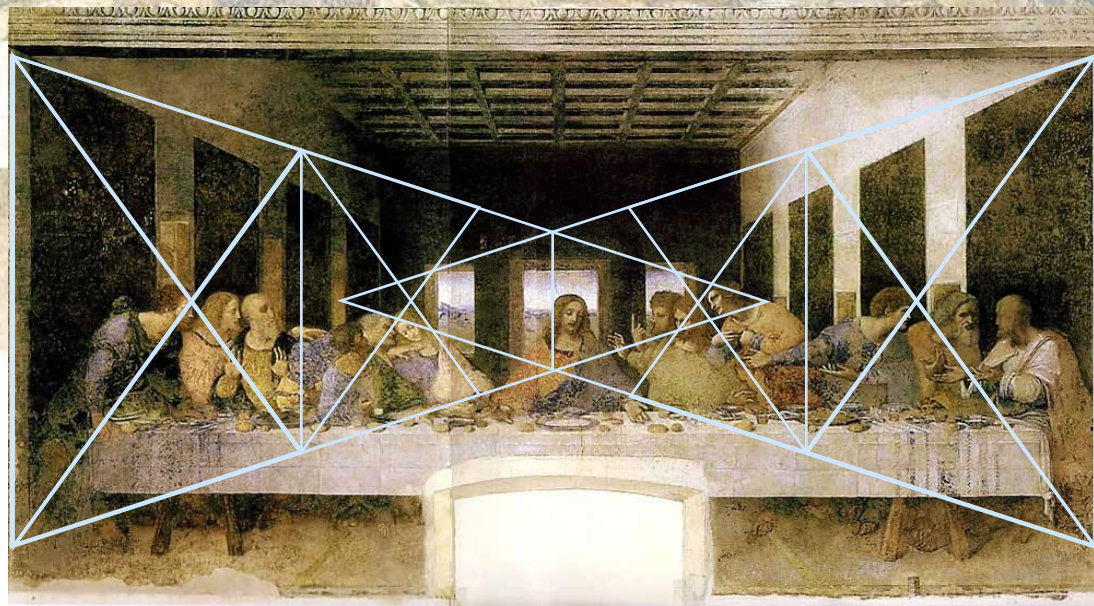


На фреске
«Тайная вечеря»
четко
просматривается
наличие золотого
прямоугольника





В композиции
фрески «Тайная
вечеря» можно
обнаружить
наличие золотых
треугольников.



Золотое сечение в картине И.И. Шишкина «Корабельная роща»

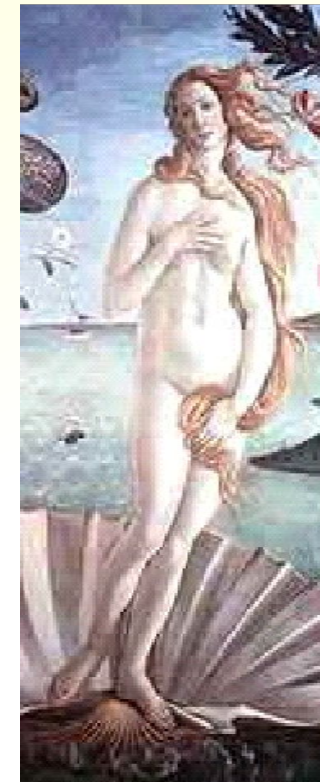
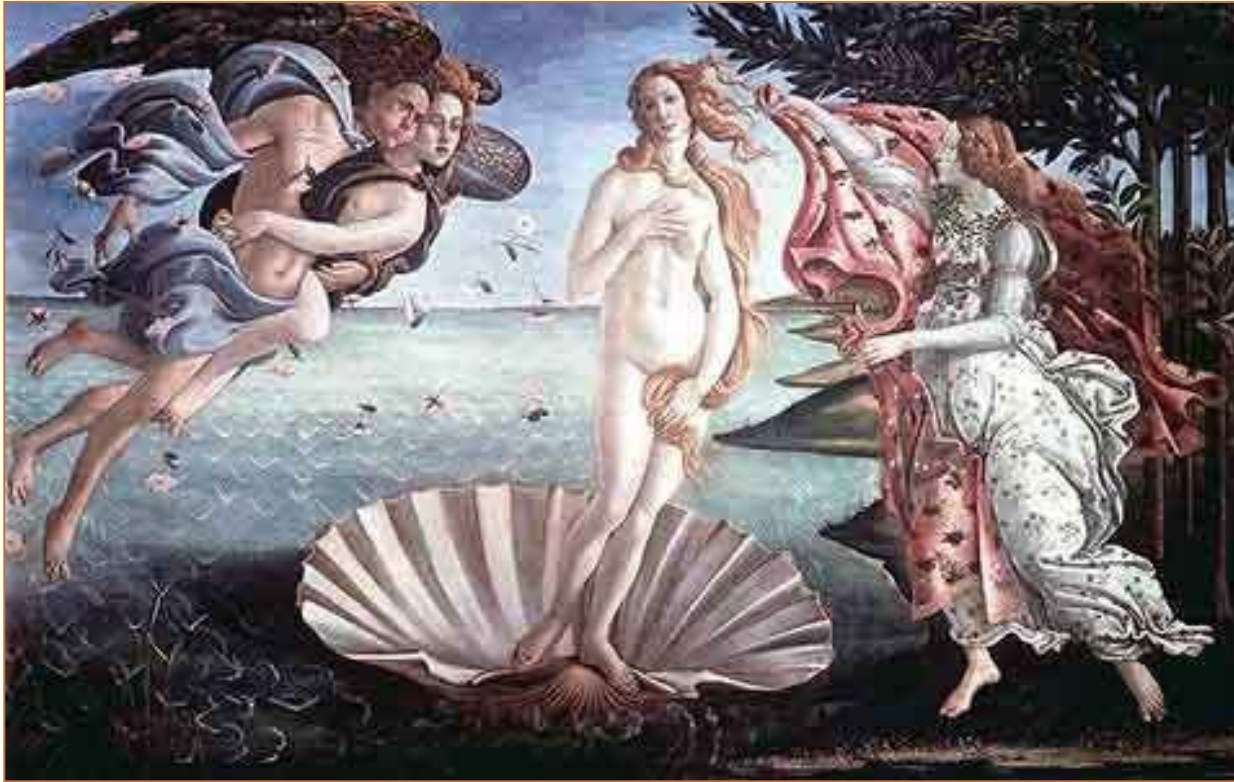


На знаменитой картине И.И. Шишкина «Корабельная роща» с очевидностью просматриваются мотивы золотого сечения.



Золотые треугольники и композиция картины

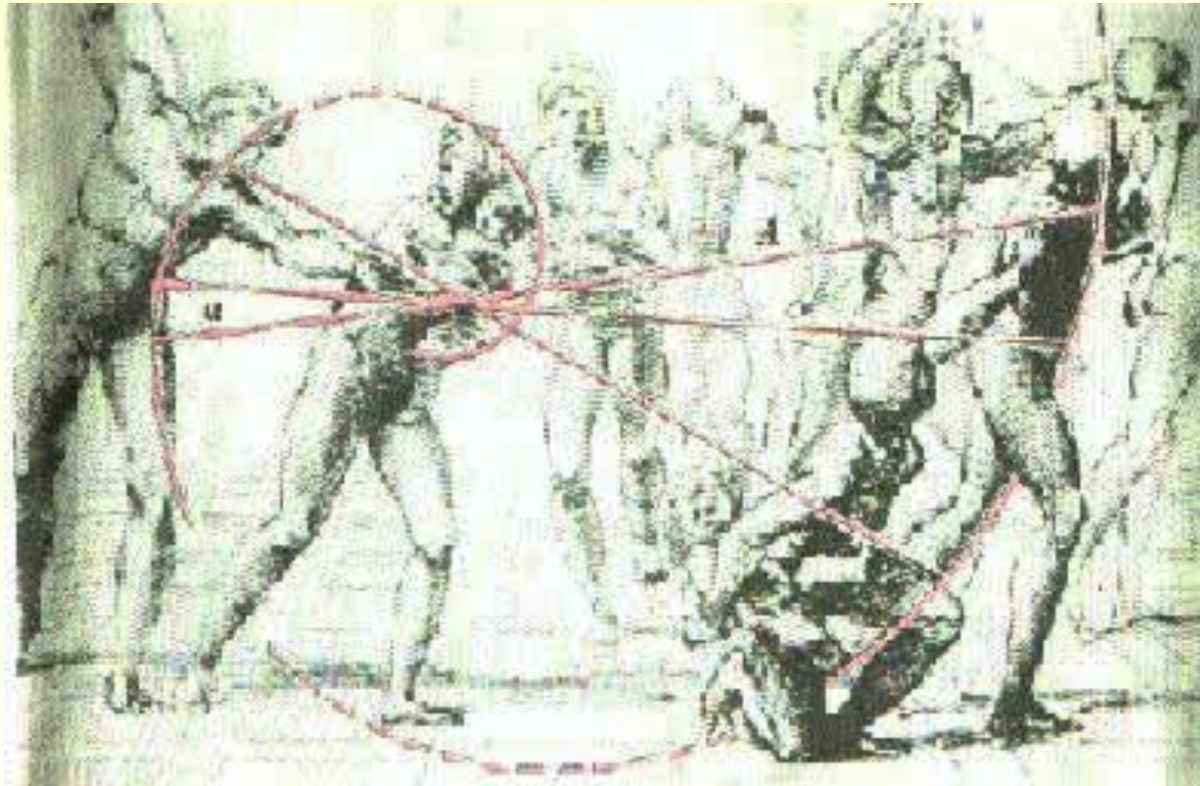




Сандро Ботичелли «Рождение Венеры» (около 1485 г).

- Пропорции Венеры выполнены в **золотом сечении**.

Золотая спираль в картине Рафаэля" Избиение младенцев»



«Золотая спираль» выбрана как композиционная основа рисунка Рафаэля.



К.А. Васильев «У окна»

$\chi/\Phi \chi - \chi/\pi \chi - \chi/\Phi^3$



$\Upsilon - \Upsilon/\pi$

Υ/Φ

*Иванов
«Явление Христа народу»*



Суд Париса Каменя



Золотое сечение в архитектуре и скульптуре

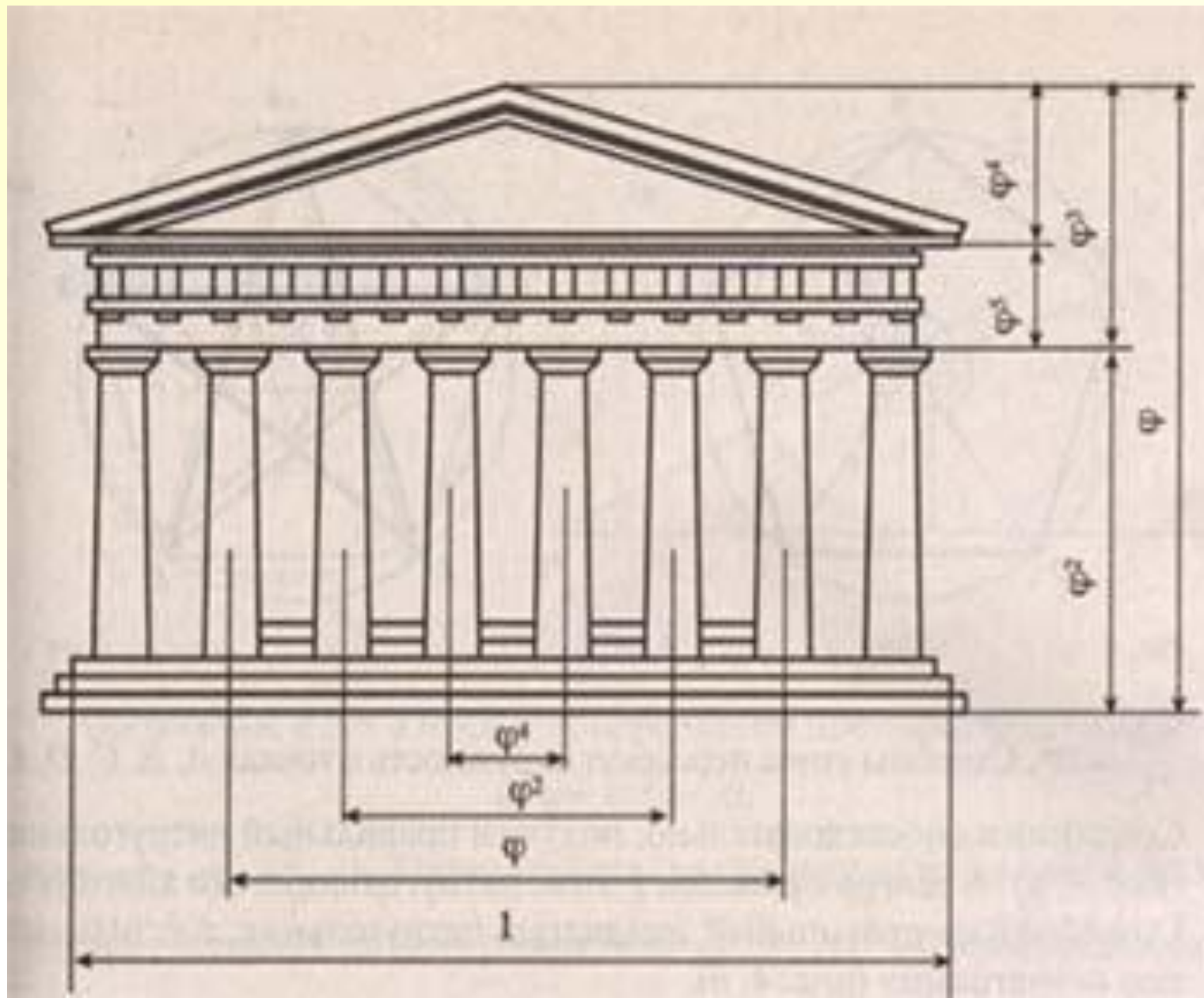
Гармония – вот что лежит в основе всех видов искусства на всем протяжении человеческой истории.

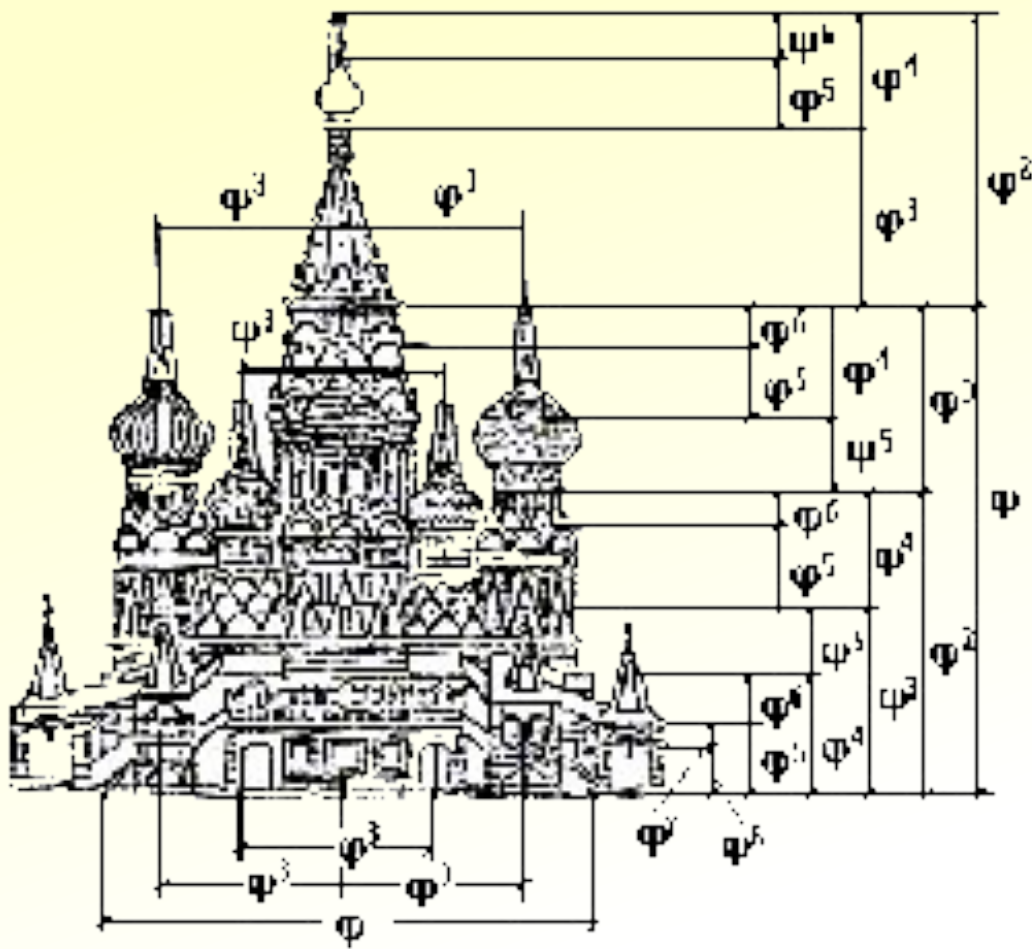
И.В.Жолтовский

Парфенон – главный храм
Афинского Акрополя.
Архитектор Фидий



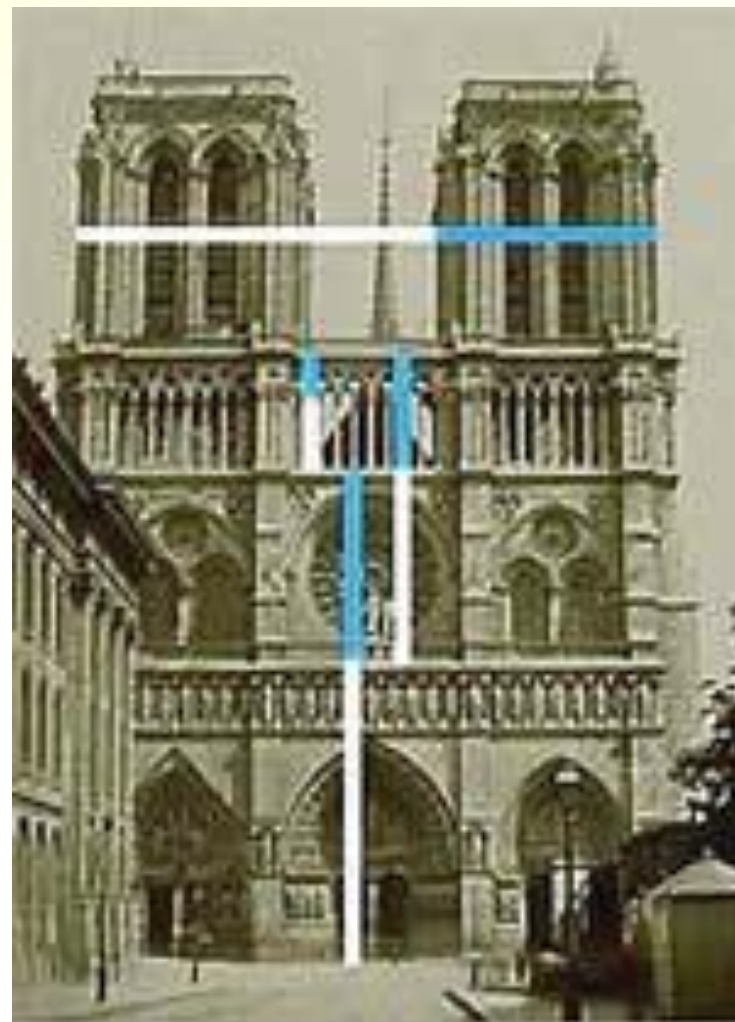
Афинский Акрополь – Золотое сечение

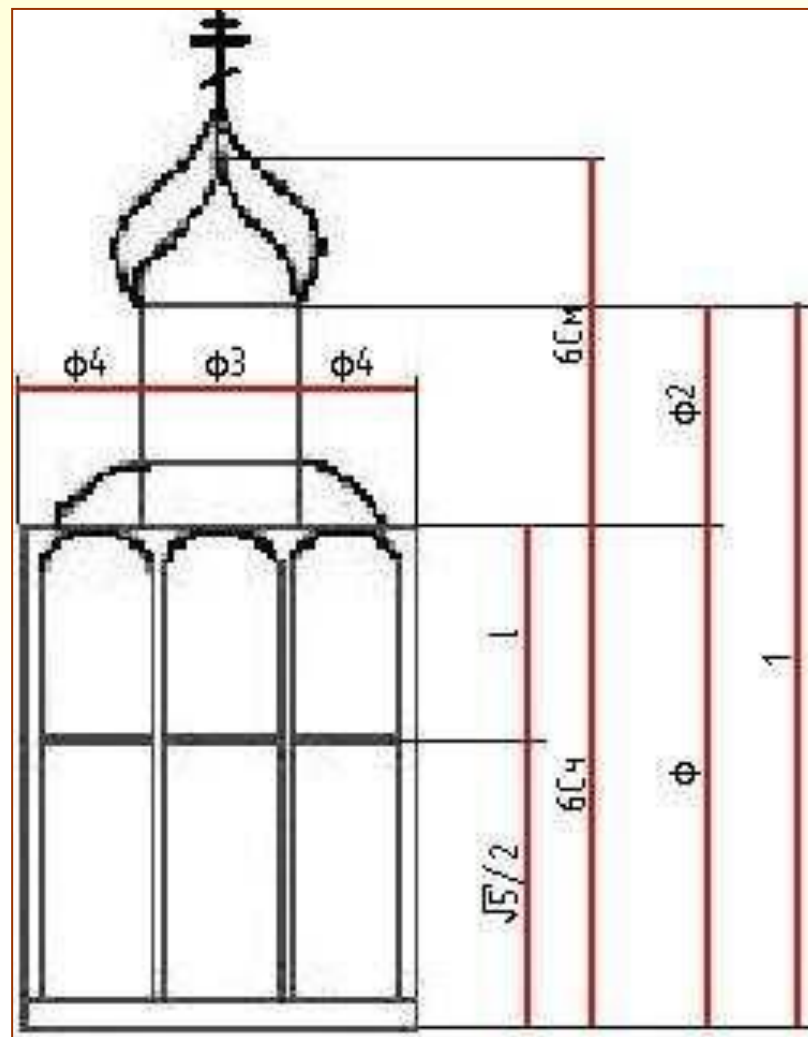




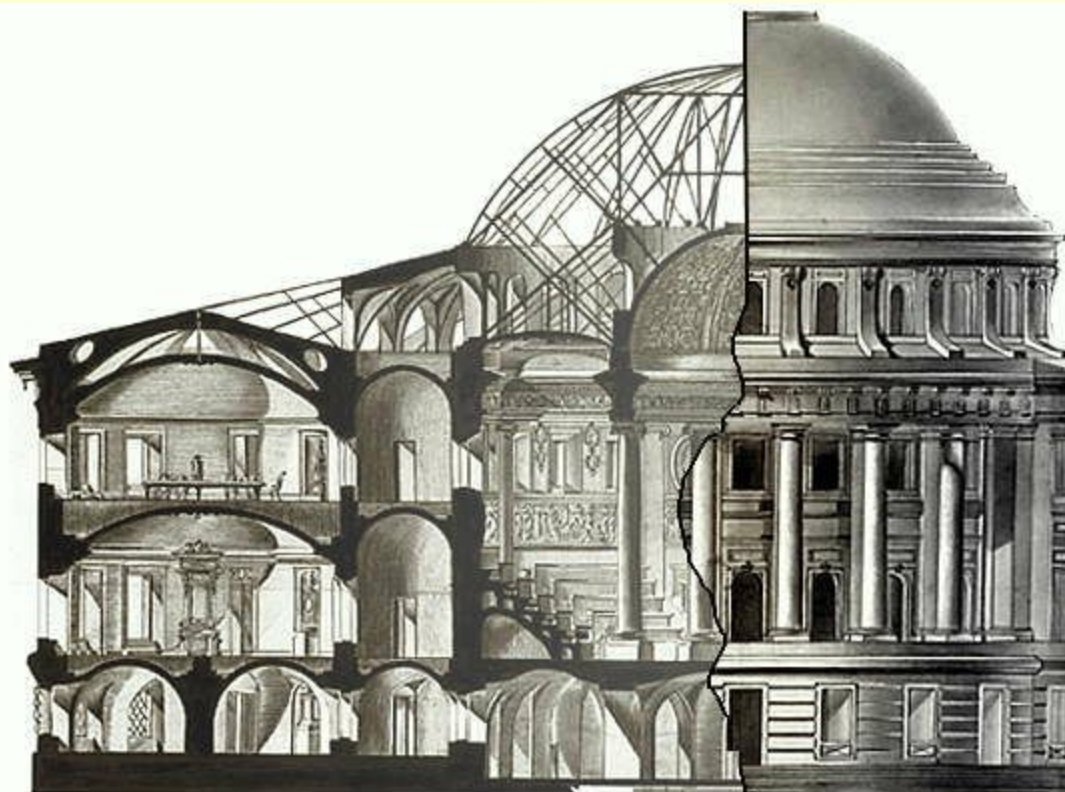
Покровский Собор на Красной
Площади в Москве.

Собор Нотр-дам де Пари
в Париже.





Церковь Покрова Богородицы на Нерли 1165 год
«Простая» красота пропорций **золотого сечения**.



М.Ф. Казаков. Сенат.Разрез.(парадный зал).Фрагмент проекта. Москва (1776-1782)



М.Ф.Кзаков. Голицынская больница.
Москва. 1794-1801гг



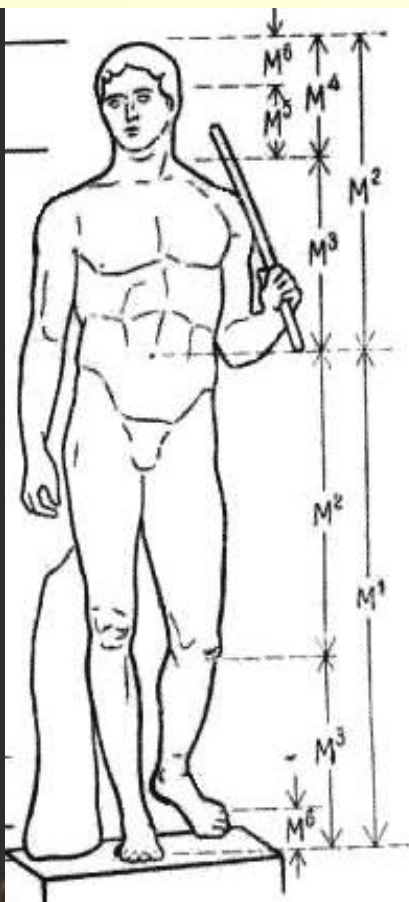
Петровский дворец.(1776 –1796).

Военно-воздушная академия.



В.И.Баженов. Дом – Пашкова.
Москва.1786г.

Золотое сечение в скульптуре



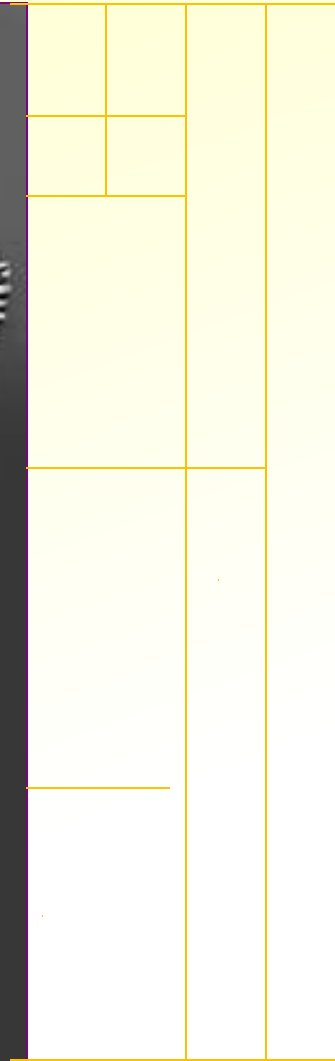
Дорифор Поликлета



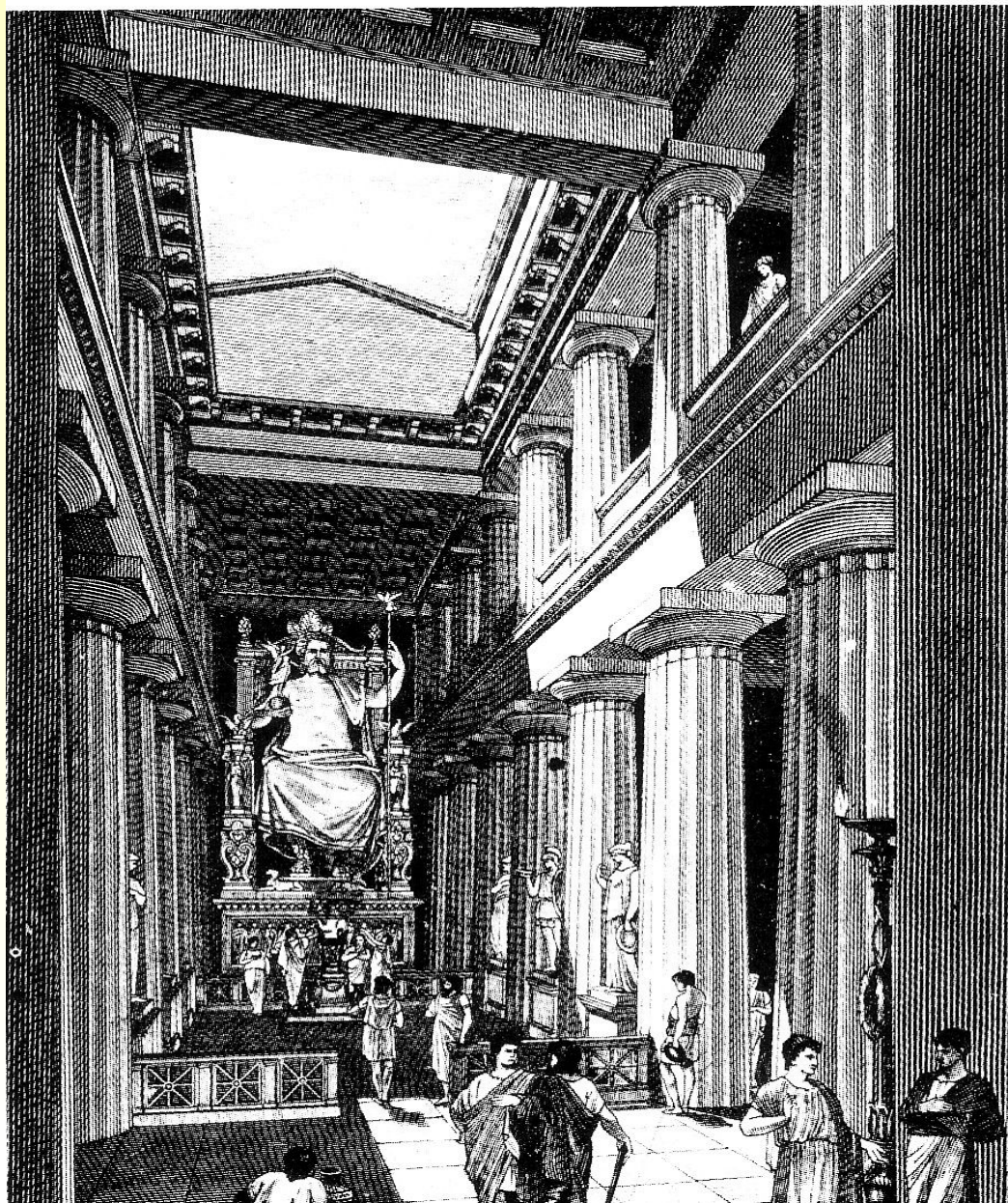
Венера Милосская



Моисей. Скульптура Микеланджело(1515г.)



Аполлон Бельведерский.Скульптор Леохара
(середина V века до н.э.)





Афина Парфенос.Скульптор Фидий(Vвек до н.э.)



Золотое сечение в поэзии и музыке

Все, что пишется с божественным
вдохновением и святым духом, то весьма
прекрасно.
Демокрит.

Золотое сечение в музыке



Результаты исследования золотого сечения в музыке впервые изложены в докладе Эмилия Розенова и позднее развиты в его статье «Закон золотого сечения в поэзии и музыке». Розенов показал действие данной пропорции в музыкальных формах эпохи Барокко и классицизма на примере произведений Баха, Моцарта, Бетховена.

Золотое сечение в поэзии



- Примеры из поэзии бесчисленны. Исследователи особенно выделяют гений А.С. Пушкина.
- Наиболее часто в стихотворениях А.С. Пушкина встречающиеся размеры его стихов тяготеют к числам 5, 8, 13, 21, 34, размер близок к числам ряда Фибоначчи. На эти строки приходятся смысловые максимумы стихотворений.

"Не дорого ценю я громкие права..."

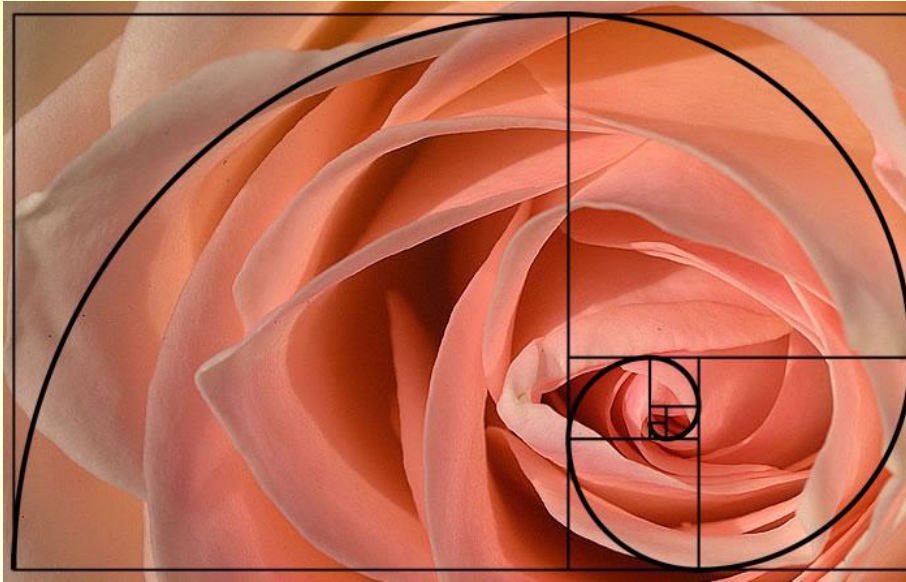
- Не дорого ценю я громкие права,
От коих не одна кружится голова.
Я не ропщу о том, что отказали боги
Мне в сладкой участи оспаривать налоги
Или мешать царям друг с другом воевать;
И мало горя мне, свободно ли печать
Морочит олухов, иль чуткая цензура
В журнальных замыслах стесняет балагура.
Все это, видите ль, слова, слова, слова.
Иные, лучшие, мне дороги права:
Иная, лучшая, потребна мне свобода:
Зависеть от царя, зависеть от народа -
Не все ли нам равно? Бог с ними.
Никому отчета не давать, себе лишь самому
Служить и угождать; для власти, для ливреи
Не гнуть ни совести, ни помыслов, ни шеи;
По прихоти своей скитаться здесь и там,
Дивясь божественным природы красотам,
И пред созданьями искусств и вдохновенья
Трепеща радостно в восторгах умиленья,
Вот счастье! Вот права ...
- 21 строка.
- Две смысловые части: в 13 и 8 строк.
- Первая часть этого стиха по смысловому содержанию делится на 8 и 5 строк.
- Все стихотворение построено по законам золотой пропорции.

Пора, мой друг, пора!

- *Пора, мой друг, пора! Покоя сердце просит –
Летят за днями дни, и каждый час уносит
Частичку бытия, а мы с тобой вдвоем
Предполагаем жить... И глядь – как раз – умрем.
На свете счастья нет, но есть покой и воля.*
-

*Давно завидная мечтается мне доля –
Давно, усталый раб, замыслил я побег
В обитель дальнюю трудов и чистых нег.*

- 8 строк.
- Две смысловые части.
- 1 часть -5 строк.
- 2 часть – 3 строки.
- Это закономерность творческого восприятия поэта, интуитивное чувство гармонии.



«Высшее назначение математики...состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает». Винер Н.