

УГЛЫ И РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ЗАДАНИЕ № 16

В ПИРАМИДЕ $DABC$ ПРЯМЫЕ, СОДЕРЖАЩИЕ РЕБРА DC И AB , ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ.
 А) ПОСТРОЙТЕ СЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЬЮ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ O — СЕРЕДИНУ РЕБРА DB , И ПАРАЛЛЕЛЬНО DC И AB . ДОКАЖИТЕ, ЧТО ПОЛУЧИВШЕЕСЯ СЕЧЕНИЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ. Б) НАЙДИТЕ УГОЛ МЕЖДУ ДИАГОНАЛЯМИ ЭТОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ЕСЛИ $DC = 24$, $AB = 10$.

Решение: а) Построим прямые EK, EM, KF , такие что: $EK \parallel DC; EM \parallel AB; KF \parallel AB; EKFM$ — искомое сечение, причём $EKFM$ — параллелограмм. Покажем, что $EKFM$ прямоугольник:

$$DC \perp AB \Rightarrow EK \perp AB \Rightarrow EM \perp EK, \quad EK \parallel DC \quad EM \parallel AB.$$

Поскольку $EK \parallel DC; EM \parallel AB$; получаем, что $EKMF$ — прямоугол

б) $EK \parallel DC$ и E — середина DB , тогда EK — средняя линия

треугольника значит $EK = \frac{1}{2}DC = 12$, $ME = \frac{1}{2}AB = 5$.
 аналогично $EM = \frac{1}{2}AB = 5$.
 Так $MK^2 = ME^2 + EK^2 \Leftrightarrow MK^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow MK = 13$
 как $EKMF$ прямоугольник, получаем:

Пусть прямая MK пересекает прямую EF в точке O , тогда:

Заметим, что $ME < EK$.
 Применим теорему косинусов в треугольнике EOM :

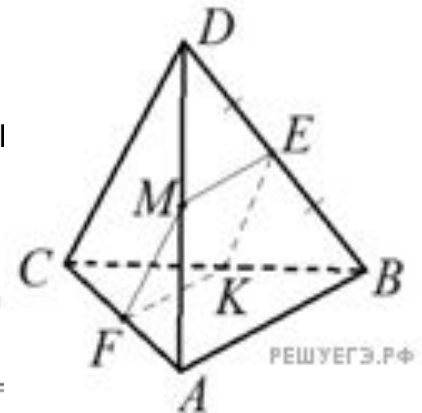
$$EM^2 = MO^2 + OE^2 - 2MO \cdot OE \cdot \cos \angle EOM.$$

$$\cos \angle EOM = \frac{2 \cdot \frac{169}{4} - 25}{2 \cdot \frac{169}{4}} = \frac{119}{169}.$$

Откуда

$$\arccos \frac{119}{169}.$$

Ответ:



Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB . Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.

Пусть $SO = 4x$ и $SM = 5x$.

Тогда

$$OM = x\sqrt{25 - 16} = 3x,$$

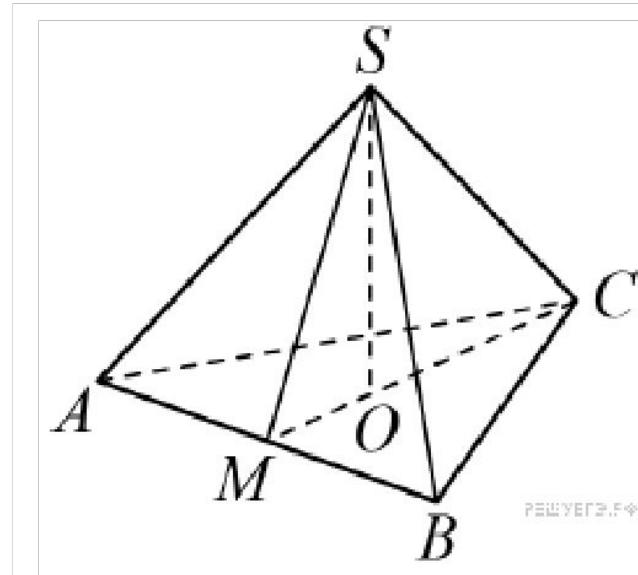
$$OC = 2 \cdot OM = 6x.$$

Из треугольника SCO находим:

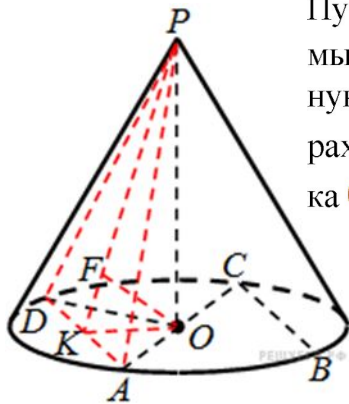
$$\operatorname{tg} \angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}.$$

Тогда искомый угол равен $\arctg \frac{2}{3}$.

Ответ: $\arctg \frac{2}{3}$.



Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60° . Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC . Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.



Пусть отрезок AD — хорда основания, параллельная BC . Тогда треугольник ADP является искомым сечением, так как плоскость ADP содержит прямую AP и прямую AD , параллельную BC . Опустим перпендикуляр PK на прямую AD . Согласно теореме о трех перпендикулярах OK также является перпендикуляром к AD , значит, $AD \perp (OPK)$. Высота OF треугольника OPK лежит в плоскости OPK , следовательно, $OF \perp AD$ и $OF \perp PK$, значит, $OF \perp (ADP)$.

Далее находим:

1) из условия $AD \parallel BC$: $\angle DAC = \angle BCA = 60^\circ$;

2) из правильного треугольника AOD : $OK = \frac{AO \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника APO : $PO^2 = AP^2 - AO^2 = 4R^2 - R^2 = 3$;

4) из прямоугольного треугольника KPO :

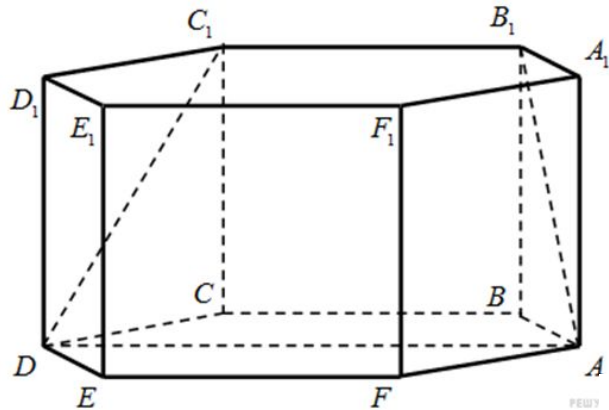
$$KP = \sqrt{PO^2 + KO^2} = \frac{\sqrt{15}}{2};$$

а)

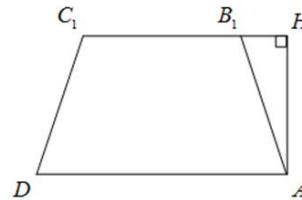
$$OF = \frac{OK \cdot OP}{PK} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{15}}$.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 4, найдите расстояние от точки A до прямой $B_1 C_1$.



Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то прямые AD и BC параллельны



Параллельны также прямые BC и $B_1 C_1$, и следовательно, прямые AD и $B_1 C_1$ параллельны. Расстояние от точки A до прямой $B_1 C_1$ равно расстоянию между прямыми AD и $B_1 C_1$.

В трапеции $DC_1 B_1 A$ имеем $B_1 C_1 = 4$, $DA = 8$, $DC_1 = B_1 A = 4\sqrt{2}$.

Значит, $B_1 H = \frac{DA - C_1 B_1}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2$, тогда $AH = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC .

б) Найдите площадь сечения.

В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой PB до пересечения ее с прямой AB в точке L ,

а в плоскости ABC через точку L проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с прямой CD в точке M .

По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC .

Прямая LM параллельна прямой AD , следовательно, она параллельна плоскости APD , а, значит, плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM .

Обозначим через N точку пересечения этой прямой с ребром PD .

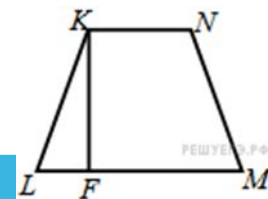
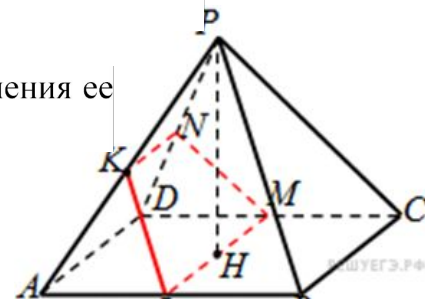
Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.

Отрезки KL и MN равны, как средние линии равных правильных треугольников ABP и DCP , а отрезок LM — средняя линия квадрата $ABCD$, следовательно, построенное сечение — равнобедренная трапеция, в которой $LM = 4$, $KL = KN = MN = 2$.

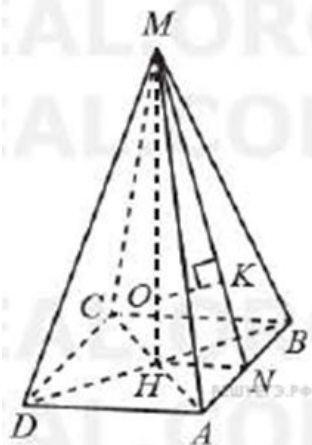
Проведем высоту KF этой трапеции. Тогда $LF = \frac{LM - KN}{2} = 1$, и из прямоугольного треугольника KLF находим $KF = \sqrt{KL^2 - LF^2} = \sqrt{3}$.

Окончательно получаем $S_{KLMN} = \frac{LM + KN}{2} \cdot KF = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.



В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.



Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M , тогда треугольник AMH — прямоугольный, $MA = 17$, $MH = 7$, откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 4\sqrt{15}$.

Треугольник ABH — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{30}$. В тре-

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 13.$$

угольнике AMB высота

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $HN = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{30}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH , точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN . Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow \frac{7-r}{r} = \frac{13}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow (7-r) \cdot 2\sqrt{30} = 13 \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{26\sqrt{30} - 120}{7},$$

где r — радиус сферы.

Площадь сферы

$$S = 4\pi r^2 = \frac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}.$$

Ответ:

$$\frac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}.$$

