ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

СОДЕРЖАНИЕ

1 КТО ТАКОЙ ПИФАГОР САМОССКИЙ

- Греческий философ и математик. Был строгим вегетарианцем. В Кротоне основал этико-религиозное пифагорийское товарищество, получившее большое распространение, целью которого было нравственное обновление и очищение религиозных воззрений. Лидер аскетической общины, в которую входили как мужчины, так и женщины, считавшие Пифагора гиперборейским Аполлоном. Философия представляет попытку свести все явления к числовым отношениям и рассматривать числа как непреходящую сущность вещей (как все числа составлены из чета и нечета, так и все вещи соединяют в себе противоположности, из которых основные - "предел" и "беспредельное"; в то же время каждая вещь рассматривалась как примирение противоположностей - "гармония"). Пифагору приписывают сочинения по геометрии (теорема Пифагора), теории чисел, астрономии, определение основных музыкальных интервалов (считал, что небесные тела подчиняются аналогичным законам гармонии - концепция "музыки сфер"). Пифагорейцы признавали бессмертие душ и их постепенное очищение посредством переселения. Принимали шарообразность Земли и ее движение вокруг центрального огня, источника света и тепла.

2 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство, использующее равносоставленность. На рисунке 1 окрашенный в зеленый цвет отрезок равен одному из катетов, расположенного в нижней части чертежа прямоугольного треугольника, а красный треугольник — равнобедренный и прямоугольный. Доказав, что угол между двумя разрезами — слева и внизу — прямой, усматриваем, как из частей данной фигуры, представляющей собой объединение квадрата н равнобедренного прямоугольного треугольника, можно сложить либо два квадрата, либо один. Причем во втором случае сторона квадрата равняется гипотенузе того самого притаившегося треугольника. Шарнирное крепление на рисунке 2 показывает, что был отрезан прямоугольный треугольник, представляющий половину красного, и повернут относительна «шарнирной» точки на 135о. На рисунке 3 использованы разрезы рисунка 1. Вновь около шарнирных точек отделенные треугольники поворачиваются на 135о каждый.

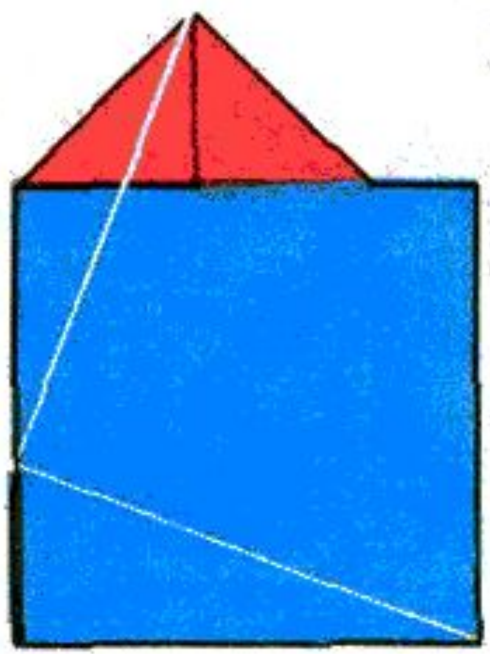


Рис. 1.

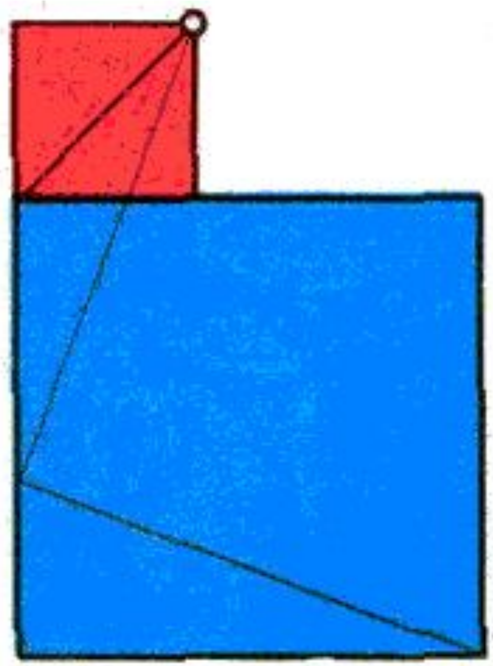


Рис. 2.

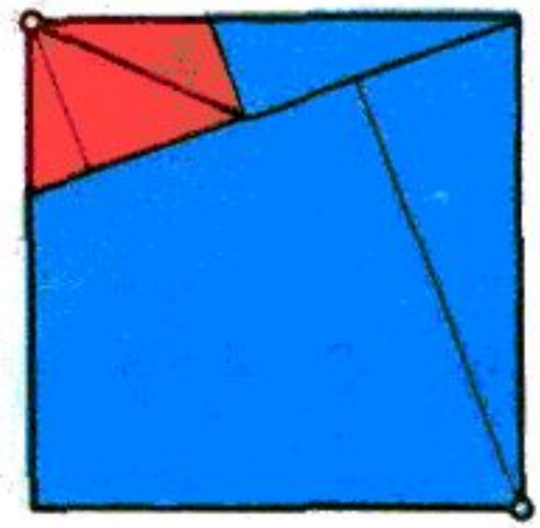


Рис. 3.

Как проводить доказательство теоремы в случае, когда меньший из катетов более половины большего, вы легко установите сами. Современная геометрия предпочитает арифметическую формулировку теоремы Пифагора, а именно: если стороны прямоугольного треугольника измерены одним и тем же масштабом, то квадрат числа, выражающего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, выражающих катеты. Коротко: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Два доказательства, использующих такую формулировку, мы сейчас и проведем.

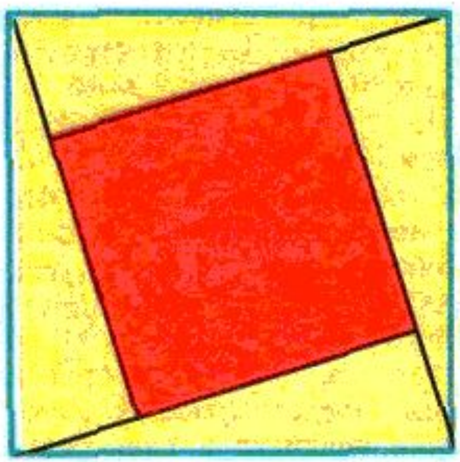


Рис. 4.

На рисунке 4 изображен квадрат с выделенными на нем четырьмя равными прямоугольными треугольниками. Именно из такого рисунка исходил в своем доказательстве в XII веке индийский математик Бхаскари-Ачарна.

Пусть сторона большого квадрата (она же — гипотенуза прямоугольного треугольника, окрашенного здесь в желтый цвет) равна *c*. Пусть также два его катета равны соответственно *a* и *b*. Тогда, в согласии с чертежом, $(a - b)2 + (4ab)/2 = c2$, то есть $c2 = a2 + b2$. Следовательно, если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его катетов действительно равна квадрату гипотенузы.

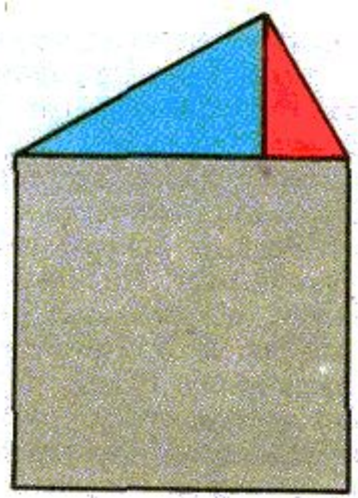


Рис. 5.

На рисунке 5 один из трех данных прямоугольных треугольников — объемлющий. Все три треугольника — попарно подобные. В этом и ключ к доказательству, ибо площади подобных фигур, построенных соответственно на катетах и гипотенузе данного прямоугольного треугольника, находятся в том же отношении, в каком площади квадратов, построенных на этих катетах и гипотенузе. Иначе говоря, с помощью рисунка мы получаем равенство $ka2 + k\,b2 = kc2$, где a и b — катеты объемлющего треугольника, c — его гипотенуза, k — число, равное отношению площади объемлющего треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Сокращая обе части равенства на k, получаем, как следствие, теорему Пифагора.

Вероятно, за многие столетия со времени открытия теоремы Пифагора немало школьников получило плохие оценки за те или иные ошибки, допущенные при доказательстве. Но, несомненно, более коварной и опасной в этом смысле явилась теорема, ей обратная, на которую в действительности часто надо бы ссылаться в тех случаях, когда школьники ссылаются на теорему Пифагора. Вот формулировка обратной теоремы: если для треугольника со сторонами a, b и c справедливо соотношение $a2 + b2 = c2$, то треугольник этот — прямоугольный, причем против стороны c находится прямой угол. Доказательство чертежа не требует и проводится очень просто. Действительно, пусть нам дан треугольник, для сторон которого соблюдается соотношение $a2 + b2 = c2$. Построим теперь прямоугольный треугольник с катетами a и b. Тогда, по прямой теореме Пифагора, гипотенуза этого, построенного нами треугольника будет равняться $c = \sqrt{(a2 + b2)}$. Следовательно, он будет равен по трем сторонам данному треугольнику, который поэтому должен быть прямоугольным.

Приведем теперь два обобщения теоремы Пифагора.
Первое — стереометрическое. Оно установлено впервые, по-видимому, в XVII столетии и довольно часто встречается в прикладной математике. Оказывается, что сумма квадратов площадей трех прямоугольных треугольников, являющихся гранями тетраэдра и имеющих общую вершину при прямых углах (рис. 6), равна квадрату площади невидимой грани этого тетраэдра. Доказательство указанного факта предлагается вам провести самостоятельно.

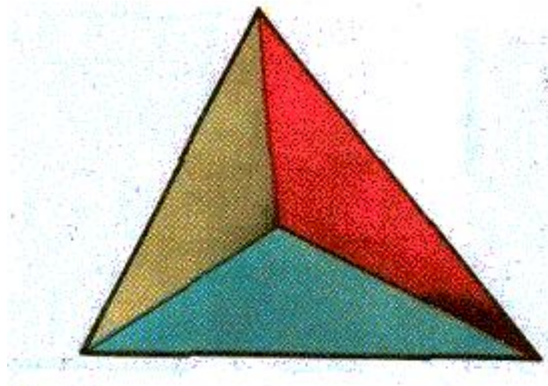


Рис. 6.

Второе обобщение — теорема Паппа Александрийского (III век н. э.). Она гласит: во всяком треугольнике параллелограмм, построенный на одной стороне треугольника внутрь его и имеющий две другие вершины вне треугольника, равновелик сумме двух параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма. Короче говоря, на рисунке 7 площадь нижнего параллелограмма равна сумме площадей параллелограммов, построенных на боковых сторонах треугольника.

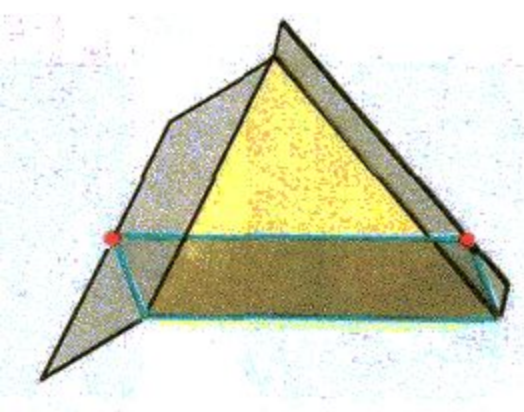


Рис. 7.

На рисунке 8 отчетливо выделяются два равных, а потому и равновеликих треугольника с параллельными соответственными сторонами. На рисунке 9 выделены две трапеции на боковых, сторонах данного треугольника, сумма площадей которых равна площади трапеции, построенной на его основании. Отсюда сразу следует справедливость теоремы Паппа. Много доказательств теоремы Пифагора, некоторые из которых исключительно изящны, вы можете найти в книге В. Литцмана «Теорема Пифагора». О самом Пифагоре рассказывается в книге Б. Л. Ван-дер-Вардена «Пробуждающаяся наука».

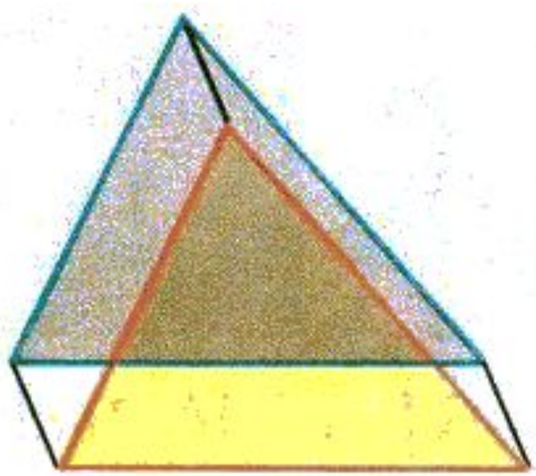


Рис. 8.

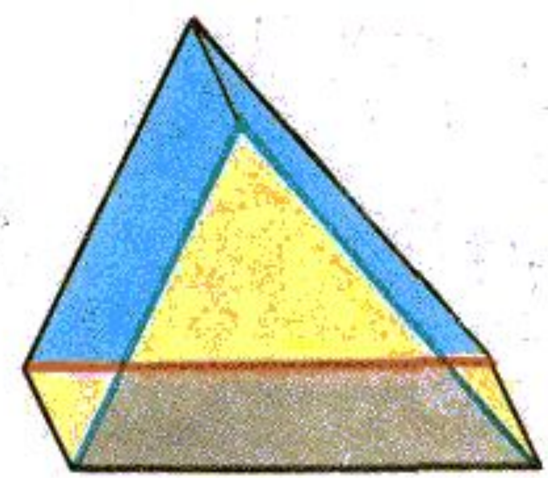
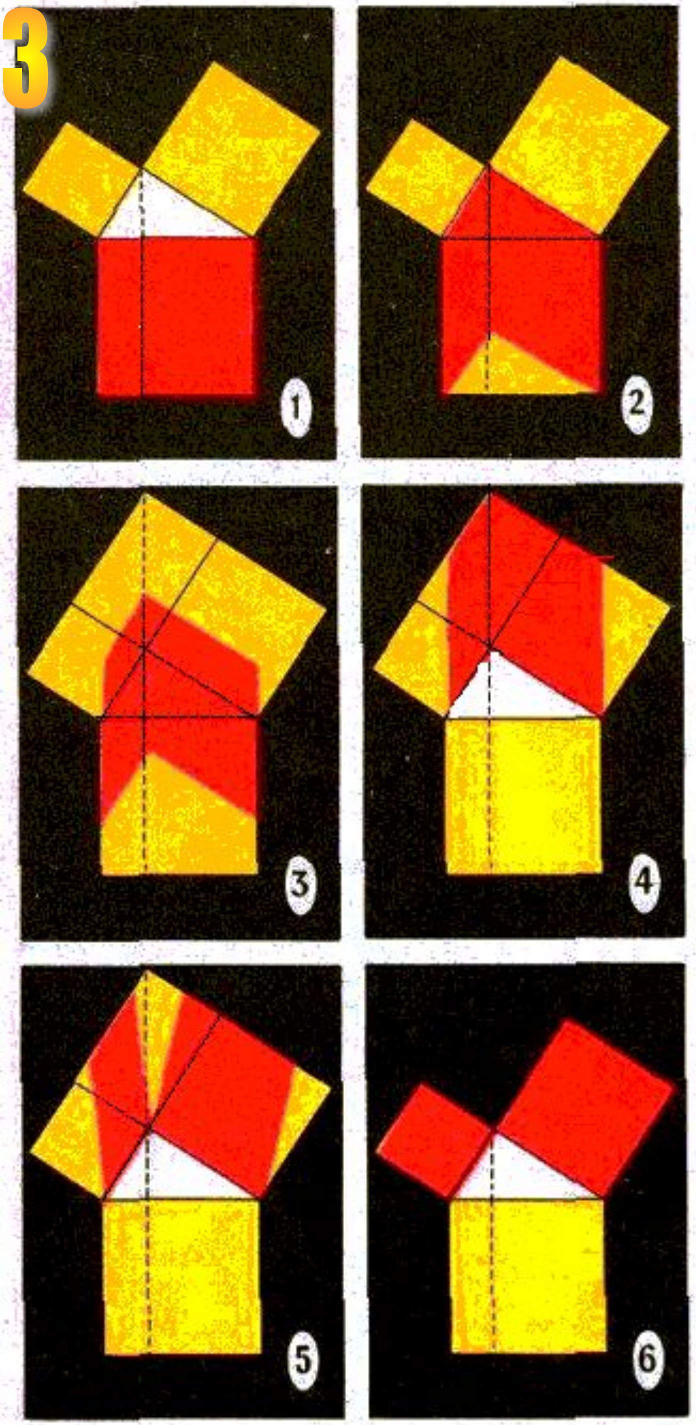


Рис. 9.

3



На рисунках запечатлены последовательные этапы доказательства теоремы Пифагора. Красной краски, затраченной на то, чтобы покрасить квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 1), оказывается равно столько, сколько ее требуется, чтобы покрасить квадраты, построенные на катетах этого треугольника (рис. 6). На рисунке 2 квадрат превратился а равновеликую ему фигуру, по форме напоминающую развернутую книгу, движущуюся затем вверх.

Тот факт, что продолженная на рисунке 3 пунктиром высота прямоугольного треугольника попадает в точку пересечения продолжений сторон квадратов, построенных на катетах, требует обосновании — оно приведено на второй странице обложки. На следующих рисунках «книжка» распадается на параллелограммы, а они превращаются в равновеликие им квадраты, построенные на катетах данного прямоугольного треугольника. Тем самым сумма площадей квадратов, построенных на катетах произвольного прямоугольного треугольника, оказывается равной площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Теорема Пифагора доказана.

Значение теоремы.

- Значение теоремы состоит в том. Что с ее помощью выводят все теоремы, касающиеся связи сторон и углов в треугольниках. Это основной закон связи расстояний на плоскости. Все треугольники, у которых стороны пропорциональны числам 3,4,5. называют пифагоровыми. Треугольник со сторонами 5 м, 3 м, 4 м называют египетским, потому что его модель из веревки египтяне применяли для построения прямого угла на плоскости.

Пословицы, которые предлагал Пифагор своим близким друзьям

- Не проходите мимо весов
- Не садитесь на подушку
- Не грызите своего сердца
- Не поправляйте огня мечом
- Не принимайте под свою кровлю ласточек

- - не нарушайте справедливости.
- - не останавливайтесь на достигнутом
- - не предавайтесь меланхолии
- - не раздражайте тех, кто и так в огне
- - говорунов и легкомысленных людей

Изречения из «Золотых стихов» Пифагора

- Делай лишь то, что в последствии не огорчит тебя и не принудит раскаиваться.
- Не делай никогда того, чего не знаешь, но научись всему, что следует знать, и тогда ты будешь вести спокойную жизнь.
- Не пренебрегай здоровьем своего тела. Доставляй ему вовремя пищу и питы. И упражнения, в которых оно нуждается.
- Приучайся жить просто и без роскоши.
- Не закрывай глаз, когда хочется спать, не разобравши всех своих поступков в прошлый день.

- Презентацию выполнила учитель математики МАОУ СОШ № 29
- Г. Калининграда
- Плаксина Елена Владимировна