

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ И ГОМОТЕТИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОЛИМПИАДНОГО УРОВНЯ

Студент IV курса факультета математики и
компьютерных наук по направлению
подготовки 01.03.01 «Математика»
профиль: преподавание математики и
информатики Филь Е.А.

научный руководитель ст. преподаватель
кафедры алгебры и геометрии

Куприенко Н.Н.

ДВИЖЕНИЕ:

- 1.1. Преобразование фигур
- 1.2. Свойства движения
- 1.3. Параллельный перенос
- 1.4. Центральная симметрия
- 1.5. Осевая симметрия
- 1.6. Поворот

ГЛАВА 2. ГОМОТЕТИЯ

- 2.1. Гомотетия
- 2.2. Свойства гомотетии
- 2.3. Гомотетичность окружностей
- 2.4. Композиция гомотетий
- 2.5. Поворотная гомотетия

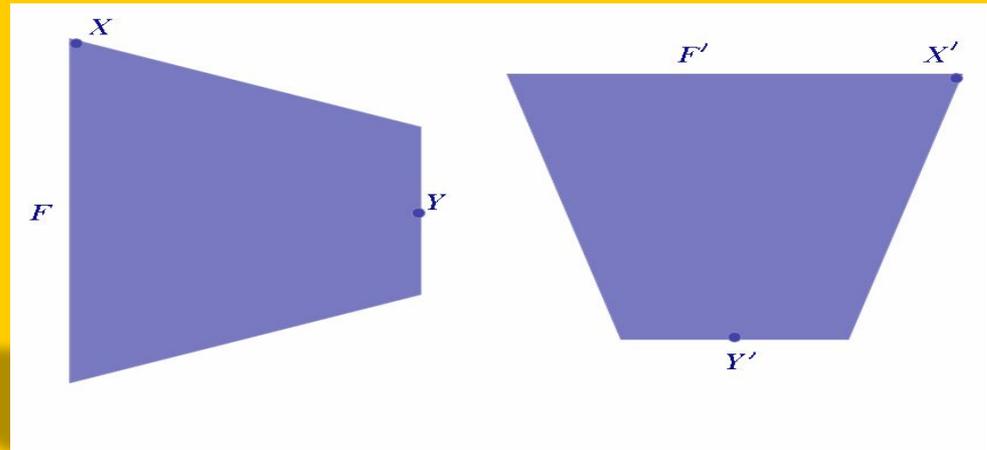
ГЛАВА 3. Разные задачи из Всероссийских олимпиад школьников

Понятие движения в геометрии

Что такое движение?

Определение 1.1.[6] Преобразование одной фигуры в другую называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть переводит любые две точки X и Y одной фигуры F в точки X' , Y' другой фигуры F' так, что $XY = X'Y'$. (Рис. 1.1.)

Рисунок 1.



Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной.

Свойства движения

Теорема 1.3. [6] Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения. (Рис. 2).

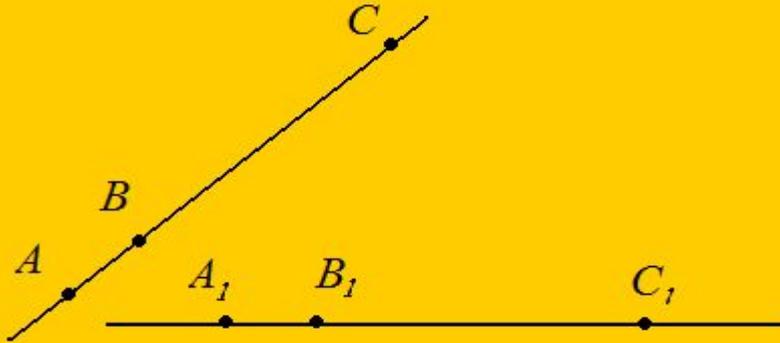


Рисунок 2.

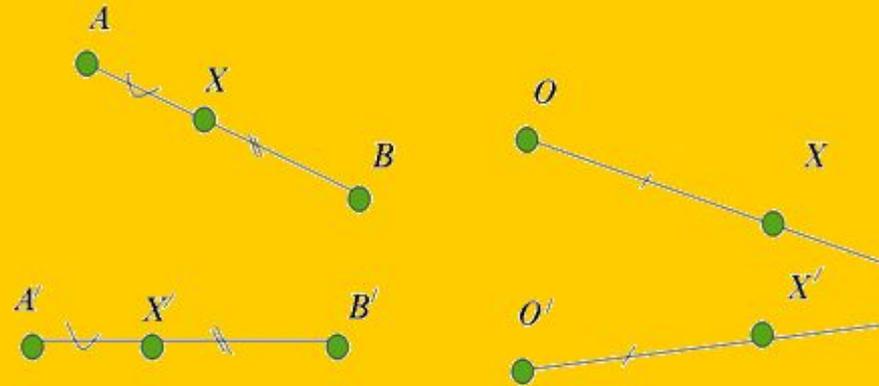


Рисунок 3.

Следствие 1.1.[6] При движении прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки - в отрезки. (Рис. 3).

Следствие 1.2.[1] При движении треугольник отображается на равный ему треугольник. (Рис. 4).

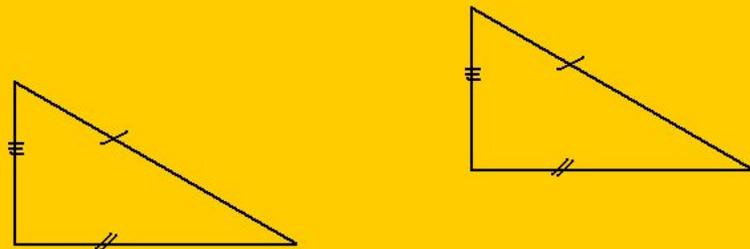


Рисунок 4.

Параллельный перенос

Определение 1.4.[1] Параллельный перенос или трансляция – частный случай движения, при котором все точки пространства перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

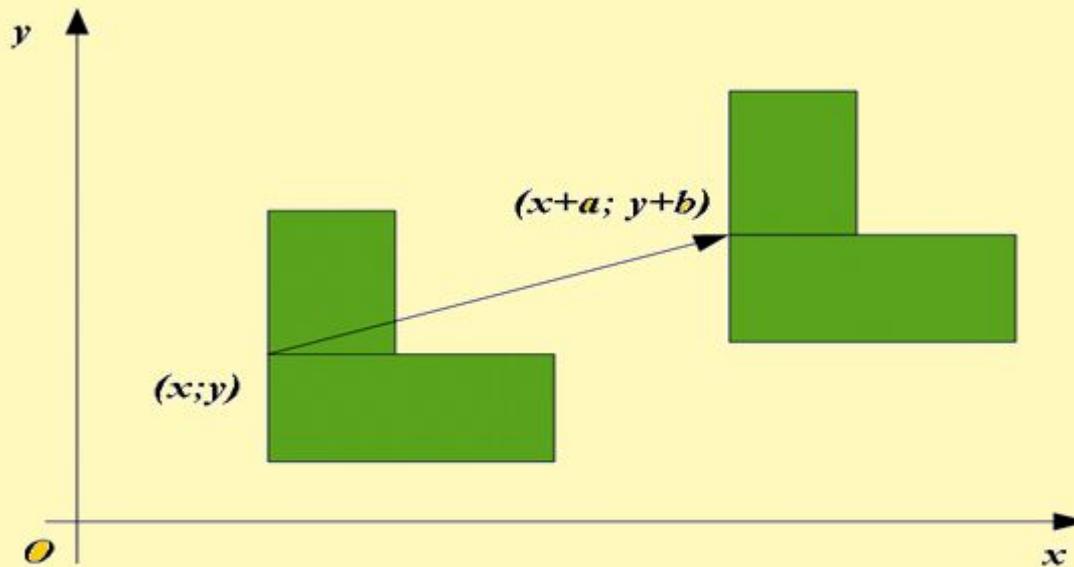
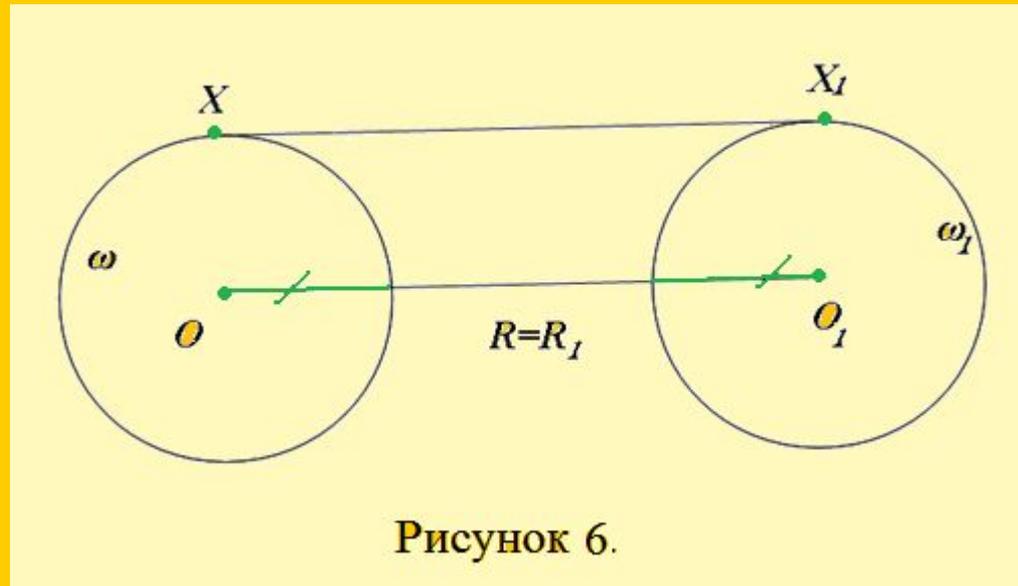


Рисунок 5.

Вводная задача 1.1. [5]

Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.



Заметим, параллельный перенос все точки пространства перемещает в одном и том же направлении на одно и то же расстояние, то действительно, окружность переходит в окружность при параллельном переносе.

Гомотетия (от др.гр. ὁμός(homós) – «равный, одинаковый, взаимный, общий» и Θέτος(thetós) – «расположенный»).



Рисунок 7.

- *Гомотетия сохраняет формы , но не размеры.*

Определение 1.[1] Гомотетией называют преобразование плоскости, которое каждую точку X отображает на такую точку X' , обладающую тем свойством, что $\vec{OX'} = k \cdot \vec{OX}$, где точку O называют центром гомотетии, а число k - коэффициентом гомотетии .

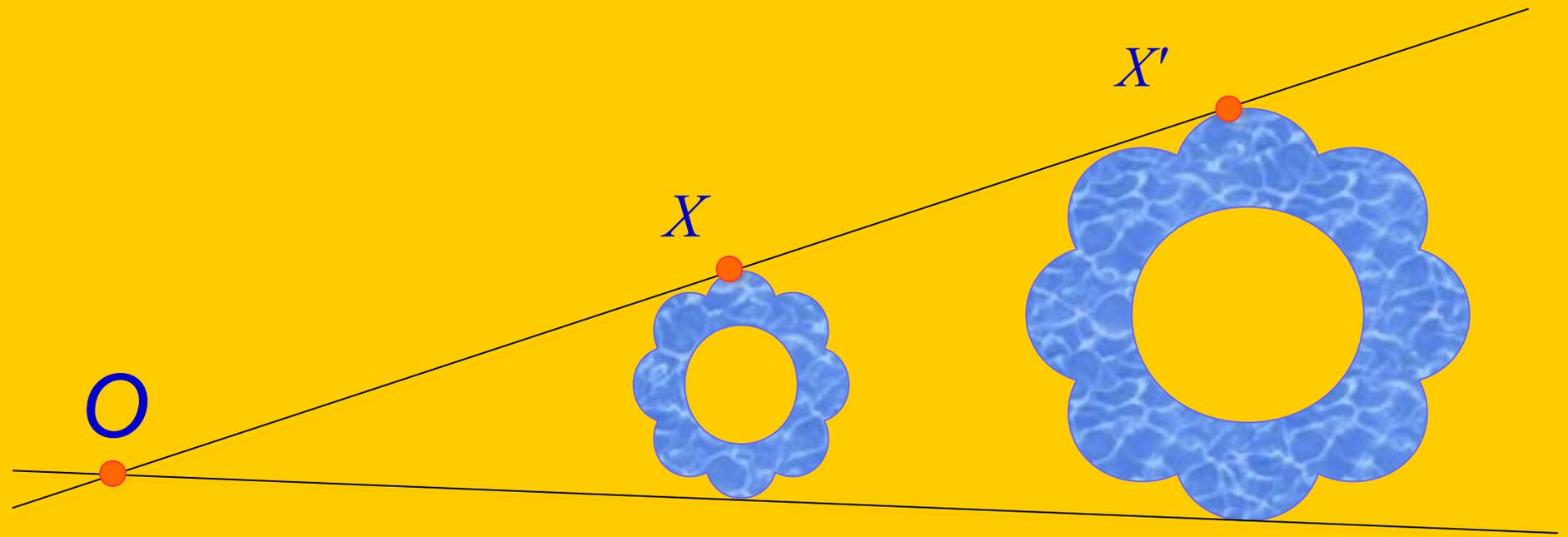


Рисунок 8.

Определение 2. [1] Две фигуры называются *гомотетичными*, если одна из них переходит в другую при некоторой *гомотетии*. (Рис. 9).

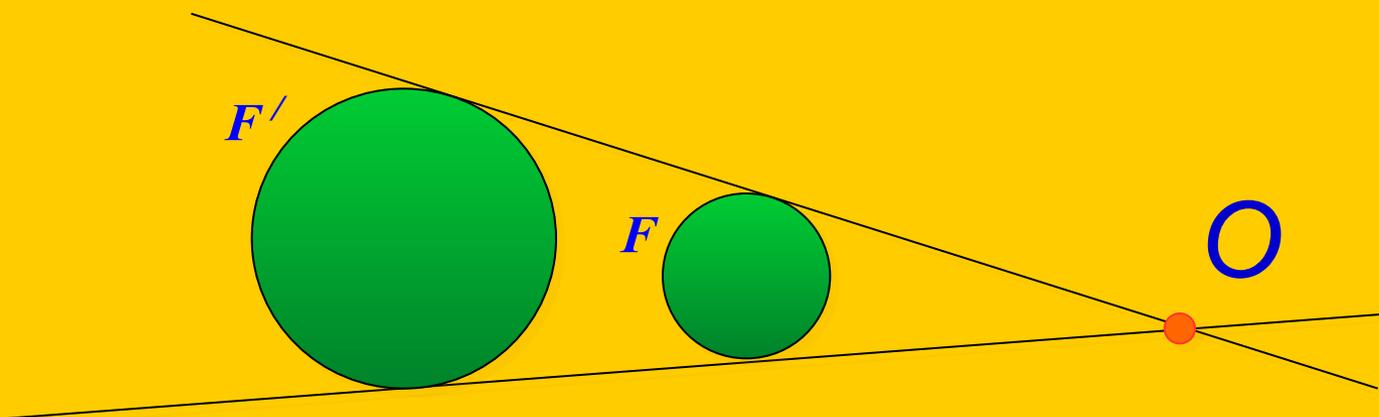
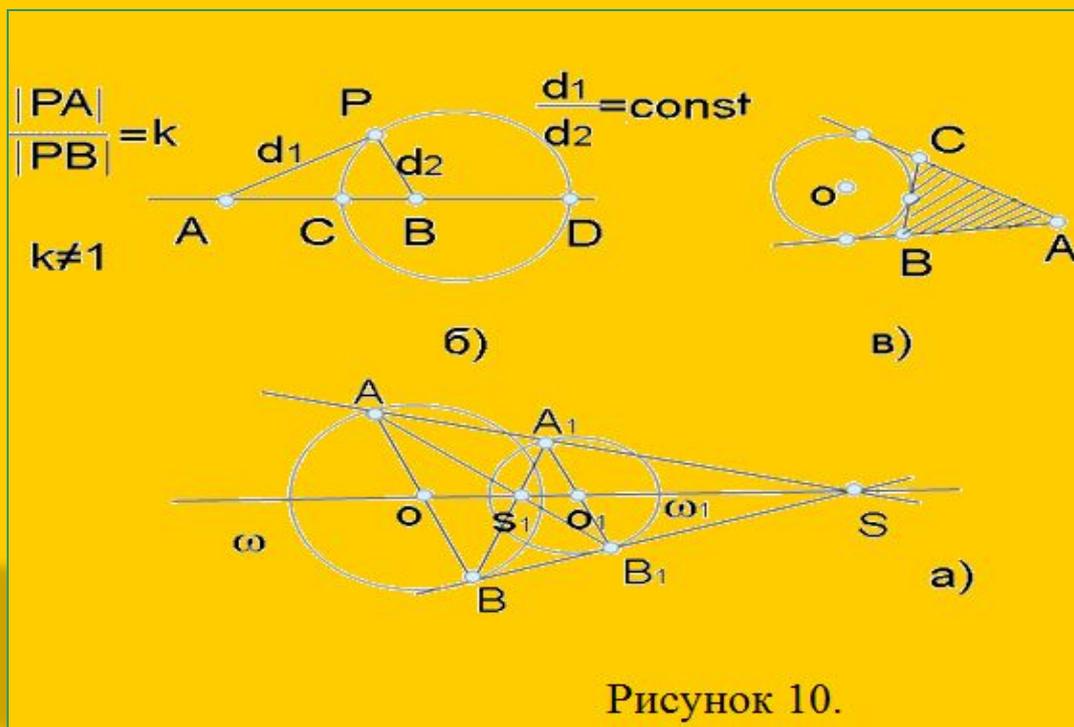


Рисунок 9.

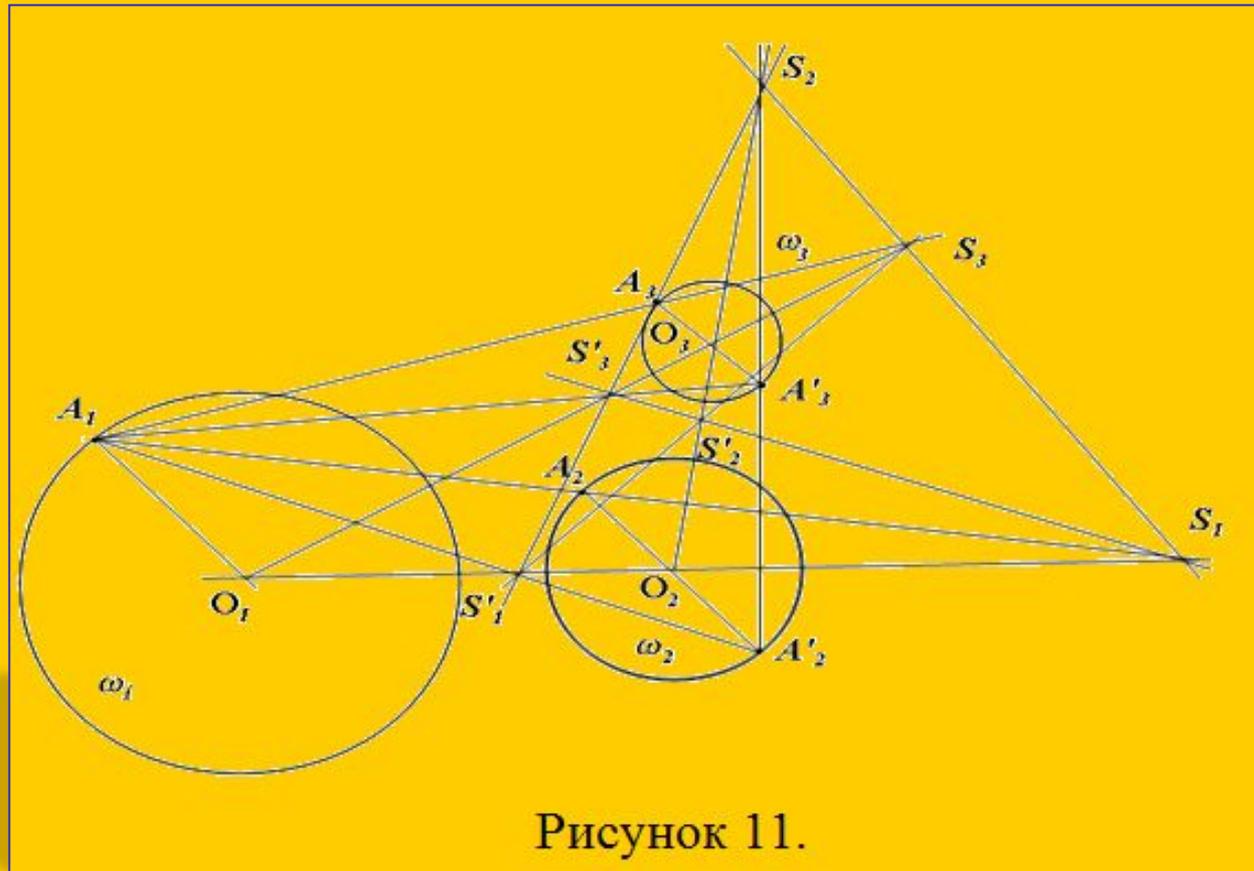
- **Теорема 1.** Две неравные окружности гомотетичны дважды. [2]

Определение 3. *Окружность Аполлония* – ГМТ плоскости, отношение расстояний от которых до двух заданных точек – величина постоянная, не равная единице (рис.10,б). [5]



Определение 4. *Вневписанная окружность треугольника* это окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон (рис.10, в)). [4]

Теорема 2. Если центры трёх попарно неравных окружностей неколлинеарны, то шесть центров гомотетий этих окружностей, взятых попарно, лежат по три на четырёх прямых.

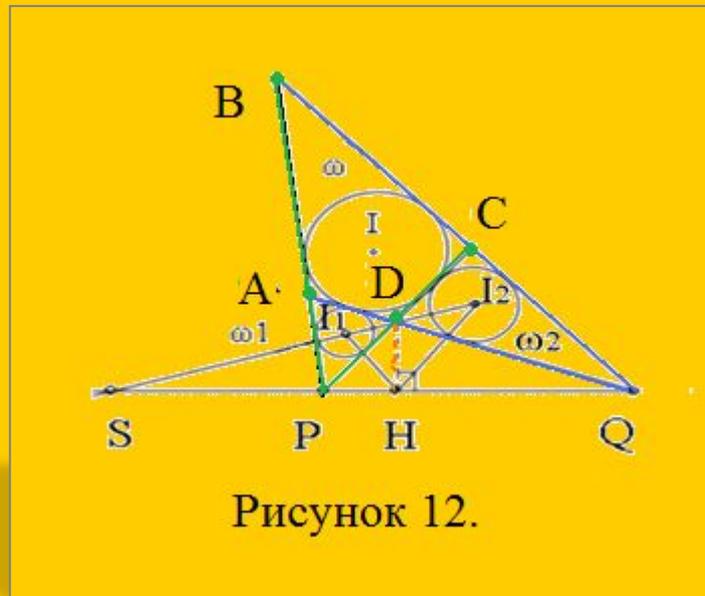


● Теорема о трёх центрах гомотетий

задача №871 из сборника «Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: заключительные этапы»[1]

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P и Q – точки пересечения лучей BA и CD , BC и AD соответственно, а H – проекция D на PQ . Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.

(Автор В. Шмаров.)



Определение 4. Углом, под которым окружность видна из данной точки, называется угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности.

Лемма 1. Утверждение: «окружности ω_1 и ω_2 видны под равными углами из точки H », - равносильно тому, что $\frac{r_1}{r_2} = \frac{HI_1}{HI_2}$ (рис.13, б).

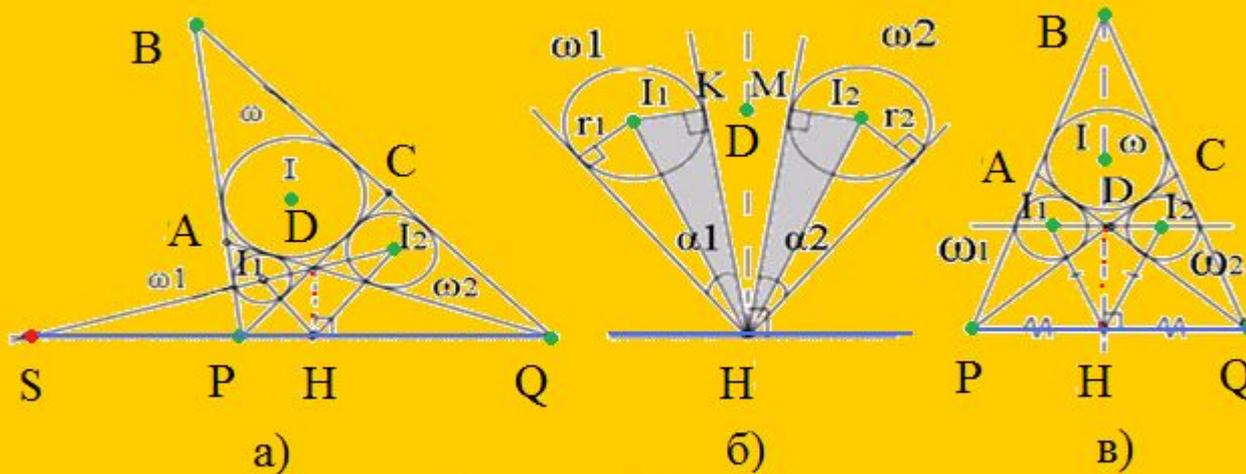


Рисунок 13.

Решение задачи. Пусть окружности ω_1 и ω_2 , с центрами I_1 и I_2 , радиусами r_1 и r_2 , – вписанные окружности треугольников ADP и CDQ соответственно и D – точка пересечения касательных, следовательно, по теореме 1, ω_1 и ω_2 гомотетичны с центром D , т. е. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$ (рис.13).

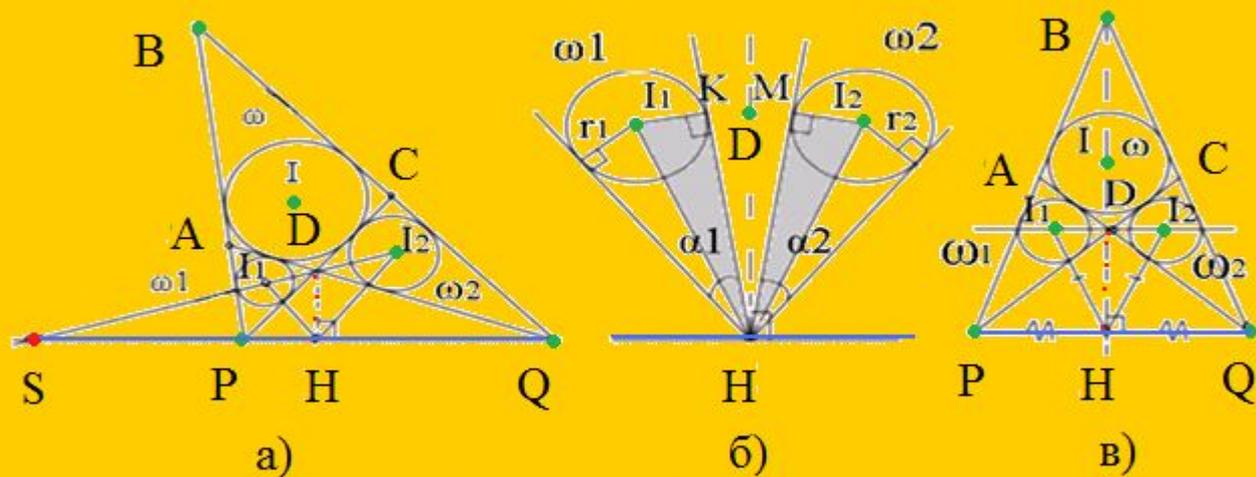


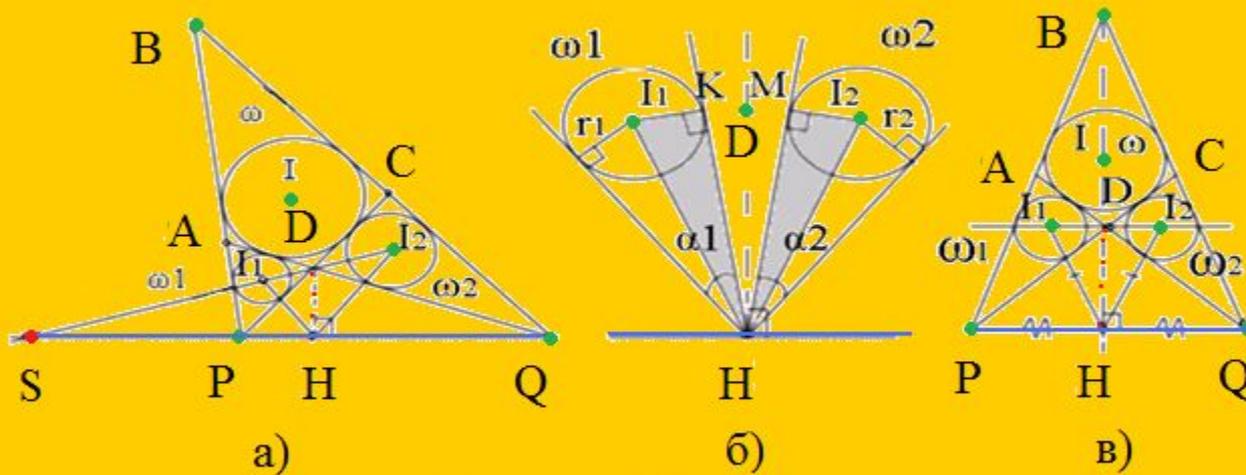
Рисунок 13.

Далее рассматриваются два случая: 1) радиусы различны; 2) радиусы одинаковы.

1) Пусть $r_1 \neq r_2$ и S – центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_1 в ω_2 , то есть S – точка пересечения общих внешних касательных к обеим окружностям.

Если окружности ω_1 и ω_2 видны из точки H под равными углами \Rightarrow Л.1. $\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{HI_1}{HI_2}$ (1);

$$\text{Т.1.} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{DI_1}{DI_2} \quad (2)$$



$$(1), (2) \Rightarrow \frac{DI_1}{DI_2} = \frac{HI_1}{HI_2}$$

Рисунок 13.

Так как S – ещё один центр гомотетии ω_1 и ω_2 , то $\frac{r_1}{r_2} = \frac{SI_1}{SI_2}$ $\frac{SI_1}{SI_2} = \frac{HI_1}{HI_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$

1) Пусть $r_1 \neq r_2$ и S – центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_1 в ω_2 , то есть S – точка пересечения общих внешних касательных к обеим окружностям.

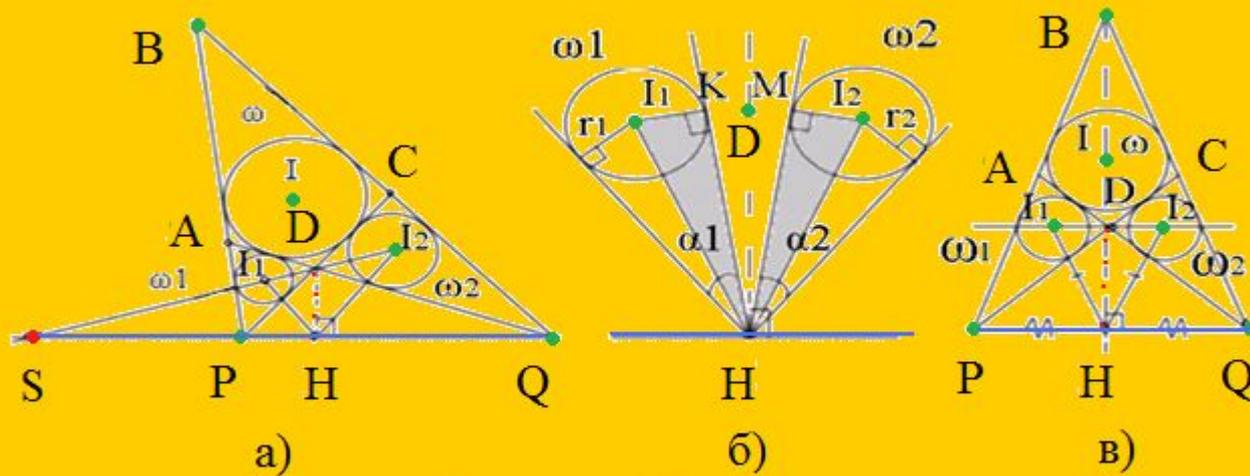


Рисунок 13.